UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Decanato de Estudios de Postgrado
Maestría en Matemáticas

TRABAJO DE GRADO

Pares de cotorsión y las conjeturas de las dimensiones finitísticas

por
Marco Antonio Pérez Bullones

Julio de 2009

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Decanato de Estudios de Postgrado
Maestría en Matemáticas

Pares de cotorsión y las conjeturas de las dimensiones finitísticas

Trabajo de Grado presentado a la Universidad Simón Bolívar por

Marco Antonio Pérez Bullones

Como requisito parcial para optar al grado de

Magister en Matemáticas

Realizado con la tutoría del

Profesor Juan Rada

Julio de 2009

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Decanato de Estudios de Postgrado
Maestría en Matemáticas

Pares de cotorsión y las conjeturas de las dimensiones finitísticas

Estudiante: Pérez Bullones Marco Antonio
Carnet: 0786261

Este Trabajo de Grado ha sido aprobado en nombre de la Universidad Simón Bolívar por el siguiente jurado examinador:

Presidente
Dmitry Logachev

Miembro Externo
Miguel Méndez (IVIC)

Miembro Principal-Tutor
Juan Rada

Fecha:__________

DEDICATORIA

A mi familia y amigos.

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Juan Rada, por proponerme este tema interesante para trabajar, por su ayuda y su paciencia.

A la profesora Lidia Angeleri-Hügel, por aclararme algunas dudas y enviarme algunas referencias.

A mis amigos Adolfo Rodríguez y Mariolys Rivas, quienes también me enviaron varias de las referencias.

A mis padres por apoyarme.

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Decanato de Estudios de Postgrado

Maestría en Matemáticas

PARES DE COTORSIÓN Y LAS CONJETURAS DE LAS DIMENSIONES FINITÍSTICAS

Estudiante: Pérez Bullones Marco Antonio
Carnet: 0786261
Julio de 2009

RESUMEN

Dos clases de módulos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sobre un anillo R forman un par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ si

$$\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B} = \{M \in \mathrm{Mod}_R : \mathrm{Ext}^1(M, -)|_{\mathcal{B}} \equiv 0\} \text{ y}$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\perp_1} = \{M \in \mathrm{Mod}_R : \mathrm{Ext}^1(-, M)|_{\mathcal{A}} \equiv 0\}.$$

Estudiaremos las dimensiones homológicas relativas en pares de cotorsión. Esto puede ser aplicado al estudio de las dimensiones finitísticas grande y pequeña de un anillo R. Usando la teoría de pares de cotorsión y la teoría de módulos tilting, daremos condiciones para la validez de la segunda conjetura de la dimensión finitística, la cual enuncia que $\mathrm{findim}(R) < \infty$. En tal sentido, demostraremos que $\mathrm{findim}(R) < \infty$ si, y sólo si, la dimensión proyectiva de $\mathcal{A}$ con respecto a sí misma es finita, y la $\mathcal{A}$-dimensión de resolución de la categoría $\mathcal{P}^{<\infty}$ (los R-módulos finitamente presentados con dimensión proyectiva finita) es también finita. Más aún, obtenemos un resultado análogo para $\mathrm{Findim}(R)$. También se establecen condiciones para la validez de la primera conjetura de la dimensión finitística, es decir, $\mathrm{Findim}(R) = \mathrm{findim}(R)$. Estos resultados se deben a L. Angeleri-Hügel y a O. Mendoza, que fueron demostrados en su artículo "Homological dimensions in cotorsion pairs".

Palabras clave: Dimensiones finitísticas, dimensiones homológicas relativas, pares de cotorsión, módulos tilting.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Dado un anillo noetheriano R, la dimensión finitística pequeña de R, denotada por $\mathrm{findim}(R)$, se define como el supremo de las dimensiones proyectivas tomado sobre la categoría de R-módulos finitamente generados de dimensión proyectiva finita. La dimensión finitística grande, denotada por $\mathrm{Findim}(R)$, se define similarmente, pero sobre la categoría de R-módulos de dimensión proyectiva finita.

En el caso de álgebras finito-dimensionales R sobre un cuerpo, la dimensión finitística pequeña y la grande pueden diferir. Es decir, la primera conjetura de la dimensión finitística falla. El primer ejemplo de este hecho fue presentado por Huisgen-Zimmerman en 1992 (ver [14]). Más tarde, Smalø, en [21], demostró que la diferencia entre las dimensiones puede ser arbitrariamente grande. Sin embargo, uno de los problemas más importantes de la Teoría de Representaciones de Álgebras todavía permanece abierto, conocido como la segunda conjetura de la dimensión finitística: ¿será la dimensión finitística pequeña de un álgebra de Artin finita?. Esta conjetura ha sido probada para todas las álgebras monomiales de dimensión finita [13], y para todas las álgebras con dimensión de representación ≤ 3 [15].

El objetivo de este trabajo es presentar de una forma autocontenida las investigaciones recientes de L. Angeleri-Hügel y O. Mendoza [3], sobre las dimensiones finitísticas de un anillo, usando la teoría de pares de cotorsión. Los pares de cotorsión son análogos a los pares de torsión, donde el funtor Hom es reemplazado por Ext. Fueron introducidos por Luigi Salce [20] en la categoría de grupos abelianos y luego redescubiertos por Enochs en los años 90, esta vez en la categoría de los R-módulos por la derecha.

La conexión existente entre la teoría de pares de cotorsión y la teoría de aproximaciones establece [20] que si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión, es equivalente que todo módulo tenga una $\mathcal{B}$-preenvoltura especial a que todo módulo tenga una $\mathcal{A}$-precubierta especial. En este caso, se dice que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión completo. Uno de los hechos fundamentales sobre los pares de cotorsión, establecido por P. Eklof y J. Trlifaj [10], establece que cualquier par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ cogenerado por un conjunto de módulos es completo. Basándose en este resultado, Enochs demostró la conjetura de los módulos planos, conjetura que permaneció abierta por más de veinte años: todo módulo sobre un anillo cualquiera tiene una cubierta plana.

Por otra parte, existe una relación estrecha entre la existencia de preenvolturas y los módulos tilting. Un resultado de Angeleri-Hügel y F. Coelho [1] establece que bajo ciertas condiciones para una clase $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Mod}_R$, la existencia de $\mathcal{X}$-preenvolturas especiales para todos los módulos está ligada a la existencia de un módulo tilting de dimensión proyectiva finita. La teoría de módulos tilting fue introducida a prinicipios de la década de los 80 dentro del contexto de módulos finitamente generados sobre álgebras de Artin, por Brenner y Butler (ver [8]), y desde entonces, ha jugado un papel primordial dentro de la Teoría de las Representaciones de Álgebras. Más recientemente, Angeleri-Hügel y Trlifaj [6] presentan condiciones suficientes para la validez de la primera y la segunda conjetura de la dimensión finitística, esto lo hacen estudiando los pares de cotorsión completos cogenerados por $\mathcal{P}^{<\infty}$ (la clase de módulos finitamente presentados de dimensión proyectiva finita), por medio de la teoría de módulos tilting.

En el artículo “Homological dimensions in cotorsion pairs” que vamos a revisar, los autores vuelven a abordar la primera y la segunda conjetura de la dimensión finitística, pero en esta oportunidad desde el estudio de las dimensiones homológicas relativas en pares de cotorsión. Es decir, en vez de considerar toda la categoría Mod_R para calcular las dimensiones homológicas, restringen el funtor Ext a ciertas clases de módulos. Esta técnica había sido utilizada por primera vez por Auslander y Buchweitz en 1989 [7]. Más precisamente, si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión completo y hereditario y suponemos que la dimensión proyectiva relativa

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{mín}\{n \geq 0 : \mathrm{Ext}^j(-,-)|_{\mathcal{A}} = 0 \text{ para } j > n\}$$

es finita. Si $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M)$ es la dimensión de resolución de M con respecto a $\mathcal{A}$ entonces los autores obtienen el siguiente resultado principal:

Teorema 1. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión completo y hereditario en Mod_R. Asuma que $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$. Entonces:

(a) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}) \leq \mathrm{Findim}(R) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P})$.

(b) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}^{<\infty}) \leq \mathrm{findim}(R) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}^{<\infty})$.

Como consecuencia se obtiene un criterio para la validez de la segunda conjetura de la dimensión finitística:

Corolario 1. Sea R un anillo. Son equivalentes:

(a) $\mathrm{findim}(R) < \infty$.

(b) Existe un par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en Mod_R tal que $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$ y $\beta = \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}^{<\infty}) < \infty$.

(c) Cada par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en Mod_R con $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$ satisface $\beta = \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}^{<\infty}) < \infty$.

Un resultado similar caracteriza cuándo $\mathrm{Findim}(R) < \infty$. Más aún, se caracteriza la igualdad entre las dimensiones finitísticas grande y pequeña en términos del núcleo $\omega = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ para un cierto par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Esto se ve en el siguiente teorema:

Teorema 2. Sea R un anillo noetheriano por la derecha con $\mathrm{findim}(R) < \infty$. Considere el par de cotorsión $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ cogenerado por $\mathcal{P}^{<\infty}$, con núcleo ω. Entonces:

(a) $\mathrm{Findim}(R) - \mathrm{findim}(R) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P})$.

(b) $\mathrm{Findim}(R) = \mathrm{findim}(R)$ si, y sólo si, $\mathrm{pd}(\omega^{\wedge}) = \mathrm{pd}(\omega)$.

Finalmente, se demuestra que la dimensión finitística grande está acotada por las dimensiones homológicas de un módulo tilting:

Corolario 2. Sea T un módulo tilting en Mod_R. Si R es noetheriano entonces

$$\mathrm{Findim}(R) \leq \mathrm{pd}(T) + \mathrm{id}(T).$$

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera:

En el capítulo I se estudian una serie de resultados preliminares que tienen que ver con teoría de conjuntos, donde se presenta el principio de inducción transfinita. Además se estudia una propiedad muy importante del funtor Ext relacionada con la preservación de límites directos. Por último, se muestra un resultado muy conocido en el álgebra homológica, el “cambio de dimensión”.

En el capítulo II se definen los conceptos de dimensiones homológicas relativas, dimensiones de resolución y corresolución, clases ortogonales, clases resolubles y corresolubles, generadores y cogeneradores, precubiertas y preenvolturas, y pares de cotorsión. Probaremos el lema del Salce, un resultado que nos permite construir un diagrama conmutativo a partir de dos sucesiones exactas cortas, considerando el cuadrado cocartesiano de los monomorfismos de tales sucesiones. Este resultado nos permite demostrar que, en un par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, la existencia de $\mathcal{A}$-precubiertas especiales es equivalente a la existencia de $\mathcal{B}$-preenvolturas especiales. A partir de esta equivalencia se definen los pares de cotorsión completos, aquellos pares $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tales que todo módulo M tiene una $\mathcal{A}$-precubierta especial. También analizaremos algunas de las investigaciones hechas por Auslander y Buchweitz que tienen que ver con la noción de cogeneradores inyectivos. Sobre este punto, uno de los resultados más importantes a probar establece que, dada una clase de módulos $\mathcal{X}$ con un cogenerador inyectivo $\omega \subseteq \mathcal{X}$ y $X \in \mathcal{X}$, entonces la dimensión inyectiva de X con respecto a $\mathcal{X}$ es finita si, y sólo si, la dimensión de corresolución de X con respecto a ω es finita.

En el capítulo III estudiaremos una serie de resultados generales. Primero analizaremos la relación existente entre las dimensiones homológicas y las dimensiones de resolución y corresolución. Tal relación está dada por un teorema demostrado por C. Saenz y O. Mendoza en [16]. El teorema enuncia que, dadas dos clases de módulos $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ y un módulo L, la dimensión inyectiva de L con respecto a $\mathcal{X}$ está acotada por la suma de la dimensión inyectiva de $\mathcal{Y}$ con respecto a $\mathcal{X}$ más la dimensión de corresolución de L con respecto a $\mathcal{Y}$. Más aún, si $\mathcal{Y}$ es la 1-clase ortogonal derecha de $\mathcal{X}$, entonces la dimensión inyectiva de L respecto a $\mathcal{X}$ es mayor o igual a la dimensión de corresolución de L con respecto a $\mathcal{Y}$, y coinciden si ésta última es finita y la dimensión inyectiva de $\mathcal{Y}$ con respecto a $\mathcal{X}$ es cero. Después estudiaremos lo que ocurre con las dimensiones homológicas, de resolución y de corresolución cuando se consideran pares de cotorsión completos y hereditarios. Por ejemplo, cuando se tiene un par de cotorsión completo $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, se puede calcular la dimensión proyectiva (inyectiva) de un módulo M como el máximo entre las dimensiones proyectivas (inyectivas) de M con respecto a $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. También estudiaremos propiedades que ocurren cuando se considera el núcleo ω de un par de cotorsión completo y hereditario: los módulos de $\mathcal{A}$ con ω-dimensión de corresolución finita son aquellos que poseen dimensión inyectiva finita con respecto a $\mathcal{A}$, y viceversa. Para módulos M con ω-dimensión de resolución finita, se tiene que esta dimensión es igual a la dimensión proyectiva de M con respecto a $\mathcal{B}$.

En el capítulo IV se estudian los pares de cotorsión cogenerados por un conjunto de módulos. Demostraremos el teorema de Eklof-Trlifaj: todo par de cotorsión cogenerado por un conjunto de módulos es completo. Luego veremos algunos aspectos de la teoría de módulos tilting. Es en esta parte donde demostraremos el teorema de Angeleri-Hügel y Coelho, que establece que la existencia de $\mathcal{X}$-precubiertas para cualquier módulo es equivalente a la existencia de un módulo tilting T tal que $\mathcal{X}$ es la clase ortogonal derecha de T. Este teorema nos permite caracterizar los pares de cotorsión tilting ($\mathcal{B}$ es la clase ortogonal derecha de un módulo tilting T) como aquellos pares completos y hereditarios tales que la clase $\mathcal{A}$ tiene dimensión proyectiva finita con respecto a sí misma y cuyo núcleo es cerrado bajo sumas directas.

Comenzamos el capítulo V dando estimaciones para las dimensiones finitísticas grande y pequeña. Tales estimaciones están dadas por el Teorema 1. Luego estudiaremos las clases cerradas syzygy y cerradas cosyzygy. La clase $\mathcal{P}^{<\infty}$ es un ejemplo de una clase cerrada syzygy. Esta clase fue usada por Angeleri-Hügel y Trlifaj para probar que $\text{findim}(R) < \infty$ si, y sólo si, existe un módulo tilting T tal que $\mathbb{B}$ es la clase ortogonal derecha de T. Tal resultado conduce al Teorema 2. También probaremos el Corolario 1 junto con una versión análoga para $\text{Findim}(R)$. En resumen, en este capítulo damos algunas condiciones para que las conjeturas de la dimensiones finitísticas sean válidas. Además, presentaremos los ejemplos de Huisgen-Zimmermann y Smalø que muestran cómo falla la primera conjetura de la dimensión finitística.

Es importante que el lector tenga algunos conocimientos básicos de álgebra homológica.

Una buena referencia para repasar aspectos de este tema es el libro “An Introduction to Homological Algebra” de Joseph Rotman. Otros libros consultados para la realización de este trabajo son: “Relative Homological Algebra” (por E. E. Enochs y O. M. G. Jenda), y “Approximations and Endomorphism Algebras of Modules” (por R. Göbel y J. Trlifaj).

Capítulo I
PRELIMINARES

En este capítulo presentamos algunas nociones básicas de la teoría de conjuntos: preorden, orden parcial, ordinal y límite ordinal, junto con el principio de inducción transfinita. Tal principio de la teoría de conjuntos vale en la categoría de los R-módulos por la derecha, porque dicha categoría es concreta, es decir, sus objetos son conjuntos y sus morfismos son funciones. Luego se exponen los conceptos de sistemas directos y límites directos, veremos que el funtor Ext preserva límites directos bajo ciertas hipótesis. Para finalizar, mostramos un resultado básico dentro del álgebra homológica, conocido como el "cambio de dimensión".

1.1 Teoría de conjuntos

Para poder entender lo que dice el principio de inducción transfinita, necesitamos saber lo que son conjuntos parcialmente ordenados, bien ordenados, números ordinales y límites ordinales.

Definición 1.1.1. Sea A un conjunto y $\lhd$ una relación binaria definida en A. $\lhd$ es un **orden parcial** si:

(1) $\lhd$ es reflexiva.

(2) $\lhd$ es transitiva.

(3) $\lhd$ es antisimétrica.

Si $\lhd$ cumple con (1) y (2), se denomina **preorden**. Un conjunto A con un orden parcial (preorden) definido en A se llama **conjunto ordenado (preordenado)**, y suele denotarse como el par $(A, \lhd)$.

Definición 1.1.2. Un conjunto parcialmente ordenado A se dice **bien ordenado** (o un **ordinal**) si cada subconjunto no vacío $B \subseteq A$ tiene un primer elemento; es decir, para cada $B \neq \emptyset$, existe $b_0 \in B$ tal que $b_0 \lhd b$ para cada $b \in B$.

Definición 1.1.3. Si A es un conjunto bien ordenado, entonces un subconjunto $B \subseteq A$ es un **segmento** si $y \lhd x$ y $x \in B$ implica que $y \in B$.

Definición 1.1.4. Sean A y B conjuntos bien ordenados. Decimos que $\text{Ord}(A) = \text{Ord}(B)$ si A y B son isomorfos, es decir, si existe una biyección entre A y B. $\text{Ord}(A) < \text{Ord}(B)$ si A es isomorfo a un segmento propio de B.

Definición 1.1.5. Un número ordinal $\alpha > 0$ con $\alpha = \text{Ord}(A)$ es un **límite ordinal** de A si A no posee elemento máximo, es decir, no existe $x \in A$ tal que $y \lhd x$ para todo $y \in A$. Si $\alpha = \text{Ord}(A)$ y $\beta = \text{Ord}(B)$, donde A y B son conjuntos bien ordenados tales que $A \cap B = \emptyset$, definimos $\alpha + \beta = \text{Ord}(A \cup B)$, donde $A \cup B$ está ordenado de la siguiente manera: $x \lhd y$, para todo $x \in A$ y $y \in B$; y los órdenes inducidos en A y B son sus órdenes originales.
Equivalentemente, $\alpha > 0$ es un límite ordinal si, y sólo si, $\alpha \neq \beta + 1$ para cada ordinal β.

El siguiente resultado se conoce como el principio de inducción transfinita, el cual sirve para demostrar proposiciones que dependen de un número ordinal. Este principio es más general que el principio de inducción matemática.

Proposición 1.1.1 (Principio de inducción transfinita)**.** Si $\beta \geq 0$ es un número ordinal, sea $A = \{\alpha : \ \alpha \text{ es un ordinal y } \alpha < \beta\}$. Sea $B \subseteq A$. Si

(1) $0 \in B$,

(2) $\alpha + 1 < \beta$ y $\alpha \in B \Longrightarrow \alpha + 1 \in B$, y

(3) $\gamma < \beta$ es un límite ordinal y $\alpha \in B$ para todo $\alpha < \gamma \Longrightarrow \gamma \in B$,

entonces $B = A$.

Demostración. Ver [11, Proposición 1.1.8]. $\square$

La prueba de los siguientes resultados puede verse en [11, Lema 7.3.1 y Corolario 7.3.2].

Lema 1.1.1. Dado un conjunto A, existe un límite ordinal λ tal que si $\{\alpha_a\}_{a \in A}$ es una familia de ordinales con $\alpha_a < \lambda$ para todo $a \in A$, entonces existe un ordinal $\lambda' < \lambda$ tal que $\alpha_a \leq \lambda'$.

Corolario 1.1.1. Dado A un conjunto y λ como en el lema anterior. Si $\{B_\alpha\}_{\alpha < \lambda}$ es una familia de subconjuntos de B tal que $B_\alpha \subseteq B_\beta$ cuando $\alpha \leq \beta < \lambda$ y tal que $B = \bigcup_{\alpha < \lambda} B_\alpha$, entonces para cualquier función $f : A \longrightarrow B$ existe $\alpha < \lambda$ tal que $f(A) \subseteq B_\alpha$.

Observación 1.1.1. Del corolario anterior, tenemos que cualquier función $f : A \longrightarrow B$ tiene una descomposición $A \longrightarrow B_\alpha \longrightarrow B$ con $\alpha < \lambda$ y $B_\alpha \longrightarrow B$ la inclusión canónica. Aplicaremos esto cuando A y B son módulos, f es un homomorfismo de módulos y todo $B_\alpha \subseteq B$ es un submódulo de B.

1.2 Límites directos

En esta sección presentamos el concepto de límite directo, su importancia radica en una propiedad del funtor Ext sobre la preservación de límites directos bajo ciertas hipótesis.

Definición 1.2.1. Sea $(I, \lhd)$ un **conjunto dirigido**, es decir, I es un conjunto parcialmente ordenado tal que para cada $i, j \in I$ existe $k \in I$ con $i, j \lhd k$. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de R-módulos por la derecha y suponga que para cada par $i, j \in I$ con $i \lhd j$ existe un R-homomorfismo $f_{ji} : M_i \longrightarrow M_j$ tal que

(a) $f_{ii} = 1_{M_i}$ para cada $i \in I$,

(b) si $i \lhd j \lhd k$, entonces $f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$,

entonces diremos que los R-módulos M_i junto con los morfismos f_{ji} forman un **sistema directo**, el cual denotaremos por $\{\{M_i\}, \{f_{ji}\}\}$.

Definición 1.2.2. El **límite directo** de un sistema directo $\{\{M_i\}, \{f_{ji}\}\}$ de R-módulos por la derecha es un R-módulo por la derecha M con R-homomorfismos $g_i : M_i \longrightarrow M$, $i \in I$, tales que

(a) $g_i = g_j \circ f_{ji}$ si $i \lhd j$,

(b) si $\{N, \{h_i\}\}$ es otro par que satisface (a), entonces existe un único R-homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ tal que $f \circ g_i = h_i$ para todo $i \in I$.

Denotaremos el límite directo $\{M, \{g_i\}\}$ por $\varinjlim M_i$.

Es fácil ver que el límite directo es único salvo isomorfismos.

Teorema 1.2.1. El límite directo de un sistema directo de R-módulos por la derecha siempre existe.

Demostración. Ver [11, Teorema 1.5.3]. $\square$

Ejemplo 1.2.1.

1. Sea M un R-módulo por la derecha. Para cualquier conjunto dirigido I, sea $M_i = M$ para cada $i \in I$ y $f_{ji} = 1_M$ para todo $i \lhd j$. Entonces $\{\{M\}, \{1_M\}\}$ es un sistema directo, llamado **sistema directo constante**. En este caso, $\varinjlim M_i = M$.

2. Sea I un conjunto dirigido, M un R-módulo por la derecha y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de M tal que para cada par $i, j \in I$, existe $k \in I$ con $M_i + M_j \subseteq M_k$. Fijemos $i \lhd j$ si $M_i \subseteq M_j$ y sea $f_{ji} : M_i \longrightarrow M_j$ la inclusión. Entonces, $\{\{M_i\}, \{f_{ji}\}\}$ es un sistema directo y $\varinjlim M_i = \bigcup_I M_i$.

3. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos por la derecha. Entonces
$$\bigoplus_{i\in I} M_i \cong \varinjlim(M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_k}),$$
el límite directo sobre todas las sumas parciales finitas.

Definición 1.2.3. Un R-módulo por la derecha M es **finitamente presentado** si existe una sucesión exacta $F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ donde F_0 y F_1 son R-módulos por la derecha libres y finitamente generados.

Definición 1.2.4. Un anillo R es **coherente por la derecha** si todo ideal derecho finitamente generado de R es finitamente presentado, o equivalentemente, todo submódulo finitamente generado de un R-módulo por la derecha finitamente presentado es finitamente presentado.

Teorema 1.2.2. Sea R un anillo coherente por la derecha, M un R-módulo finitamente presentado, y $\varinjlim N_j$ un límite directo de R-módulos. Entonces,

$$\operatorname{Ext}^i(M, \varinjlim N_j) \cong \varinjlim \operatorname{Ext}^i(M, N_j),$$

para todo $i \geq 0$.

Demostración. Ver [11, Lema 10.2.4]. $\square$

Observación 1.2.1. Este teorema, combinado con el ejemplo 3, da como resultado que $\operatorname{Ext}(M, -)$ preserva sumas directas si M es finitamente presentado.

1.3 Cambio de dimensión

La demostración del teorema conocido como "cambio de dimensión" ("dimension shifting") puede verse en [17, Proposición 4.2].

Teorema 1.3.1 (Cambio de dimensión)**.** Sea

$$0 \longrightarrow D \longrightarrow N_0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_{m-1} \longrightarrow D' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta y $d \geq 0$. Entonces:

(a) Si $\operatorname{Ext}^j(N_i, -) \equiv 0$ para todo i y $j > d$, entonces $\operatorname{Ext}^k(D, M) \cong \operatorname{Ext}^{k+m}(D', M)$, para todo R-módulo por la derecha M, y $k > d$.

(b) Si $\operatorname{Ext}^j(-, N_i) \equiv 0$ para todo i y $j > d$, entonces $\operatorname{Ext}^k(M, D') \cong \operatorname{Ext}^{k+m}(M, D)$, para todo R-módulo por la derecha M, y $k > d$.

Capítulo 2
ÁLGEBRA HOMOLÓGICA RELATIVA

En este capítulo se estudian las dimensiones homológicas (proyectivas e inyectivas) de módulos, que se calculan restringiendo el funtor Ext a ciertas clases de módulos. Entre esas clases están la de los módulos proyectivos (inyectivos), la de los módulos con dimensión proyectiva (inyectiva) finita, así como algunas subclases de éstas. Además, se estudia la clase de módulos con dimensión de resolución (corresolución) finita con respecto a otra clase. Se analizan los conceptos de generador y cogenerador, que son clases que proveen cierto tipo de aproximaciones. También son objeto de nuestro estudio las precubiertas y preenvolturas, así como las clases resolubles y corresolubles. Para finalizar, se definen los pares de cotorsión (completos y hereditarios).

En lo que sigue, R va a ser un anillo asociativo con identidad. Mod_R es la categoría de los R-módulos por la derecha. Cuando hablemos de un módulo M nos referimos a un R-módulo por la derecha. Cuando hablemos de morfismos nos referimos a homomorfismos entre R-módulos por la derecha. Sólo trabajaremos con subcategorías plenas de Mod_R.

Denotamos por mod_R la subcategoría de los módulos que poseen una resolución proyectiva compuesta por módulos finitamente generados. Esta subcategoría tiene otras caracterizaciones dependiendo de cómo sea el anillo R. Es un hecho conocido que si R es un anillo coherente por la derecha entonces mod_R es la clase de los módulos finitamente presentados. Otro hecho importante es que si R en un anillo noetheriano por la derecha entonces todo módulo es finitamente generado si, y sólo si, es finitamente presentado. Entonces,

mod_R es la clase de los módulos finitamente generados cuando R es un anillo noetheriano. Estas observaciones pueden estudiarse con más detalle en [11, 3.2].

2.1 Clases especiales

A continuación usaremos el concepto de dimensión proyectiva e inyectiva para definir las siguientes clases.

Definición 2.1.1. Sea n un entero no negativo, se define:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_n &= \{X \in \mathrm{Mod}_R : \mathrm{pd}(X) \leq n\}, \\
\mathcal{P}_n^{<\infty} &= \mathcal{P}_n \cap \mathrm{mod}_R, \\
\mathcal{P} &= \{X \in \mathrm{Mod}_R : \mathrm{pd}(X) < \infty\}, \\
\mathcal{P}^{<\infty} &= \mathcal{P} \cap \mathrm{mod}_R.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_n &= \{X \in \mathrm{Mod}_R : \mathrm{id}(X) \leq n\}, \\
\mathcal{I}_n^{<\infty} &= \mathcal{I}_n \cap \mathrm{mod}_R, \\
\mathcal{I} &= \{X \in \mathrm{Mod}_R : \mathrm{id}(X) < \infty\}, \\
\mathcal{I}^{<\infty} &= \mathcal{I} \cap \mathrm{mod}_R.
\end{aligned}$$

La prueba de la siguiente proposición es inmediata.

Proposición 2.1.1.

(a) $\mathcal{P}_0$ es la clase de los módulos proyectivos.

(b) $\mathcal{I}_0$ es la clase de los módulos inyectivos.

Definición 2.1.2. Sea $\mathcal{X}$ una subcategoría de Mod_R. Definimos la **clase aditiva** de $\mathcal{X}$ como la clase de todos los módulos isomorfos a sumandos directos de sumas directas de elementos de $\mathcal{X}$. Tal clase la denotaremos por $\mathrm{Add}(\mathcal{X})$.

Sea i un entero positivo, se definen:

1. La i**-clase ortogonal derecha** de $\mathcal{X}$ como:
$$\mathcal{X}^{\perp_i} := \{M \in \mathrm{Mod}_R : \mathrm{Ext}^i(-, M)|_{\mathcal{X}} \equiv 0\}.$$
2. La **clase ortogonal derecha** de $\mathcal{X}$ como:
$$\mathcal{X}^{\perp} := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}^{\perp_i}.$$
3. La i**-clase ortogonal izquierda** de $\mathcal{X}$ como:
$$^{\perp_i}\mathcal{X} := \{M \in \mathrm{Mod}_R : \mathrm{Ext}^i(M, -)|_{\mathcal{X}} \equiv 0\}.$$
4. La **clase ortogonal izquierda** de $\mathcal{X}$ como:
$$^{\perp}\mathcal{X} := \bigcap_{i=1}^{\infty} {}^{\perp_i}\mathcal{X}.$$

Observación 2.1.1. Nótese que para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, se tiene que $\mathcal{X} \subseteq {}^{\perp_1}(\mathcal{X}^{\perp_1})$ y $\mathcal{X} \subseteq ({}^{\perp_1}\mathcal{X})^{\perp_1}$. Además, $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2$ implica que ${}^{\perp_1}\mathcal{X}_2 \subseteq {}^{\perp_1}\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2^{\perp_1} \subseteq \mathcal{X}_1^{\perp_1}$. De todo esto se sigue que $({}^{\perp_1}(\mathcal{X}^{\perp_1}))^{\perp_1} = \mathcal{X}^{\perp_1}$ y ${}^{\perp_1}(({}^{\perp_1}\mathcal{X})^{\perp_1}) = {}^{\perp_1}\mathcal{X}$.

Definición 2.1.3. Sea $\mathcal{X}$ una subcategoría de Mod_R.

(a) $\mathcal{X}$ es **cerrada bajo extensiones** si para cada sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0,$$

con X' y X'' en $\mathcal{X}$, se tiene que X está en $\mathcal{X}$.

(b) $\mathcal{X}$ es **cerrada bajo núcleos de epimorfismos** si para cada epimorfismo $f : X \longrightarrow Y$, con $X, Y \in \mathcal{X}$, se tiene que $\ker(f)$ está en $\mathcal{X}$.

(b)* $\mathcal{X}$ es **cerrada bajo conúcleos de monomorfismos** si para cada monomorfismo $f : X \longrightarrow Y$, con X y Y en $\mathcal{X}$, se tiene que $\operatorname{coker}(f)$ está en $\mathcal{X}$.

(c) $\mathcal{X}$ (respectivamente, $\mathcal{X}$ subcategoría de mod_R) es **resoluble** si satisface (a) y (b), y si contiene todos los módulos proyectivos (respectivamente, todos los módulos proyectivos finitamente generados).

(c)* $\mathcal{X}$ (respectivamente, $\mathcal{X}$ subcategoría de mod_R) es **corresoluble** si satisface (a) y (b)*, y si contiene todos los módulos inyectivos (respectivamente, todos los módulos inyectivos finitamente generados).

La siguiente proposición nos muestra que, sobre ciertas clases, basta que Ext^1 se anule para que también se anule Ext^j.

Proposición 2.1.2. Sea M un módulo.

(a) Si $\mathcal{A}$ es una clase cerrada bajo núcleos de epimorfismos que contiene los módulos proyectivos, y $\operatorname{Ext}^1(-, M)|_{\mathcal{A}} \equiv 0$, entonces $\operatorname{Ext}^j(-, M)|_{\mathcal{A}} \equiv 0$, para todo $j > 1$.

(b) Si $\mathcal{B}$ es una clase cerrada bajo conúcleos de monomorfismos que contiene los módulos inyectivos, y $\operatorname{Ext}^1(M, -)|_{\mathcal{B}} \equiv 0$, entonces $\operatorname{Ext}^j(M, -)|_{\mathcal{B}} \equiv 0$, para todo $j > 1$.

Demostración. Sólo probaremos (a), la prueba de (b) es dual.

Sea $A \in \mathcal{A}$. Sabemos que existe una sucesión exacta $P \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$, con P proyectivo. Por hipótesis, $P \in \mathcal{A}$. Como f es un epimorfismo, se tiene por hipótesis que $K = \ker(f) \in \mathcal{A}$. La exactitud de la sucesión

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{in} P \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0,$$

y el hecho de que P es proyectivo implican que $\mathrm{Ext}^n(K, M) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}(A, M)$. En particular, $0 = \mathrm{Ext}^1(K, M) \cong \mathrm{Ext}^2(A, M)$, porque $K \in \mathcal{A}$. Inductivamente, se prueba que $\mathrm{Ext}^j(A, M) = 0$ para $j > 2$. □

Nótese que el resultado anterior vale para clases resolubles (corresolubles). La siguiente proposición nos da ejemplos muy importantes de subcategorías resolubles y corresolubles.

Proposición 2.1.3. $\mathcal{P}$ y ${}^{\perp}\mathcal{X}$ son subcategorías resolubles. Dualmente, $\mathcal{I}$ y $\mathcal{X}^{\perp}$ son subcategorías corresolubles.

Demostración. Probemos primero que $\mathcal{P}$ es resoluble. Sea

$$0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta tal que $\mathrm{pd}(P') = n_1 < \infty$ y $\mathrm{pd}(P'') = n_2 < \infty$. Luego,

$$\mathrm{Ext}^i(P', M) = 0, \text{ para todo } i > n_1 \text{ y para todo módulo } M,$$

$$\mathrm{Ext}^i(P'', M) = 0, \text{ para todo } i > n_2 \text{ y para todo módulo } M.$$

Sea $n = \max\{n_1, n_2\}$ y supongamos que $i > n$. Usando la segunda sucesión exacta larga para el funtor Ext, tenemos:

$$\mathrm{Ext}^i(P'', M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(P, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(P', M).$$

Pero los dos extremos de este tramo de la sucesión son iguales a 0 porque $i > n$. Entonces por la exactitud de la sucesión se tiene que $\mathrm{Ext}^i(P, M) = 0$ para todo $i > n$ y para todo módulo M. De donde $\mathrm{pd}(P) \leq n$, es decir, P está es $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ es cerrada bajo extensiones.

Sea $f : P \longrightarrow P'$ un epimorfismo tal que $\mathrm{pd}(P) = n_1 < \infty$ y $\mathrm{pd}(P') = n_2 < \infty$. Sea $K = \ker(f)$. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{in} P \xrightarrow{f} P' \longrightarrow 0,$$

donde in es la inclusión.

Nuevamente tomamos $n = \max\{n_1, n_2\}$ y supongamos $i > n$. Sea M un módulo. Usando nuevamente la segunda sucesión exacta larga de Ext, nos queda

$$\mathrm{Ext}^i(P, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(K, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(P', M).$$

Sabemos que $\mathrm{Ext}^i(P, M) = 0$ y $\mathrm{Ext}^{i+1}(P', M) = 0$ porque $i > n_1$ e $i > n_2$. Luego, por la exactitud de la sucesión, tenemos $\mathrm{Ext}^i(K, M) = 0$ si $i > n$, para todo módulo M. De donde $\mathrm{pd}(K) \leq n$, es decir, K está en $\mathcal{P}$.

Es claro que $\mathcal{P}$ contiene los módulos proyectivos. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es una subcategoría resoluble.

La prueba de que ${}^{\perp}\mathcal{X}$ es resoluble es análoga. Por el principio de dualidad se tiene que $\mathcal{I}$ y $\mathcal{X}^{\perp}$ son corresolubles. $\square$

2.2 Dimensiones homológicas relativas

En esta sección definiremos y estudiaremos la noción base de este trabajo, el de dimensión homológica relativa. Lo importante aquí es un resultado que nos permite acotar tales dimensiones cuando se tienen sucesiones exactas cortas, además de la propiedad que nos permite intercambiar la dimensión proyectiva por la inyectiva, o viceversa.

Definición 2.2.1. Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos y M un módulo. Se define:

(a) $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M) := \inf\{n \geq 0 : \mathrm{Ext}^j(M, -)|_{\mathcal{X}} \equiv 0, \text{ para cualquier } j > n\}$ como la **dimensión proyectiva de M relativa a $\mathcal{X}$**, (a)* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) := \text{ínf}\{n \geq 0 : \mathrm{Ext}^j(-, M)|_{\mathcal{X}} \equiv 0, \text{ para cualquier } j > n\}$ como la **dimensión inyectiva de M relativa a $\mathcal{X}$**.

Si $\mathcal{Y}$ es una clase de módulos, se define:

(b) $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \sup\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\}$ como la **dimensión proyectiva de $\mathcal{Y}$ relativa a $\mathcal{X}$**,

(b)* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \sup\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\}$ como la **dimensión inyectiva de $\mathcal{Y}$ relativa a $\mathcal{X}$**.

Lema 2.2.1. Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases en Mod R. Entonces

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}).$$

Más aún, para cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

en Mod_R, tenemos:

(a) $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M) \leq \text{máx}\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M'), \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M'')\}$,

(a)* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) \leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M'), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M'')\}$,

(b) $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M') \leq \text{máx}\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M), \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M'') - 1\}$,

(b)* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M'') \leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M') - 1\}$,

(c) $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M'') \leq \text{máx}\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M), \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M') + 1\}$,

(c)* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M') \leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M'') + 1\}$.

Demostración. Sólo probaremos (c), pues (a) y (b) se prueban de forma análoga. Las pruebas de (a)*, (b)* y (c)* son duales.

Por definición sabemos que

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \sup\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\} \text{ y}$$

$$\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = \sup\{\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(X) : X \in \mathcal{X}\}.$$

Sea $Y \in \mathcal{Y}$. $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(Y) = \text{ínf}\{n \geq 0 : \mathrm{Ext}^j(Y,-)|_{\mathcal{X}} \equiv 0, \text{ para todo } j > n\}$. Supongamos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(Y) < \infty$, el resultado es inmediato si se considera el caso contrario. Así, $\mathrm{Ext}^j(Y,X) = 0$, para todo $j > \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(Y)$, para todo $X \in \mathcal{X}$. Supongamos $j > \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$. Entonces, $j > \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(Y)$ porque $Y \in \mathcal{Y}$. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^j(Y,X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}$, con $j > \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(Y)$. En particular, $\mathrm{Ext}^{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})+1}(Y,X) = 0$, para todo $X \in \mathcal{X}$. Como esta igualdad no depende de Y, tenemos $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + 1 > \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(X)$, para todo $X \in \mathcal{X}$. Tomando el supremo del lado derecho nos queda $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + 1 > \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$, es decir, $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) \geq \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$. De manera análoga se prueba que $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) \geq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$. Por lo tanto, $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$.

Ahora probemos (c). Sea $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M) = n$, $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M') = m$ y $X \in \mathcal{X}$. Hagamos un análisis por casos:

(I) $n \leq m+1$: tenemos $\mathrm{Ext}^{n+1}(M,X) = 0$ y $\mathrm{Ext}^{m+1}(M',X) = 0$. Como $m+1 \geq n$, se tiene que $\mathrm{Ext}^{m+2}(M,X) = 0$. Usando la segunda sucesión exacta larga del funtor Ext, se tiene:

$$\mathrm{Ext}^{m+1}(M',X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{m+2}(M'',X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{m+2}(M,X).$$

Por la exactitud de la sucesión anterior se tiene que $\mathrm{Ext}^{m+2}(M'',X) = 0$. De donde, $\mathrm{Ext}^{m+2}(M'',-)|_{\mathcal{X}} \equiv 0$. Entonces, $m+2 > \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M'')$. Es decir, $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M'') \leq m+1$.

(II) $n \geq m+1$: esto implica que $\mathrm{Ext}^{n}(M',X) = 0$, sin olvidar que $\mathrm{Ext}^{n+1}(M,X) = 0$. Nuevamente usamos la segunda sucesión exacta larga del funtor Ext:

$$\mathrm{Ext}^{n}(M',X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}(M'',X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}(M,X).$$

Y por la exactitud de la sucesión anterior tenemos $\mathrm{Ext}^{n+1}(M'',X) = 0$. Luego, $\mathrm{Ext}^{n+1}(M'',-)|_{\mathcal{X}} \equiv 0$. De donde, $n+1 > \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M'')$. Así pues, $n \geq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M'')$.

De los casos anteriores concluímos que

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M'') \leq \text{máx}\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M), \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M') + 1\}.$$

□

2.3 Dimensiones de resolución y corresolución

Ahora nos toca estudiar otro tipo de dimensión homológica, la llamada dimesión de resolución. Conocemos las palabras resolución y corresolución del álgebra homológica básica cuando estudiamos los módulos proyectivos e inyectivos, sabemos que todo módulo tiene una resolución proyectiva y una corresolución inyectiva, las cuales van a ser sucesiones exactas infinitas compuestas por módulos proyectivos e inyectivos, respectivamente. De esto es natural pensar que el concepto de dimensión de resolución tenga que ver con la existencia de ciertas sucesiones exactas. Tal concepto es relativo, es decir, se define a partir de una clase de módulos. La dimensión de resolución de un módulo M no es más que la longitud de una sucesión exacta que parte de M y cuyos demás miembros pertenecen a cierta clase de módulos. El concepto dual es el de dimensión de corresolución. Para ser más precisos, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.3.1. Sea M un módulo, $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases de módulos.

(a) La **$\mathcal{X}$-dimensión de corresolución de** M, que denotaremos por $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(M)$, es el menor entero no negativo n tal que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \longrightarrow 0,$$

con $X_i \in \mathcal{X}$, donde $0 \leq i \leq n$. Si tal n no existe, entonces diremos que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(M) = \infty$. También se define la **$\mathcal{X}$-dimensión de corresolución de $\mathcal{Y}$**,

$$\mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \sup\{\mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\}.$$

(a)* La **$\mathcal{X}$-dimensión de resolución de** M, que denotaremos por $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M)$, es el menor entero no negativo n tal que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{g_{n-1}} \cdots \xrightarrow{g_1} X_1 \xrightarrow{g_0} X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

con $X_i \in \mathcal{X}$, donde $0 \leq i \leq n$. Si tal n no existe, entonces diremos que $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) = \infty$. También se define la **$\mathcal{X}$-dimensión de resolución de $\mathcal{Y}$**,

$$\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \sup\{\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\}.$$

(b) Denotamos por $\mathcal{X}^{\vee}$ la clase de los módulos cuya $\mathcal{X}$-dimensión de corresolución es finita.

(b)* Denotamos por $\mathcal{X}^{\wedge}$ la clase de los módulos cuya $\mathcal{X}$-dimensión de resolución es finita.

Con respecto a la definición anterior, tenemos la siguiente propiedad.

Lema 2.3.1. $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{X}}(\operatorname{Im}(f_0)) = n-1$ y $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(\operatorname{Im}(g_0)) = n-1$.

Demostración. Considerando el módulo $\operatorname{Im}(f_0)$, es claro que la sucesión

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im}(f_0) \xrightarrow{in} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \longrightarrow 0$$

es exacta. Sólo podemos asegurar que $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{X}}(\operatorname{Im}(f_0)) \geq n-1$. Supongamos que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im}(f_0) \xrightarrow{f_0'} X_0' \xrightarrow{f_1'} \cdots \xrightarrow{f_m'} X_m' \longrightarrow 0,$$

con $m > n-1$. Considere la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X_0 \xrightarrow{f_0} \operatorname{Im}(f_0) \longrightarrow 0.$$

Podemos conectar las dos últimas sucesiones anteriores para obtener la sucesión

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X_0 \xrightarrow{f_0' \circ f_0} X_0' \xrightarrow{f_1'} \cdots \xrightarrow{f_m'} X_m' \longrightarrow 0.$$

Es claro que la sucesión anterior es exacta. Entonces $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{X}}(M) > n$, lo cual es falso. Por lo tanto, $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{X}}(\operatorname{Im}(f_0)) = n$. La otra igualdad es el resultado dual. $\square$

2.4 Generadores y cogeneradores

Esta sección está dedicada al estudio de una serie de resultados establecidos por M. Auslander y R. O. Buchweitz en [7]. La mayoría de ellos establecen relaciones importantes entre la dimensión inyectiva y la dimensión de resolución cuando se trabaja sobre ciertas clases especiales llamadas cogeneradores (o generadores en el caso dual). El resultado más importante establece que cada módulo $X \in \mathcal{X}$ tiene dimensión inyectiva finita respecto a $\mathcal{X}$ si, y sólo si, tiene dimensión de corresolución finita respecto a ω, donde ω es un cogenerador inyectivo de $\mathcal{X}$.

Definición 2.4.1. Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos y $\omega \subseteq \mathcal{X}$. ω es un **cogenerador** (**generador**) para $\mathcal{X}$ si para cada objeto $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow W \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

$$(0 \longrightarrow Y \longrightarrow W \longrightarrow X \longrightarrow 0),$$

con $W \in \omega$ e $Y \in \mathcal{X}$.

Recordemos la definición de cuadrado cocartesiano para Mod_R.

Definición 2.4.2. Sean $f : M \longrightarrow N$ y $g : M \longrightarrow N'$ dos homomorfismos de módulos. El **cuadrado cocartesiano** de f y g es la terna (G, u, v), donde $G = N \times N'/G'$, $G' = \{(f(x), -g(x)) : x \in M\}$, $u : N \longrightarrow G$ es el homomorfismo dado por $u(y) = (y, 0) + G'$, y $v : N' \longrightarrow G$ es el homomorfismo dado por $v(z) = (0, z) + G'$.

Observación 2.4.1. Notése que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[d, "u"] \\
N' \arrow[r, "v"'] & G
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo.

Lema 2.4.1. Si f y g son monomorfismos, entonces u y v también.

Demostración. Sólo probaremos que u es monomorfismo. La prueba para v es análoga. Sea $y \in N$ tal que $u(y) = 0$. Luego, $(y, 0) \in G'$. De donde existe $x \in M$ tal que $y = f(x)$ y $0 = -g(x)$. Como g es un monomorfismo, se tiene $x = 0$. De donde $y = f(x) = 0$. $\square$

El siguiente lema es conocido como el lema de Salce, nos permite construir diagramas conmutativos a partir de sucesiones exactas cortas usando la noción de cuadrado cocartesiano.

Lema 2.4.2 (L. Salce)**.** Dadas las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \text{ y } 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C' \longrightarrow 0,$$

entonces existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \beta'} & & \downarrow & & & & \\
 & & C' & \xrightarrow{1} & C' & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

cuyas filas y columnas son sucesiones exactas.

Demostración. Consideremos el cuadrado cocartesiano de α y α', es decir, la terna $(G, u : B \longrightarrow G, v : B' \longrightarrow G)$ donde $G = B \times B'/G'$, $G' = \{(\alpha(a), -\alpha'(a)) : a \in A\}$, u es el morfismo dado por $u(b) = (b, 0) + G'$, y v es el morfismo dado por $v(b') = (0, b') + G'$. Ya sabemos del lema anterior que u y v son monomorfismos.

Como la primera sucesión es exacta, se tiene que $b \circ \alpha = 0$. Y es claro que $0 \circ \alpha' = 0$. Luego, por la propiedad universal del cuadrado cocartesiano, existe un único homomorfismo $\delta : G \longrightarrow C$ tal que $\beta = \delta \circ u$. De forma análoga se construye un homomorfismo $\gamma : G \longrightarrow C'$ tal que $\beta' = \gamma \circ v$.

Veamos que δ y γ son epimorfismos. Sea $c \in C$. Como β es un epimorfismo, existe $b \in B$ tal que $c = \beta(b) = \delta \circ u(b) = \delta(u(b))$. Entonces δ es un epimorfismo. De manera análoga se prueba que γ es un epimorfismo.

Ahora probemos que ker(δ) =Im(v). Sea $(b, b') + G' \in \text{Im}(v)$. Entonces existe $\bar{b} \in B'$ tal que $(b,b')+G' = v(\bar{b}) = (0,\bar{b})+G'$. Luego,

$$\begin{aligned}
\delta((b,b')+G') &= \delta((0,\bar{b})+G') \\
&= \delta(((0,0)+G')+((0,\bar{b})+G')) \\
&= \delta((0,0)+G')+\delta((0,\bar{b})+G') \\
&= 0+\delta(v(\bar{b})) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Es decir, $(b,b')+G' \in \ker(\delta)$.

Sea $(b,b')+G' \in \ker(\delta)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
0 &= \delta((b,b')+G') \\
&= \delta(((b,0)+G')+((0,b')+G')) \\
&= \delta((b,0)+G')+\delta((0,b')+G') \\
&= \delta(u(b))+\delta(v(b')) \\
&= \beta(b)+0 \\
&= \beta(b).
\end{aligned}$$

Luego, como la primera sucesión es exacta, existe $a \in A$ tal que $b = \alpha(a)$. Ahora, sea $\bar{b} = \alpha'(a)$. Así, $v(b'-\bar{b}) = (b,b')+G'$. Es decir, $(b,b')+G' \in \mathrm{Im}(v)$.

Por lo tanto, $\ker(\delta) = \mathrm{Im}(v)$. De manera análoga se prueba que $\ker(\gamma) = \mathrm{Im}(u)$.

Con lo que hemos probado hasta el momento, podemos construir el diagrama conmutativo con filas y columnas exactas que aparece en el enunciado. $\square$

Observación 2.4.2. También vale el dual del Lema de Salce, que establece la construcción de un diagrama conmutativo a partir de dos sucesiones exactas cortas usando el cuadrado cartesiano de los epimorfismos de ambas sucesiones.

En lo que sigue de esta sección, ω es un cogenerador de $\mathcal{X}$, donde $\mathcal{X}$ es una clase de módulos cerrada bajo isomorfismos, extensiones y sumandos directos. ω también se considera cerrada bajo sumandos directos.

Lema 2.4.3. Dadas las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \longrightarrow C \longrightarrow 0 \text{ y } 0 \longrightarrow K \longrightarrow Y \longrightarrow X' \longrightarrow 0,$$

con $X, X' \in \mathcal{X}$ y $Y \in \omega^\wedge$. Entonces en el diagrama del cuadrado cocartesiano

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
 & X' \arrow[r, "1"] \arrow[d] & X' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

la sucesión exacta $0 \longrightarrow Y \longrightarrow U \longrightarrow C \longrightarrow 0$ tiene la propiedad de que $U \in \mathcal{X}$.

Demostración. $U \in \mathcal{X}$ porque $X, X' \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones.

$\square$

Lema 2.4.4. Suponga que tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

con $Y \in \omega^\wedge$ y $X \in \mathcal{X}$. Sea

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow W \longrightarrow X' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta con $X' \in \mathcal{X}$ y $W \in \omega$. Entonces en el diagrama del cuadrado co-cartesiano

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Y \arrow[r, "1"] \arrow[d] & Y \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

la sucesión exacta $0 \longrightarrow C \longrightarrow Z \longrightarrow X' \longrightarrow 0$ tiene la propiedad de que $Z \in \omega^\wedge$.

Demostración. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0,$$

$Y \in \omega^\wedge$ y $W \in \omega$. Como $\mathrm{resdim}_\omega(Y) < \infty$, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow W_n \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} W_1 \xrightarrow{f_0} W_0 \xrightarrow{\gamma} Y \longrightarrow 0,$$

con $W_k \in W$. Podemos componer las dos sucesiones anteriores y así obtener la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow W_n \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} W_1 \xrightarrow{f_0} W_0 \xrightarrow{\alpha\circ\gamma} W \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0.$$

La existencia de esta sucesión demuestra que $\mathrm{resdim}_\omega(Z) < \infty$. $\square$

Teorema 2.4.1. Para cada $C \in \mathcal{X}^\wedge$ existen sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow C \longrightarrow 0 \text{ y } 0 \longrightarrow C \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow 0,$$

con Y, Y' en $\omega^\wedge$ y X, X' en $\mathcal{X}$.

Demostración. Usemos inducción sobre $n = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C)$.

- Para $n = 0$: existe una sucesión exacta $0 \longrightarrow X_c \longrightarrow C \longrightarrow 0$, con $X_c \in \mathcal{X}$. Luego, $C \cong X_C$ y $C \in \mathcal{X}$. Como ω es un cogenerador de $\mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow W \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $W \in \omega$.

Para probar la existencia de la otra sucesión, basta tomar

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow C \xrightarrow{1} C \longrightarrow 0.$$

- Supongamos que el resultado se cumple para cualquier $C' \in \mathcal{X}^\wedge$ tal que $0 \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C') < n$. Como $n = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C)$, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_0} X_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

con $X_j \in \mathcal{X}$, $j = 0, ..., n$.

Sea $K_0 = \mathrm{Im}(f_0)$. Luego $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(K_0) = n - 1$. Por hipótesis inductiva, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_0 \xrightarrow{g_0} W(K_0) \longrightarrow X(K_0) \longrightarrow 0,$$

con $W(K_0) \in \omega^\wedge$ y $X(K_0) \in \mathcal{X}$.

Consideremos el diagrama del cuadrado cocartesiano:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r, "in"] \arrow[d, "g_0"'] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & W(K_0) \arrow[r] & U \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el Lema 2.4.3, se tiene que $U \in \mathcal{X}$.

Así tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow W(K_0) \longrightarrow U \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

con $U \in \mathcal{X}$ y $W(K_0) \in \omega^\wedge$.

Como ω es un cogenerador para $\mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow W(U) \longrightarrow X(U) \longrightarrow 0,$$

con $W(U) \in \omega$ y $X(U) \in \mathcal{X}$.

Consideremos el diagrama del cuadrado cocartesiano

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & W(K_0) \arrow[r, "1"] \arrow[d] & W(K_0) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & W(U) \arrow[r] \arrow[d] & X(U) \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & X(U) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Por el Lema 2.4.4, $V \in \omega^\wedge$.

Así tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow V \longrightarrow X(U) \longrightarrow 0,$$

con $V \in \omega^\wedge$ y $X(U) \in \mathcal{X}$.

$\square$

Definición 2.4.3. La sucesión

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow C \longrightarrow 0 \ (0 \longrightarrow C \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow 0)$$

del teorema anterior se llama **$\mathcal{X}$-aproximación** (**$\omega^\wedge$-envoltura**) de C.

Ahora definiremos un tipo especial de cogenerador, llamado cogenerador inyectivo.

Definición 2.4.4. Un cogenerador (generador) ω para $\mathcal{X}$ se llama inyectivo (proyectivo) si $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$ ($\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$).

En lo que sigue, a menos que se diga lo contrario, ω será un cogenerador inyectivo.

La siguiente proposición establece varias maneras de calcular la dimensión de resolución para ciertos módulos.

Proposición 2.4.1. Dado un módulo $C \in \mathcal{X}^\wedge$. Entonces, para $n \geq 0$, son equivalentes:

(a) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) = n$.

(b) $\mathrm{id}_C(\omega) = n$.

(c) $\mathrm{id}_C(\omega^\wedge) = n$.

(d) $\mathrm{Ext}^{n+1}(C, Y) = 0$, para todo $Y \in \omega^\wedge$.

Demostración. Inducción sobre $n = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C)$.
Analicemos el caso $n = 0$.

(a)$\Longrightarrow$(b) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) = 0 \Longrightarrow C \in \mathcal{X}$.

$\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$ porque ω es un cogenerador inyectivo de $\mathcal{X}$. Esto implica que $\mathrm{id}_C(\omega) = 0$, porque $C \in \mathcal{X}$.

(b)$\Longrightarrow$(c) Supongamos que $\mathrm{id}_C(\omega) = 0$. Sea $Y \in \omega^\wedge$. Veamos que $\mathrm{id}_C(Y) = 0$, es decir, $\mathrm{Ext}^j(C, Y) = 0$ para todo $j > 0$. Existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow W_m \xrightarrow{f_{m-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} W_1 \xrightarrow{f_0} W_0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

con $W_k \in \omega$.

Usemos inducción sobre m:

Para $m = 0$ se tiene que $Y \in \omega$, y como $\mathrm{id}_C(\omega) = 0$ se tiene que $\mathrm{Ext}^j(C, Y) = 0$, para $j > 0$.

Ahora supongamos que el resultado es cierto para $0 \leq k < m$. Sabemos que $\mathrm{resdim}_\omega(K_0) = m - 1$, donde $K_0 = \mathrm{Im}(f_0)$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_0 \xrightarrow{in} W_0 \longrightarrow Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Ext}(C, -)$ tenemos:

$$\mathrm{Ext}^j(C, W_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j(C, Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{j+1}(C, K_0)$$

Supongamos $j > 0$. Luego, $\mathrm{Ext}^j(C, W_0) = 0$ porque $W_0 \in \omega$, $\mathrm{Ext}^{j+1}(C, K_0) = 0$ por hipótesis inductiva. Por la exactitud de la sucesión anterior nos queda $\mathrm{Ext}^j(C, Y) = 0$, para $j > 0$, y por lo tanto $\mathrm{id}_C(Y) = 0$.

`(c)`$\Longrightarrow$`(d)` $\mathrm{id}_C(\omega^\wedge) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Ext}^j(C, Y) = 0$, para todo $Y \in \omega^\wedge$ y $j > 0$. En particular vale $\mathrm{Ext}^1(C, Y) = 0$.

`(d)`$\Longrightarrow$`(a)` Supongamos que $\mathrm{Ext}^1(C, Y) = 0$ para todo $Y \in \omega^\wedge$. Como $C \in \mathcal{X}^\wedge$, por el Teorema 2.4.1 existe una $\mathcal{X}$-aproximación para C, digamos

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \ (*) \ ,$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \omega^\wedge$. Ahora aplicamos $\mathrm{Ext}(-, Y)$ y nos da

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(C, Y).$$

Pero $\mathrm{Ext}^1(C, Y) = 0$ porque $Y \in \omega^\wedge$. Así, $\mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, Y)$ es un epimorfismo. Para 1_Y existe $h : X \longrightarrow Y$ tal que $1_Y = h \circ \alpha$, es decir, la sucesión (*) se parte. Este hecho equivale a que $X \cong Y \oplus C$. Como $X \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es cerrada bajo isomorfismos y sumandos directos, nos queda que $C \in \mathcal{X}$, por lo que $\mathrm{resdim}_\mathcal{X}(C) = 0$.

Supongamos que las equivalencias son válidas para cualquier C' con $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) \leq n-1$.

`(a)`$\Longrightarrow$`(b)` Supongmos que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) = n$. Luego existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{g_{n-1}} \cdots \xrightarrow{g_1} X_1 \xrightarrow{g_0} X_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Tomando $K_0 = \mathrm{Im}(g_0)$ se tiene que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(K_0) = n-1$. Por hipótesis inductiva, $\mathrm{id}_{K_0}(\omega) = n-1$ y por lo tanto $\mathrm{Ext}^j(K_0, W) = 0$, para todo $W \in \omega$ y $j > n-1$. Sea $W \in \omega$ y $j > n$. A la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_0 \xrightarrow{in} X_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

le aplicamos el funtor $\mathrm{Ext}(-, W)$ y nos queda:

$$\mathrm{Ext}^{j-1}(K_0, W) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j(C, W) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j(X_0, W).$$

Ahora bien, $\mathrm{Ext}^{j-1}(K_0, W) = 0$ porque $j-1 > n-1$ y $\mathrm{id}_{K_0}(\omega) = n-1$. Además, $\mathrm{Ext}^j(X_0, W) = 0$ porque $X_0 \in \mathcal{X}$ y $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$. Entonces, por la exactitud de la sucesión anterior nos queda que $\mathrm{Ext}^j(C, W) = 0$ para todo $W \in \omega$ y $j > n$. De donde $\mathrm{id}_C(\omega) \leq n$. No puede ocurrir que $\mathrm{id}_C(\omega) < n$, pues se tendría que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) < n$. Por lo tanto, $\mathrm{id}_C(\omega) = n$.

`(b)`$\Longrightarrow$`(c)` Esta implicación es análoga a la del caso $n = 0$.

`(c)`$\Longrightarrow$`(d)` Esta implicación es análoga a la del caso $n = 0$.

`(d)`$\Longrightarrow$`(a)` $C \in \mathcal{X}^\wedge$ implica que C tiene una $\mathcal{X}$-aproximación, digamos

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0,$$

con $X \in \mathcal{X}$ e $Y \in \omega^\wedge$. Sea $d = \mathrm{resdim}_{\omega}(Y)$, luego existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow W_d \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_1 \longrightarrow W_0 \xrightarrow{\gamma} Y \longrightarrow 0,$$

con $W_k \in \omega$.

Con las dos sucesiónes anteriores podemos construir la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow W_d \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_1 \longrightarrow W_0 \xrightarrow{\alpha\circ\gamma} X \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0.$$

Así, $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) \leq d+1$. Veamos que $d \leq n-1$. Consideramos la sucesión

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

y $Y' \in \omega^{\wedge}$. Aplicamos $\mathrm{Ext}(-, Y')$ y tenemos:

$$\mathrm{Ext}^n(X, Y') \longrightarrow \mathrm{Ext}^n(Y, Y') \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}(C, Y').$$

Como $X \in \mathcal{X}$ se tiene que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(X) = 0$ y por lo tanto $\mathrm{Ext}^n(X, Y') = 0$ (hipótesis inductiva). Además estamos asumiendo que $\mathrm{Ext}^{n+1}(C, Y') = 0$. Por la exactitud de la sucesión tenemos $\mathrm{Ext}^n(Y, Y') = 0$ para todo $Y' \in \omega^{\wedge}$.

Por hipótesis inductiva tenemos que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(Y) = n-1$, de donde $d \leq n-1$ $(d+1 \leq n)$ y por lo tanto $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) \leq n$. Entonces $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) = n$.

□

Corolario 2.4.1. $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega^{\wedge}) = 0$.

Demostración. Sea $X \in \mathcal{X}$. Luego, $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(X) = 0$. Así, $\mathrm{id}_X(\omega^{\wedge}) = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}$. Por lo que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega^{\wedge}) = 0$. □

Lema 2.4.5. Para $X \in \mathcal{X}$, son equivalentes:

(a) $X \in \omega$.

(b) $X \in \omega^{\wedge}$.

(c) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X) = 0$.

Demostración.

`(a)`$\Longrightarrow$`(b)` Es obvio.

`(b)`$\Longrightarrow$`(c)` Es inmediato del Corolario 2.4.1.

`(c)`$\Longrightarrow$`(a)` Como ω es un cogenerador para $\mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{\beta} Y \longrightarrow 0,$$

con $W \in \omega$ y $Y \in \mathcal{X}$. Como $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X) = 0$, tenemos $\mathrm{Ext}^1(X', X) = 0$ para todo $X' \in \mathcal{X}$. Así, aplicando $\mathrm{Ext}(X', -)$ a la sucesión anterior, tenemos:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X', X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X', W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X', Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(X', X) = 0.$$

Así, $\mathrm{Hom}(X', W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X', Y)$ es un epimorfismo. Esto vale en particular para $X' = Y$. De donde 1_Y se factoriza a través de α y por tanto $W \cong X \oplus Y$. Y como ω es cerrada bajo isomorfismos y sumandos directos, tenemos que $X \in \omega$.

$\square$

Ahora estamos listos para probar el principal resultado de esta sección. Su importancia radica en que, al trabajar con cogeneradores inyectivos, se puede establecer una equivalencia entre la finitud de la dimensión inyectiva de un módulo con la existencia de una sucesión exacta cuyos miembros pertenecen al cogenerador.

Lema 2.4.6.

`(a)` Sea $X \in \mathcal{X}$, n un entero no negativo. Entonces $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X) \leq n$ si, y sólo si, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow W_0 \longrightarrow W_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_n \longrightarrow 0,$$

con $W_i \in \omega$, $i = 0, ..., n$.

`(a)`* Sea ω un generador proyectivo de $\mathcal{X}$ y $n \geq 0$ un entero. Entonces, $X \in \mathcal{X}$, $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(X) \leq n$ si, y sólo si, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow W_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_1 \longrightarrow W_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

con $W_j \in \omega$, $i = 0, ..., n$.

Demostración. Supongamos primero que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X) \leq n$. Como ω es un cogenerador para $\mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{g_0} W_0 \xrightarrow{f_0} X_0 \longrightarrow 0.$$

Por la misma razón, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{g_1} W_1 \xrightarrow{f_1} X_1 \longrightarrow 0.$$

Conectamos ambas sucesiones para obtener la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow W_0 \xrightarrow{g_1 \circ f_0} W_1 \longrightarrow X_1 \longrightarrow 0.$$

Haciendo esto $n-1$ veces más, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow W_0 \longrightarrow W_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_{n-1} \longrightarrow X' \longrightarrow 0,$$

con $W_j \in \omega$, $j = 0, ..., n-1$.
$\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Ext}^j(Z, W) = 0$ para todo $Z \in \mathcal{X}$, $W \in \omega$ y $j > 0$.
$\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X) \leq n \Longrightarrow \mathrm{Ext}^i(Z, X) = 0$ para todo $Z \in \mathcal{X}$ e $i > n$.
Hay que ver que $X' \in \omega$. Para esto usamos inducción sobre n:

- Para el caso $n = 1$ tenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow W_0 \longrightarrow X' \longrightarrow 0.$$

Tenemos $\mathrm{Ext}^i(Z, X) = 0$ para todo $Z \in \mathcal{X}$ e $i > 1$. Entonces aplicamos $\mathrm{Ext}(Z, -)$ a la sucesión anterior:

$$0 = \mathrm{Ext}^{j-1}(Z, W_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{j-1}(Z, X') \longrightarrow \mathrm{Ext}^j(Z, X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j(Z, W_0) = 0.$$

Así, $\mathrm{Ext}^{j-1}(Z, X') \cong \mathrm{Ext}^{j}(Z, X)$. Luego, $\mathrm{Ext}^{i}(Z, X') \cong \mathrm{Ext}^{i+1}(Z, X) = 0$, para todo $Z \in \mathcal{X}$, pues $i + 1 > 1$. Entonces, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X') = 0$, y por el Lema 2.4.5 nos queda que $X' \in \omega$.

- Ahora considere $I = \mathrm{Im}(f_{n-2})$. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow W_0 \longrightarrow W_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_{n-2} \longrightarrow I \longrightarrow 0.$$

Por hipótesis inductiva, $I \in \omega$. Así tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{in} W_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} X' \longrightarrow 0.$$

Veamos que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X') = 0$. Sea $j > 0$ y $Z \in \mathcal{X}$. Aplicamos el funtor $\mathrm{Ext}^{j}(Z, -)$ a la sucesión anterior y obtenemos:

$$\mathrm{Ext}^{j}(Z, W_{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{j}(Z, X') \longrightarrow \mathrm{Ext}^{j+1}(Z, I).$$

Por el Lema 2.4.5 tenemos:

$I \in \omega \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(I) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{j+1}(Z, I) = 0$,

$W_{n-1} \in \omega \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(W_{n-1}) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{j}(Z, W_{n-1}) = 0$.

Entonces, por la exactitud de la sucesión anterior se tiene que $\mathrm{Ext}^{j}(Z, X') = 0$, para todo $X \in \mathcal{X}$ y $j > 0$. De donde $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X') = 0$, y por el Lema 2.4.5 se tiene que $X' \in \omega$.

Ahora supongamos que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow W_0 \xrightarrow{f_0} W_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} W_n \longrightarrow 0,$$

con $W_j \in \omega$, $j = 0, ..., n$.

Aplicamos inducción sobre n. Supongamos que $n = 0$. Luego, $X \in \omega$. Como $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$, se tiene que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X) = 0$. Ahora supongamos que se cumple el resultado para cualquier $k = 0, ..., n-1$. Considerando $K = \mathrm{Im}(f_0)$, se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{in} W_1 \longrightarrow W_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_n \longrightarrow 0,$$

y por hipótesis inductiva se tiene que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(K) \leq n-1$.

Luego, $\mathrm{Ext}^j(Z,K) = 0$ para todo $Z \in \mathcal{X}$ y $j > n-1$. A la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow W_0 \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

le aplicamos el funtor $\mathrm{Ext}^j(Z,-)$, con $Z \in \mathcal{X}$ y $j > n$, y nos da:

$$\mathrm{Ext}^{j-1}(Z,K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j(Z,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j(Z,W_0).$$

$\mathrm{Ext}^{j-1}(Z,K) = 0$ porque $j-1 > n-1$.

$\mathrm{Ext}^j(Z,W_0) = 0$ porque $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$.

Por la exactitud de la sucesión anterior se tiene que $\mathrm{Ext}^j(Z,X) = 0$ para todo $Z \in \mathcal{X}$ y $j > n$. Por lo tanto $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X) \leq n$. □

2.5 Aproximaciones y pares de cotorsión

La noción de par de cotorsión fue introducida por L. Salce en [20] para grupos abelianos, la cual nace del concepto de par de torsión que involucraba el uso del funtor Hom(-,-). Enochs redescubre el concepto de par de cotorsión para módulos, que se desprende de las 1-clase ortogonales.

Empezamos esta sección con la noción de precubierta y su dual (preenvoltura). Este concepto es importante para caracterizar ciertos pares de cotorsión conocidos como pares de cotorsión completos. A su vez, el concepto de clase resoluble también da origen a otro tipo de pares de cotorsión, los pares de cotorsión hereditarios.

Definición 2.5.1. Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Un morfismo $f : X \longrightarrow M$ es una $\mathcal{X}$-**precubierta** de M si $X \in \mathcal{X}$ y la aplicación $\mathrm{Hom}(Z,f) : \mathrm{Hom}(Z,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z,M)$ es sobreyectiva para cada $Z \in \mathcal{X}$. Es decir, para cada morfismo $g : Z \longrightarrow M$, con $Z \in \mathcal{X}$, existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

con h un homomorfismo.

Dualmente, $f' : M \longrightarrow X$ es una $\mathcal{X}$-**preenvoltura** de M si $X \in \mathcal{X}$ y la aplicación $\mathrm{Hom}(f', Z) : \mathrm{Hom}(X, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, Z)$ es sobreyectiva para cada $Z \in \mathcal{X}$. Es decir, para cada morfismo $g' : M \longrightarrow Z$, con $Z \in \mathcal{X}$, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z & \\ M \arrow[u, "g'"] \arrow[r, "f'"'] & X \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

con h un homomorfismo.

Definición 2.5.2. Una $\mathcal{X}$-precubierta $f : X \longrightarrow M$ es **especial** si $\ker(f) = 0$ y $\mathrm{coker}(f) \in {}^{\perp_1}\mathcal{X}$.

Dualmente, una $\mathcal{X}$-preenvoltura $f' : M \longrightarrow X$ es **especial** si $\mathrm{coker}(f') = 0$ y $\ker(f') \in \mathcal{X}^{\perp_1}$.

Ejemplo 2.5.1.

1. Si $\varphi : P \longrightarrow M$ es un homomorfismo con P un módulo proyectivo y $\ker(\varphi)$ un submódulo superfluo de P, entonces φ es una $\mathcal{P}_0$-precubierta de M. De forma dual, si $\psi : M \longrightarrow I$ es un homomorfismo con I un módulo inyectivo y $\mathrm{Im}(\psi)$ un submódulo esencial de I, entonces ψ es una $\mathcal{I}_0$-preenvoltura de M.

2. Sea J el radical de Jacobson de R. $\pi : R \longrightarrow R/J$ (la proyección canónica) es una $\mathcal{P}_0$-precubierta de R/J.

Definición 2.5.3. Sea $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ clases en Mod R. El par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ se llama **par de cotorsión** si $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}^{\perp_1} = \mathcal{B}$. La clase $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ se llama **núcleo** del par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Ejemplo 2.5.2. $(\text{Mod } R, \mathcal{I}_0)$ y $(\mathcal{P}_0, \text{Mod } R)$ son pares de cotorsión.

Definición 2.5.4. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión. Diremos que M tiene una **$\mathcal{A}$-precubierta especial** si existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

con $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{A}^{\perp_1} = \mathcal{B}$.

Dualmente, diremos que M tiene una **$\mathcal{B}$-preenvoltura especial** si existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

con $B \in \mathcal{B}$ y $A \in {}^{\perp_1}\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Lema 2.5.1. Dado $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión. Las clases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son cerradas bajo extensiones.

Demostración. Sólo probaremos que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo extensiones. Sea

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3 \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta, con $A_1, A_3 \in \mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$. Queremos ver que $A_2 \in {}^{\perp_1}\mathcal{B}$, es decir, $\text{Ext}^1(A_2, -)|_{\mathcal{B}} \equiv 0$.

Sea $B \in \mathcal{B}$. Aplicamos el funtor $\text{Ext}(-, B)$ y tenemos la sucesión

$$\text{Ext}^1(A_3, B) \longrightarrow \text{Ext}^1(A_2, B) \longrightarrow \text{Ext}^1(A_1, B).$$

Como $A_1, A_3 \in {}^{\perp_1}\mathcal{B}$, se tiene que $\text{Ext}^1(A_3, B) = 0$ y $\text{Ext}^1(A_1, B) = 0$. Por la exactitud de la sucesión anterior nos queda que $\text{Ext}^1(A_2, B) = 0$. Así, $A_2 \in \mathcal{A}$. $\square$

El siguiente lema introduce el concepto de par de cotorsión completo, establece que para tener una precubierta especial basta que exista una preenvoltura especial, y viceversa. Para probarlo, el Lema de Salce es un resultado fundamental. De hecho, en varias referencias (por ejemplo en [12]) el siguiente lema es conocido como el Lema de Salce, pero por razones prácticas asignamos tal nombre al Lema 2.4.2.

Lema 2.5.2. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión. Son equivalentes:

(a) Todo módulo tiene una $\mathcal{A}$-precubierta especial.

(b) Todo módulo tiene una $\mathcal{B}$-preenvoltura especial.

En este caso, se dice que el par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es **completo**.

Demostración. Sólo probaremos (b)$\Longrightarrow$(a), la otra implicación es análoga.
Sea M un módulo. Como Mod_R tiene suficientes proyectivos, existe un epimorfismo $f : P \longrightarrow M$ con P proyectivo. Luego, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{in} P \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0,$$

donde $K = \ker(f)$.
Por hipótesis, K tiene una $\mathcal{B}$-preenvoltura especial, de donde existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

con $B \in \mathcal{B}$ y $A \in {}^{\perp_1}\mathcal{B} = \mathcal{A}$.
Por el Lema de Salce, existe el siguiente diagrama conmutativo del cuadrado cocartesiano de in y β.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Consideremos la sucesión

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Tenemos que $P \in \mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$ por ser un módulo proyectivo, y sabemos que $A \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es cerrada bajo extensiones, nos queda que $G \in \mathcal{A}$.

Entonces, la sucesión

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow G \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

prueba la existencia de una $\mathcal{A}$-precubierta especial. □

Al igual que el anterior, el siguiente lema establece una equivalencia entre conceptos duales.

Lema 2.5.3. Para un par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{A}$ es resoluble.

(b) $\mathcal{B}$ es corresoluble.

(c) $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = 0$.

En este caso, el par de cotorsión $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ se llama **hereditario**.

Demostración.

`(a)`$\Longrightarrow$`(b)` Ya vimos que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo extensiones, y es claro que contiene los módulos inyectivos. Entonces, basta probar que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ un monomorfismo. $C = Y/\mathrm{Im}(f)$ es el conúcleo de f, y así tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0,$$

donde π es la proyección canónica, y $X, Y \in \mathcal{B}$. Veamos que $C \in \mathcal{B} = \mathcal{A}^{\perp_1}$, es decir, $\mathrm{Ext}^1(-,C)|_{\mathcal{A}} \equiv 0$. Sea $A \in \mathcal{A}$. Aplicamos el funtor $\mathrm{Ext}(A,-)$ y tenemos la sucesión:

$$\mathrm{Ext}^1(A,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A,C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(A,X).$$

Como $Y \in \mathcal{A}^{\perp_1}$ se tiene $\mathrm{Ext}^1(A,Y) = 0$. Además, $\mathrm{Ext}^2(A,X) = 0$ por la Proposición 2.1.2. Por la exactitud de la sucesión anterior, se tiene que $\mathrm{Ext}^1(A,C) = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Así, $C \in \mathcal{B}$.

`(b)`$\Longrightarrow$`(c)` $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \sup\{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Sea $B \in \mathcal{B}$ y veamos que $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(B) = 0$.

$\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(B) = \mathrm{mín}\{n \geq 0 : \mathrm{Ext}^j(-,B)|_{\mathcal{A}} \equiv 0, \text{ para todo } j > n\}$. Sea $A \in \mathcal{A}$, veamos que $\mathrm{Ext}^j(A,B) = 0$ para todo $j > 0$. Como $B \in \mathcal{A}^{\perp_1}$, se tiene $\mathrm{Ext}^1(A,B) = 0$. Como $\mathcal{B}$ es corresoluble, por la Proposición 2.1.2 se tiene que $\mathrm{Ext}^j(A,B) = 0$ para $j > 0$. Por lo tanto, $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = 0$.

`(c)`$\Longrightarrow$ `(a)` $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$. Entonces $0 = \sup\{\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Luego, $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(A) = 0$. Es decir, $0 = \mathrm{mín}\{n \geq 0 : \mathrm{Ext}^j(A,-)|_{\mathcal{B}} \equiv 0, \text{ para todo } j > n\}$. Así, $\mathrm{Ext}^j(A,B) = 0$ para todo $B \in \mathcal{B}$ y $j > 0$.

Sólo hay que probar que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos usando lo del párrafo anterior. Y la prueba de esto es análoga a la primera implicación.

$\square$

Capítulo 3
DIMENSIONES HOMOLÓGICAS EN PARES DE COTORSIÓN

En este capítulo se demuestran algunos resultados generales que establecen propiedades de las dimensiones homológicas en los pares de cotorsión. Muchos de ellos establecen desigualdades entre las distintas dimensiones homológicas. La mayor parte de los resultados que se presentan aquí fueron probados por L. Angeleri-Hügel y O. Mendoza en [3].

3.1 Relación entre las dimensiones homológicas y las dimensiones de resolución y corresolución

Esta sección esta dedicada a un resultado demostrado por C. Saenz y O. Mendoza en [16]. Tal resultado expone una serie de desigualdades que relacionan las dimensiones homológicas con las dimensiones de resolución y corresolución.

Proposición 3.1.1. Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases en Mod_R. Entonces,

(a) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L)$, para todo módulo L.

(a)* $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(L) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(L)$, para todo módulo L.

(b) Asuma que $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp_1}$, o que $\mathcal{Y}$ es una subcategoría de $\mathcal{X}$ cerrada bajo sumandos directos. Suponga además que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$. Entonces $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L)$, para todo módulo $L \in \mathcal{Y}^{\vee}$.

(b)* Asuma que $\mathcal{Y} = {}^{\perp_1}\mathcal{X}$, o que $\mathcal{Y}$ es una subcategoría de $\mathcal{X}$ cerrada bajo sumandos directos. Suponga además que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$. Entonces tenemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(L) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(L)$ para todo $L \in \mathcal{Y}^{\wedge}$.

(c) Sea $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp_1}$. Entonces $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M)$, para todo módulo M. En particular, $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(\mathrm{Mod}_R) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{X})$.

(c)* Sea $\mathcal{Y} = {}^{\perp_1}\mathcal{X}$. Entonces $\mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M)$, para todo módulo M. En particular, $\mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(\mathrm{Mod}_R) \leq \mathrm{id}(\mathcal{X})$.

Demostración.

(a) Si $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L) = \infty$ no hay nada que probar. Así que supongamos que $L \in \mathcal{Y}^{\vee}$. Tampoco hay nada que probar si $L = 0$.

Supongamos $L \neq 0$. Sea $d = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L)$. Usaremos inducción sobre d. Sea $\alpha = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$.

- $d = 0$: luego, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} I_0 \longrightarrow 0,$$

con $I_0 \in \mathcal{Y}$. Así, f es un isomorfismo. Luego, $L \cong I_0$ e $I_0 \in \mathcal{Y}$ implican $L \in \mathcal{Y}$. $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \sup\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\} = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$.

Por lo que se cumple el resultado.

- $d = 1$: tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow 0,$$

con $I_0, I_1 \in \mathcal{Y}$. De esta sucesión se desprende la sucesión exacta larga de $\mathrm{Ext}^n(M, -)$, para $M \in \mathcal{X}$, de la cual consideramos la siguiente parte:

$$\mathrm{Ext}^{i-1}(M, I_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i}(M, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i}(M, I_0).$$

Sabemos que $\mathrm{Ext}^{i-1}(M, I_1) = 0$ si $i - 1 > \alpha$ y que $\mathrm{Ext}^i(M, I_0) = 0$ si $i > \alpha$. Entonces, supongamos que $i > \alpha + 1$. Así, $\mathrm{Ext}^{i-1}(M, I_1) = 0$, $\mathrm{Ext}^i(M, I_0) = 0$ y por la exactitud de la sucesión nos queda $\mathrm{Ext}^i(M, L) = 0$, para todo $M \in \mathcal{X}$. $\mathrm{Ext}^i(-, L)|_{\mathcal{X}} \equiv 0$ si $i > \alpha + 1$. Luego, por definición de ínfimo se tiene que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \alpha + 1$, y se cumple el resultado en este caso.

- Supongamos que el resultado se cumple para $2 < n < d$. Veamos que se cumple para d. Sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow I_0 \xrightarrow{f_0} I_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{d-1}} I_d \longrightarrow 0,$$

con $I_i \in \mathcal{Y}$. Considerando $K_0 = \mathrm{Im}(f_0)$, tenemos $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(K_0) = d - 1$. Por hipótesis inductiva tenemos que

$$\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(K_0) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(K_0) = \alpha + d - 1.$$

Sea $M \in \mathcal{X}$, y consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow I_0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0,$$

aplicamos $\mathrm{Ext}(M, -)$ y tenemos

$$\mathrm{Ext}^{i-1}(M, K_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(M, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(M, I_0).$$

Sabemos que $\mathrm{Ext}^{i-1}(M, K_0) = 0$ si $i - 1 > \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(K_0)$ y que $\mathrm{Ext}^i(M, I_0) = 0$ si $i > \alpha$. Entonces tomamos $i - 1 > \alpha + d - 1$ ($i > \alpha + d$), de donde $i > \alpha$. Así, $\mathrm{Ext}^{i-1}(M, K_0) = 0$ y $\mathrm{Ext}^i(M, I_0) = 0$. Luego, por la exactitud de la sucesión anterior nos queda que $\mathrm{Ext}^i(M, L) = 0$ si $i > \alpha + d$, para todo $M \in \mathcal{X}$. Por lo que

$$\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \alpha + d = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L).$$

(b) Usamos inducción sobre $d = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L)$.

- $d = 0$: luego, $L \in \mathcal{Y}$. De donde, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$. Así, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = 0 = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L)$.

- $d = 1$: existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow I_0 \xrightarrow{f_0} I_1 \longrightarrow 0,$$

con $I_0, I_1 \in \mathcal{Y}$. $L \notin \mathcal{Y}$, de lo contrario tendríamos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

y $d = 0$, lo cual es falso. Por (a), tenemos $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + d = d = 1$. Veamos que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \geq 1$. Supongamos que $\mathrm{Ext}^1(-, L)|_{\mathcal{X}} \equiv 0$. Entonces, $L \in \mathcal{X}^{\perp_1} = \mathcal{Y}$, lo cual no es cierto porque $L \notin \mathcal{Y}$. Por lo que $\mathrm{Ext}^1(-, L)|_{\mathcal{X}} \not\equiv 0$ y $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \geq 1$. Así, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = 1 = d$.

Ahora supongamos que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ y que $\mathcal{Y}$ es cerrada bajo sumandos directos. Supongamos de nuevo que $\mathrm{Ext}^1(-, L)|_{\mathcal{X}} \equiv 0$. Sea $M \in \mathcal{X}$. Tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, I_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, I_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M, L) = 0,$$

para todo $M \in \mathcal{X}$. Como $I_1 \in \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, se tiene que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(I_1, L) \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}(I_1, I_0) \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}(I_1, I_1) \longrightarrow 0$$

es exacta. Esto implica que la sucesión

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow 0$$

se parte. Por lo tanto $I_0 \cong L \oplus I_1$. $I_0 \in \mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}$ es cerrada bajo sumandos directos, de donde $L \in \mathcal{Y}$ (lo cual es una contradicción). Entonces, $\mathrm{Ext}^1(-, L)|_{\mathcal{X}} \not\equiv 0$ y $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \geq 1$. Así, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = 1 = d$.

- Supongamos que el resultado es cierto para $2 < n < d$. Tenemos una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow I_0 \xrightarrow{f_0} I_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{d-1}} I_d \longrightarrow 0,$$

con $I_i \in \mathcal{Y}$. Sea $K_0 = \mathrm{Im}(f_0)$. Luego, $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(K_0) = d - 1$, y por hipótesis inductiva se tiene que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(K_0) = d - 1$. Por (a), sabemos que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq d$.

Falta ver que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \geq d$. Supongamos que $\mathrm{Ext}^d(-, L)|_{\mathcal{X}} \equiv 0$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow I_0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0.$$

Sea $M \in \mathcal{X}$. Aplicamos $\mathrm{Ext}(M, -)$ y tenemos

$$\mathrm{Ext}^{d-1}(M, I_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{d-1}(M, K_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^d(M, L).$$

$\mathrm{Ext}^d(M, L) = 0$ porque $\mathrm{Ext}^d(-, L)|_{\mathcal{X}} \equiv 0$. $\mathrm{Ext}^{d-1}(M, I_0) = 0$ porque $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$. Por la exactitud de la sucesión anterior, se tiene que $\mathrm{Ext}^{d-1}(M, K_0) = 0$, para todo $M \in \mathcal{X}$. De donde $d - 1 > \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(K_0)$. Pero, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(K_0) = d - 1$. Así, $d - 1 > d - 1$, lo cual es falso. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^d(-, L)|_{\mathcal{X}} \not\equiv 0$ y $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \geq d$. Entonces, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L)$.

(c) Sea $d = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M)$ y M un módulo por la derecha. Sea

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{s-1}} I_{s-1} \xrightarrow{f_s} I_s \longrightarrow \cdots$$

una corresolución inyectiva de M. Cortamos la sucesión de la siguiente forma:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{d-1}} I_{d-1} \xrightarrow{f_d} Im(f_d) \longrightarrow 0.$$

Por "cambio de dimensión" tenemos que

$$\mathrm{Ext}^1(-, \mathrm{Im}(f_d))|_{\mathcal{X}} \cong \mathrm{Ext}^{d+1}(-, M)|_{\mathcal{X}} = 0,$$

la última igualdad se debe a que $d = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M)$. Entonces, $\mathrm{Im}(f_d) \in \mathcal{X}^{\perp_1}$. Además, $I_j \in \mathcal{X}^{\perp_1}$ para cada $0 \leq j < d$, por ser módulos inyectivos. De donde tenemos que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}^{\perp_1}}(M) \leq d$. El caso particular se debe a que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathrm{Mod}_R) = \mathrm{pd}(\mathcal{X})$.

□

3.2 Dimensiones homológicas, de resolución y corresolución para pares de cotorsión completos y hereditarios

El objetivo principal de esta sección es establecer varias desigualdades que relacionen los distintos tipos de dimensiones que hemos estudiado, así como fórmulas para calcularlas.

El siguiente teorema nos permite calcular las dimensiones proyectivas e inyectivas de un módulo usando pares de cotorsión completos. Además, para un par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, obtenemos cotas superiores e inferiores para $\mathrm{pd}(\mathcal{A})$ y $\mathrm{id}(\mathcal{B})$.

Teorema 3.2.1. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión completo en Mod_R. Entonces:

(a) Para cualquier módulo M, tenemos

$$\mathrm{id}(M) = \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(M), \mathrm{id}_{\mathcal{B}}(M)\} \text{ y } \mathrm{pd}(M) = \text{máx}\{\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(M), \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M)\}.$$

(b) $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Mod}_R) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + 1$.

(c) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Mod}_R) \leq \mathrm{id}(\mathcal{B}) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + 1$.

Demostración.

(a) Primero veamos que $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(M) \leq \mathrm{id}(M)$.

$\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(M) = \text{ínf}\{n \geq 0 : \mathrm{Ext}^j(-, M)|_{\mathcal{A}} \equiv 0, \text{ para todo } j > n\}$.

$\mathrm{id}(M) = \text{ínf}\{n \geq 0 : \mathrm{Ext}^j(-, M) \equiv 0, \text{ para todo } j > n\}$.

Si $n = \mathrm{id}(M)$ y $j > n$ entonces $\mathrm{Ext}^j(-, M) \equiv 0$. De donde $\mathrm{Ext}^j(-, M)|_{\mathcal{A}} \equiv 0$. Así, $\mathrm{Ext}^{n+1}(-, M)|_{\mathcal{A}} \equiv 0$ y por tanto $n + 1 > \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(M)$. Es decir, $\mathrm{id}(M) \geq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(M)$. Análogamente, $\mathrm{id}(M) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{B}}(M)$. Entonces, $\text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(M), \mathrm{id}_{\mathcal{B}}(M)\} \leq \mathrm{id}(M)$.

Veamos la desigualdad contraria. Sea N un módulo. Como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es completo, N tiene una $\mathcal{B}$-preenvoltura especial. Luego, existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

con $B \in \mathcal{B}$ y $A \in {}^{\perp_1}\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Por el Lema 2.2.1 (b), tenemos

$$\mathrm{pd}_{\{M\}}(N) \leq \text{máx}\{\mathrm{pd}_{\{M\}}(B), \mathrm{pd}_{\{M\}}(A) - 1\}.$$

Pero $\text{máx}\{\mathrm{pd}_{\{M\}}(B), \mathrm{pd}_{\{M\}}(A) - 1\} \leq \text{máx}\{\mathrm{pd}_{\{M\}}(B), \mathrm{pd}_{\{M\}}(A)\}$. Así,

$$\mathrm{pd}_{\{M\}}(N) \leq \text{máx}\{\mathrm{pd}_{\{M\}}(B), \mathrm{pd}_{\{M\}}(A)\}.$$

Por definición de supremo se tiene que $\mathrm{pd}_{\{M\}}(B) \leq \mathrm{pd}_{\{M\}}(\mathcal{B})$ y $\mathrm{pd}_{\{M\}}(A) \leq \mathrm{pd}_{\{M\}}(\mathcal{A})$. Así, $\text{máx}\{\mathrm{pd}_{\{M\}}(B), \mathrm{pd}_{\{M\}}(A)\} \leq \text{máx}\{\mathrm{pd}_{\{M\}}(\mathcal{B}), \mathrm{pd}_{\{M\}}(\mathcal{A})\}$. Y tenemos:

$$\mathrm{pd}_{\{M\}}(N) \leq \text{máx}\{\mathrm{pd}_{\{M\}}(\mathcal{B}), \mathrm{pd}_{\{M\}}(\mathcal{A})\},$$

para todo $N \in \mathrm{Mod}_R$. Nuevamente, por definición de supremo se tiene que

$$\mathrm{pd}_{\{M\}}(\mathrm{Mod}_R) \leq \text{máx}\{\mathrm{pd}_{\{M\}}(\mathcal{B}), \mathrm{pd}_{\{M\}}(\mathcal{A})\}.$$

Por el Lema 2.2.1 sabemos que $\mathrm{pd}_{\{M\}}(\mathrm{Mod}_R) = \mathrm{id}(M)$, $\mathrm{pd}_{\{M\}}(\mathcal{B}) = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}(M)$ y $\mathrm{pd}_{\{M\}}(\mathcal{A}) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(M)$. Sustituyendo nos queda $\mathrm{id}(M) \leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(M), \mathrm{id}_{\mathcal{B}}(M)\}$.

Por lo tanto, $\mathrm{id}(M) = \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(M), \mathrm{id}_{\mathcal{B}}(M)\}$.

La otra igualdad se prueba de forma análoga.

(b) $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\perp_1}$, así que por la Proposición 3.1.1 (c) se tiene que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Mod}_R) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{A})$. Falta probar la segunda desigualdad. Sea M un módulo. M tiene una $\mathcal{B}$-preenvoltura especial, digamos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

con $B \in \mathcal{B}$ y $A \in \mathcal{A}$. Por el Lema 2.2.1 (c)* se tiene que:

$$\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(M) \leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(B), \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(A) + 1\}.$$

Por definición de supremo, nos queda

$$\text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(B), \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(A) + 1\} \leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}), \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + 1\}.$$

Así, $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(M) \leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}), \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})+1\}$, para todo $M \in \mathrm{Mod}_R$. Por la Proposición 3.1.1 (a) sabemos que

$$\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(L) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(L),$$

para todo $L \in \mathrm{Mod}_R$. En particular tomamos $L \in \mathcal{A}$, y por definición de supremo para $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ tenemos

$$\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(L) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}),$$

para todo $L \in \mathcal{A}$. Y nuevamente por definición de supremo, pero para $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$, nos queda

$$\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}).$$

Así,

$$\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + 1 \leq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + 1.$$

Además,

$$\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + 1.$$

Entonces,

$$\text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}), \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})+1\} \leq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + 1.$$

De donde

$$\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(M) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + 1.$$

(c) La prueba es análoga a (b).

□

Cuando el par de cotorsión es también hereditario, las desigualdades del teorema anterior se simplifican. Entonces, como corolario tenemos:

Corolario 3.2.1. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión completo y hereditario en Mod_R. Entonces:

(a) $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}(\mathcal{A})$ y $\mathrm{id}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathrm{id}(\mathcal{B})$.

(b) $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Mod}_R) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + 1$.

(c) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Mod}_R) \leq \mathrm{id}(\mathcal{B}) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) + 1$.

Demostración. (b) y (c) son inmediatos del teorema anterior y del hecho de que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es completo. Para probar (a), sea $A \in \mathcal{A}$. Por el Teorema 3.2.1 (a),

$$\mathrm{pd}(A) = \mathrm{máx}\{\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(A), \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(A)\}.$$

Como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es hereditario, se tiene que $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = 0$. Pero $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = 0$. De donde $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(A) = 0$. Así, $\mathrm{pd}(A) = \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$. Tomando el supremo sobre $\mathcal{A}$, nos queda $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}(\mathcal{A})$. La prueba de que $\mathrm{id}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathrm{id}(\mathcal{B})$ es análoga. $\square$

Ahora vamos a estudiar lo que ocurre cuando se considera el núcleo de un par de cotorsión.

Lema 3.2.1. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión completo y hereditario en Mod_R con núcleo ω. Entonces:

(a) $\mathcal{A} \cap \omega^{\vee} = \{X \in \mathcal{A} : \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(X) < \infty\}$.

(b) $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) = \mathrm{resdim}_{\omega}(M)$, para todo $M \in \omega^{\wedge}$.

(c) $\mathrm{pd}_{\omega}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M)$, para todo $M \in \mathcal{A}^{\wedge}$.

Demostración. ω es un cogenerador porque $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es completo. Como $\omega \subseteq \mathcal{B}$, se tiene que $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\omega) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = 0$. Así, $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\omega) = 0$ y ω es un cogenerador inyectivo.

(a) Sea $X \in \mathcal{A} \cap \omega^{\vee}$. Luego, $\text{coresdim}_{\omega}(X) < \infty$. Por la Proposición 3.1.1, tenemos que

$$\text{id}_{\mathcal{A}}(X) \leq \text{id}_{\mathcal{A}}(\omega) + \text{coresdim}_{\omega}(X) = \text{coresdim}_{\omega}(X) < \infty.$$

Así, $\text{id}_{\mathcal{A}}(X) < \infty$ y entonces $\mathcal{A} \cap \omega^{\vee} \subseteq \{X \in \mathcal{A} : \text{id}_{\mathcal{A}}(X) < \infty\}$. Ahora, sea $X \in \mathcal{A}$ tal que $\text{id}_{\mathcal{A}}(X) < \infty$. Por el Lema 2.4.6, como $\text{id}_{\mathcal{A}}(X) < \infty$, se tiene que $\text{coresdim}_{\omega}(X) < \infty$ y por tanto $X \in \mathcal{A} \cap \omega^{\vee}$.

(b) Sabemos que $\text{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \text{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = 0$ y que $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$, así que por la Proposición 3.1.1 (b)* tenemos que $\text{pd}_{\mathcal{B}}(M) = \text{resdim}_{\mathcal{A}}(M)$, para todo $M \in \mathcal{A}^{\wedge}$. Veamos que $\omega \subseteq \mathcal{B}$ es cerrada bajo sumandos directos. Sea W un sumando directo de ω. Luego, existe W' tal que $W \oplus W' \in \omega$. Así, $\text{Ext}^1(-, W \oplus W')|_{\mathcal{A}} \equiv 0$.

Sea $A \in \mathcal{A}$. $\text{Ext}^1(A, W \oplus W') \cong \text{Ext}^1(A, W) \times \text{Ext}^1(A, W')$. Así, $0 = \text{Ext}^1(A, W) \times \text{Ext}^1(A, W')$ y por lo tanto $\text{Ext}^1(A, W) = 0$ y $\text{Ext}^1(A, W') = 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$. De donde $W \in \mathcal{A}^{\perp_1} = \mathcal{B}$.

Análogamente se prueba que $W \in {}^{\perp_1}\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Así, $W \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \omega$.

Además, $\text{pd}_{\mathcal{B}}(\omega) = 0$. Entonces se cumplen las hipótesis de la Proposición 3.1.1 (b), de donde $\text{pd}_{\mathcal{B}}(M) = \text{resdim}_{\omega}(M)$, para todo $M \in \omega^{\wedge}$.

(c) Supongamos que $\text{resdim}_{\mathcal{A}}(M) = n$. Probaremos el resultado usando inducción sobre n.

- n=0: en este caso, $M \in \mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$.

  $\text{pd}_{\omega}(M) = \text{ínf}\{n \geq 0 : \text{Ext}^j(M, -)|_{\omega} \equiv 0, \text{ para todo } j > n\}$.

  $M \in {}^{\perp_1}\mathcal{B} \Longrightarrow \text{Ext}^1(M, -)|_{\mathcal{B}} \equiv 0$. Como $\mathcal{B}$ es corresoluble, se tiene que

  $$\text{Ext}^n(M, -)|_{\mathcal{B}} \equiv 0,$$

  para todo $n > 0$. Como $\omega \subseteq \mathcal{B}$, nos queda $\text{Ext}^n(M, -)|_{\omega} \equiv 0$, para todo $n > 0$. Es decir, $\text{pd}_{\omega}(M) = 0$, donde $\text{resdim}_{\mathcal{A}}(M) = 0$.

- Supongamos que el resultado se cumple para todo $0 \leq k \leq n-1$:

  Como $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M) = n$, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_0} A_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

  con $A_k \in \mathcal{A}$, $k = 0, ..., n$. Sea $I_0 = \mathrm{Im}(f_0)$, luego $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(I_0) = n-1$. Por hipótesis inductiva, $\mathrm{pd}_{\omega}(I_0) = n-1$. De donde, $\mathrm{Ext}^j(I_0, -)|_{\omega} \equiv 0$ para todo $j > n-1$. Hay que ver que $\mathrm{Ext}^j(M, -)|_{\omega} \equiv 0$, para todo $j > n$.

  Aplicamos el funtor $\mathrm{Ext}(-, W)$, con $W \in \omega$, a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow I_0 \xrightarrow{i} A_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

  y obtenemos

$$\mathrm{Ext}^{j-1}(I_0, W) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j(M, W) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j(A_0, W),$$

  con $j > n$. $j > n \Longrightarrow j-1 \geq n > n-1$. Luego, $\mathrm{Ext}^{j-1}(I_0, W) = 0$. Como $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(W) = 0$, se tiene que $\mathrm{Ext}^j(A_0, W) = 0$. Entonces, $\mathrm{Ext}^j(M, W) = 0$, para todo $j > n$.

$\square$

Ahora estamos listos para probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.2.2. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión completo y hereditario en Mod_R con núcleo ω. Entonces

(a) $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_{\omega}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Mod}_R)$.

(b) $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$ si, y sólo si, $\mathcal{A} \subseteq \omega^{\vee}$ y $\mathrm{pd}(\omega) < \infty$. En este caso tenemos

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}(\omega) = \mathrm{id}_{\omega}(\mathcal{A}).$$

Demostración.

(a) Por el Corolario 3.2.1 (a), tenemos que $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$.

Analicemos dos casos:

- $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \infty$: por el Corolario 3.2.1 (b), se tiene que $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{coredim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})+1$. Y como $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) = \infty$, se tiene que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \infty$. Como $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Mod}_R$, se tiene que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Mod}_R)$. De donde $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Mod}_R) = \infty$.

  Falta ver que $\mathrm{coresdim}_{\omega}(\mathcal{A}) = \infty$. Supongamos lo contrario, $\mathrm{coresdim}_{\omega}(\mathcal{A}) = n$. Sea $A \in \mathcal{A}$, luego $\mathrm{coresdim}_{\omega}(A) = m \leq n$. De donde, existe una sucesión exacta

  $$0 \longrightarrow A \longrightarrow W_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_m \longrightarrow 0,$$

  con $W_k \in \omega \subseteq \mathcal{B}$. Así, $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(A) \leq m \leq n$. Tenemos $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(A) \leq n$, para todo $A \in \mathcal{A}$. Es decir, $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \leq n$, lo cual es falso.

- $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$: por el Corolario 3.2.1 (b), tenemos $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Mod}_R) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$. Entonces, $\mathrm{Mod}_R = \mathcal{B}^{\vee}$. Como $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\perp_1}$ y $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = 0$, por la Proposición 3.1.1 (b) tenemos $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(A) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}^{\vee} = \mathrm{Mod}_R$. Así, $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathrm{Mod}_R) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Mod}_R)$.

  Hasta ahora tenemos que $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Mod}_R)$. Por el Lema 3.2.1,

  $$\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty \Longrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A} \cap \omega^{\vee} \Longrightarrow \mathcal{A} \subseteq \omega^{\vee}.$$

  Veamos que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_{\omega}(\mathcal{A}) = \mathrm{id}_{\omega}(\mathcal{A})$. $\omega \subseteq \mathcal{A}$ es cerrada bajo sumandos directos y $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\omega) = 0$ (porque ω es un cogenerador inyectivo de $\mathcal{A}$). Entonces, por la Proposición 3.1.1 (b) tenemos que $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(L) = \mathrm{coresdim}_{\omega}(L)$, para todo $L \in \omega^{\vee}$. Como $\mathcal{A} \subseteq \omega^{\vee}$, nos queda que $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_{\omega}(\mathcal{A})$.

  Tenemos, $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Mod}_R) = \mathrm{coresdim}_{\omega}(\mathcal{A})$. Pero también, $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(L) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(L)$, para todo $L \in \mathcal{B}^{\perp_1} = \mathcal{A}$. Así, $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ y se tiene el resultado.

(b) ($\Longrightarrow$) Supongamos que $\text{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$. Ya vimos que $\text{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty \Longrightarrow A \subseteq \omega^{\vee}$ y $\text{Mod}_R = \mathcal{B}^{\vee}$. Además, $\omega \subseteq \mathcal{A} \Longrightarrow \text{pd}(\omega) \leq \text{pd}(\mathcal{A}) = \text{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$.

Por el dual del Lema 3.2.1 (c), tenemos $\text{pd}(\omega) = \text{id}_{\omega}(\text{Mod}_R) = \text{coresdim}_{\mathcal{B}}(\text{Mod}_R) = \text{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$. Tenemos que $\text{pd}(\omega) = \text{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$. Falta ver que $\text{pd}_{\mathcal{A}}(\omega) = \text{pd}(\omega)$. Por el Teorema 3.2.1, $\text{pd}(W) = \text{máx}\{\text{pd}_{\mathcal{A}}(W), \text{pd}_{\mathcal{B}}(W)\}$. Como $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es completo, se tiene que $\text{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = 0$. Es decir, $\text{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = 0$. Como $\omega \subseteq \mathcal{A}$, nos queda que $\text{pd}_{\mathcal{B}}(\omega) = 0$.

Entonces, $\text{pd}(W) = \text{pd}_{\mathcal{A}}(W)$, para todo $W \in \omega$. Así, $\text{pd}(\omega) = \text{pd}_{\mathcal{A}}(\omega)$. Es decir, $\text{pd}(\omega) = \text{id}_{\omega}(\mathcal{A})$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $\mathcal{A} \subseteq \omega^{\vee}$ y que $\text{pd}(\omega) < \infty$. Luego, $\omega \subseteq \mathcal{A} \Longrightarrow \text{pd}(\omega) \leq \text{pd}(\mathcal{A})$. Sea $A \in \mathcal{A}$. Luego, $\text{coresdim}_{\omega}(A) < \infty$. Existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow W_0 \xrightarrow{f_0} W_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} W_n \longrightarrow 0,$$

con $W_j \in \omega$, $j = 0, ..., n$. Veamos que esto implica que $\text{pd}(A) \leq \text{pd}(\omega)$. Usamos inducción sobre n.

- $n = 0$: trivial, pues se tiene $A \in \omega$.
- $n = 1$: tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow W_0 \longrightarrow W_1 \longrightarrow 0.$$

  Por el Lema 2.2.1 (b), se tiene que

$$\text{pd}(A) \leq \text{máx}\{\text{pd}(W_0), \text{pd}(W_1) - 1\} \leq \text{máx}\{\text{pd}(W_0), \text{pd}(W_1)\}.$$

  Pero, $\text{pd}(W_0), \text{pd}(W_1) \leq \text{pd}(\omega)$. Así, $\text{pd}(A) \leq \text{pd}(\omega)$.

- Supongamos que $\text{pd}(A') \leq \text{pd}(\omega)$ para todo $A' \in \mathcal{A}$ con $0 \leq \text{coresdim}_{\omega}(A') \leq n - 1$. Sea $K = \text{Im}(f_0)$. Entonces $\text{coresdim}_{\omega}(K) = n - 1$. Y por hipótesis inductiva, $\text{pd}(K) \leq \text{pd}(\omega)$. Tenemos también la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow W_0 \xrightarrow{f_0} K \longrightarrow 0.$$

Por el mismo argumento usado en el caso anterior, tenemos $\mathrm{pd}(A) \leq \mathrm{pd}(\omega)$. Tomando supremo, nos queda $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{pd}(\omega)$. Por lo tanto, $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}(\omega)$.

Como $\mathrm{pd}(\omega) < \infty$, tenemos que $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) < \infty$.

La prueba de que $\mathrm{id}_\omega(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}(\omega)$ no depende de la hipótesis. Por lo que $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}(\omega) = \mathrm{id}_\omega(\mathcal{A})$.

$\square$

Capítulo 4
MÓDULOS TILTING Y PARES DE COTORSIÓN

En este capítulo daremos una aplicación de los resultados anteriores a la teoría de los módulos tilting. Un teorema importante probado por Angeleri-Hügel y Mendoza caracteriza los pares de cotorsión tilting. También vamos a estudiar los pares de cotorsión cogenerados por clases de módulos, y probaremos uno de los resultados más importantes dentro del tema de los pares de cotorsión, el Teorema de Eklof y Trlifaj, el cual establece que todo par de cotorsión cogenerado por un conjunto de módulos es completo.

4.1 Algunos resultados preliminares

Estudiemos algunos resultados demostrados por J. Rada y M. Saorín en [18], los cuales conducen a la existencia de $\mathrm{Add}(M)$-precubiertas, para cualquier módulo M.

Primero necesitamos el concepto de clases localmente finalmente pequeñas.

Definición 4.1.1. Sea $\mathcal{F}$ una clase de módulos. Decimos que $\mathcal{F}$ es **localmente finalmente pequeña (l.f.p.)** si, para cada $M \in \mathrm{Mod}_R$, existe un conjunto $\mathcal{F}_M \subseteq \mathcal{F}$ tal que cada homomorfismo $f : F \longrightarrow M$, donde $F \in \mathcal{F}$, se factoriza a través de una suma directa de módulos en $\mathcal{F}_M$.

Ejemplo 4.1.1. $\mathcal{P}_0$ es una clase l.f.p., donde $\mathcal{F}_M = \{R\}$ para todo $M \in \mathcal{P}_0$.

Lema 4.1.1. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Mod}_R$ una clase de módulos y $f : F \longrightarrow M$ un homomorfismo con $F \in \mathcal{F}$. Entonces f es una $\mathcal{F}$-precubierta de M si, y sólo si, f es una $\mathrm{Add}(\mathcal{F})$-precubierta de M.

Demostración. Supongamos que f es una $\mathcal{F}$-precubierta. Sea $P \in \mathrm{Add}(\mathcal{F})$ y $g : P \longrightarrow M$ un homomorfismo. Luego, existe un módulo K tal que $P \oplus K = \bigoplus\{F'/F' \in \mathcal{F}'\}$, donde $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ es un conjunto. Sea $\mu : P \longrightarrow F'$ la composición $\mu = \pi_{F'} \circ i_P$, donde $\pi_{F'} : \bigoplus\{F'/F' \in \mathcal{F}'\} \longrightarrow F'$ es la proyección canónica e $i_P : P \longrightarrow P \oplus K$ es la inclusión canónica. Por otro lado, sea $\pi : F' \longrightarrow P$ la composición $\pi = \pi_P \circ i_{F'}$, donde $\pi_P : P \oplus K \longrightarrow P$ es la proyección canónica e $i_{F'} : F' \longrightarrow \bigoplus\{F'/F' \in \mathcal{F}'\}$ es la inclusión canónica. Note que $\mu \circ \pi = 1_{F'}$ y $\pi \circ \mu = 1_P$. Entonces, $g \circ \pi : F' \longrightarrow M$. Como f es una $\mathcal{F}$-precubierta, existe $g' : F' \longrightarrow F$ tal que $g \circ \pi = f \circ g'$. Entonces, $f \circ g' \circ \mu = g \circ \pi \circ \mu = g \circ 1_P = g$. Por lo tanto, f es una $\mathrm{Add}(\mathcal{F})$-precubierta de M.
La otra implicación es inmediata. □

Lema 4.1.2. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Mod}_R$ una clase de módulos. Si $f : P \longrightarrow M$ es una $\mathrm{Add}(\mathcal{F})$-precubierta de M, $\mu : F \longrightarrow P$ y $\pi : P \longrightarrow F$ son homomorfismos tales que $F \in \mathcal{F}$ y $\mu \circ \pi = 1_P$, entonces $f \circ \mu$ es una $\mathcal{F}$-precubierta de M (y así, una $\mathrm{Add}(\mathcal{F})$-precubierta de M).

Demostración. Sea $g : F' \longrightarrow M$ un homomorfismo con $F' \in \mathcal{F}$. Luego, $F' \in \mathrm{Add}(\mathcal{F})$. Como f es una $\mathrm{Add}(\mathcal{F})$-precubierta, existe un homomorfismo $h : F' \longrightarrow P$ tal que $g = f \circ h$. Entonces, $\pi \circ h : F' \longrightarrow F$ y

$$(f \circ \mu) \circ (\pi \circ h) = f \circ (\mu \circ \pi) \circ h = f \circ 1_P \circ h = f \circ h = g.$$

De donde, $f \circ \mu$ es una $\mathcal{F}$-precubierta de M. □

El siguiente teorema caracteriza las $\mathcal{F}$-precubiertas.

Teorema 4.1.1. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Mod}_R$ una clase de módulos por la derecha. Son equivalentes:

(a) Todo módulo tiene una $\mathcal{F}$-precubierta.

(b) Todo módulo tiene una $Add(\mathcal{F})$-precubierta.

(c) $\mathcal{F}$ es l.f.p. y la clase $\mathrm{Add}(\mathcal{F})$ es cerrada bajo sumas directas.

Demostración.

(a)$\Longleftrightarrow$(b) Es consecuencia de los Lemas 4.1.1 y 4.1.2.

(b)$\Longrightarrow$(c) Sea $M \in \mathrm{Mod}_R$ y $f : F \longrightarrow M$ un homomorfismo con $F \in \mathcal{F}$. Sabemos por hipótesis que M tiene una $\mathrm{Add}(\mathcal{F})$-precubierta $\lambda : F_M \longrightarrow M$, que puede tomarse como una $\mathcal{F}$-precubierta por la equivalencia anterior. Luego, por la definición de $\mathcal{F}$-precubierta, existe un homomorfismo $g : F \longrightarrow F_M$ tal que $f = \lambda \circ g$. Basta tomar $\mathcal{F}_M = \{F_M\}$ en la definición de l.f.p. para probar que $\mathcal{F}$ es l.f.p.

Ahora, sea $\{P_i\}_{i\in I}$ un conjunto de módulos tal que $P_i \in \mathrm{Add}(\mathcal{F})$, para cada $i \in I$. Sea $f : F \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} P_i$ una $\mathrm{Add}(\mathcal{F})$-precubierta con $F \in \mathcal{F}$, que existe por hipótesis y por el Lema 4.1.2. Considere las inclusiones $i_j : P_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} P_i$, para cada $j \in I$. Por la definición de $\mathrm{Add}(\mathcal{F})$-precubierta, existe un homomorfismo $h_j : P_j \longrightarrow F$ tal que $i_j = f \circ h_j$, para cada $j \in I$. Entonces tenemos un conjunto de homomorfismos $\{h_j : P_j \longrightarrow F\}_{j\in I}$, por la propiedad universal del coproducto (que en la categoría Mod_R son las sumas directas) tenemos que existe un homomorfismo $h : \bigoplus_{i\in I} P_i \longrightarrow F$ tal que $h_j = h \circ i_j$, para cada $j \in I$. Entonces, $f \circ h \circ i_j = f \circ h_j = i_j$, para cada $j \in I$. Esto implica, por la propiedad universal del coproducto, que $f \circ h = 1_{\bigoplus_{i\in I} P_i}$. De donde h es un monomorfismo y f es un epimorfismo. Entonces, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \ker(f) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{f} \bigoplus_{i\in I} P_i \longrightarrow 0$$

se parte. Esto implica que $F \cong \ker(f) \oplus (\bigoplus_{i\in I} P_i)$, de donde $\bigoplus_{i\in I} P_i \in \mathrm{Add}(\mathcal{F})$.

`(c)`$\Longrightarrow$`(a)` Sea $M \in \mathrm{Mod}_R$. Sea $\mathcal{F}_M$ el conjunto dado por la definición de l.f.p. Sea $S_M = \bigoplus_{F\in\mathcal{F}_M} F^{(\mathrm{Hom}(F,M))} \in \mathrm{Add}(\mathcal{F})$ por hipótesis. Sea $F_M \in \mathcal{F}_M$. Consideremos las proyecciones $\pi_{F_M^{(\mathrm{Hom}(F,M))}} : S_M \longrightarrow F_M^{(\mathrm{Hom}(F,M))}$ y $\pi_{F_M} : F_M^{(\mathrm{Hom}(F,M))} \longrightarrow F_M$, sea $\pi = \pi_{F_M} \circ \pi_{F_M^{(\mathrm{Hom}(F,M))}}$. Ahora consideremos las inclusiones $i_{F_M} : F_M \longrightarrow F_M^{(\mathrm{Hom}(F,M))}$ e $i_{F_M^{(\mathrm{Hom}(F,M))}} : F_M^{(\mathrm{Hom}(F,M))} \longrightarrow S_M$, sea $\mu : i_{F_M^{(\mathrm{Hom}(F,M))}} \circ i_{F_M}$. Vemos que $\mu \circ \pi = 1_{S_M}$. Para cada $F \in \mathcal{F}_M$ tenemos el homomorfismo canónico $\lambda_F : F^{(\mathrm{Hom}(F,M))} \longrightarrow M$ dado por $\lambda_F((f_i)_{i\in\mathrm{Hom}(F,M)}) = \sum_{i\in\mathrm{Hom}(F,M)} i(f_i)$. Por la propiedad universal de coproducto aplicada a S_M, existe un homomorfismo $\lambda : S_M \longrightarrow M$ tal que $\lambda_F = \lambda \circ i_{F^{(\mathrm{Hom}(F,M))}}$, para cada $F \in \mathcal{F}_M$.

Vamos a probar que $\lambda \circ \mu$ es una $\mathcal{F}$-precubierta de M. Sea $\gamma : F' \longrightarrow M$ un homomorfismo con $F' \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es l.f.p. existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_M$, $\epsilon : \bigoplus_{G\in\mathcal{G}} G \longrightarrow M$ y $\nu : F' \longrightarrow \bigoplus_{G\in\mathcal{G}} G$ homomorfismos, tales que $\gamma = \epsilon \circ \nu$. Para cada $G \in \mathcal{G}$, considere los homomorfismos $i_G : G \longrightarrow \bigoplus_{G\in\mathcal{G}} G$ (inclusión canónica) e $i_{\epsilon\circ i_G} : G \longrightarrow G^{(\mathrm{Hom}(G,M))}$ dado por $i_{\epsilon\circ i_G}(g) = (x_i)_{i\in\mathrm{Hom}(G,M)}$, donde $x_i = 0$ si $i \neq \epsilon \circ i_G$ y $x_i = g$ si $i = \epsilon \circ i_G$. Consideremos el conjunto de homomorfismo $\{i_{G^{(\mathrm{Hom}(G,M))}} \circ i_{\epsilon\circ i_G} : G \longrightarrow S_M\}_{G\in\mathcal{G}}$, entonces por la propiedad universal del coproducto aplicada a $\mathcal{G}$, existe un homomorfismo $\omega : \bigoplus_{G\in\mathcal{G}} G \longrightarrow S_M$ tal que $\omega \circ i_G = i_{G^{(\mathrm{Hom}(G,M))}} \circ i_{\epsilon\circ i_G}$, para cada $G \in \mathcal{G}$. Luego,

$$\lambda \circ (\omega \circ i_G) = \lambda \circ i_{G^{(\mathrm{Hom}(G,M))}} \circ i_{\epsilon\circ i_G} = (\lambda \circ i_{G^{(\mathrm{Hom}(G,M))}}) \circ i_{\epsilon\circ i_G} = \lambda_G \circ i_{\epsilon\circ i_G}.$$

Sea $g \in G$. $\lambda_G \circ i_{\epsilon\circ i_G}(g) = \lambda_G((x_i)_{i\in\mathrm{Hom}(G,M)}) = \sum_{i\in\mathrm{Hom}(G,M)} i(x_i)$, donde $x_i = 0$ si $i \neq \epsilon \circ i_G$, y $x_i = g$ si $i = \epsilon \circ i_G$. Entonces, $\sum_{i\in\mathrm{Hom}(G,M)} i(x_i) = \epsilon \circ i_G(g)$ y así, $\lambda \circ \omega \circ i_G = \epsilon \circ i_G$, para cada $G \in \mathcal{G}$. Por la propiedad universal del coproducto sobre $\mathcal{G}$, lo anterior implica que $\lambda \circ \omega = \epsilon$.

Entonces, considerando el homomorfismo $\pi \circ \omega \circ \nu : F' \longrightarrow F_M$, tenemos

$$(\lambda \circ \mu) \circ (\pi \circ \omega \circ \nu) = \lambda \circ 1_{S_M} \circ \omega \circ \nu = (\lambda \circ \omega) \circ \nu = \epsilon \circ \nu = \gamma.$$

Entonces, $\lambda \circ \nu$ es una $\mathcal{F}$-precubierta de M.

$\square$

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos:

Lema 4.1.3. Sea M un módulo. Entonces todo módulo tiene una $\mathrm{Add}(M)$-precubierta.

Demostración. Es claro que $\{M\}$ es l.f.p. Además sabemos que $\mathrm{Add}(M)$ es cerrada bajo sumas directas. Por el Teorema 4.1.1, tenemos que todo módulo tiene una $\mathrm{Add}(M)$-precubierta. $\square$

Los siguientes resultados se deben a Angeleri-Hügel y F. Coelho, ver [1].

Proposición 4.1.1.

(a) Sea $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{Mod}_R$ una clase de módulos cerrada bajo conúcleos de monomorfismos y que contiene todos los módulos inyectivos. Si $f : A \longrightarrow B$ es una $\mathcal{M}$-preenvoltura especial de A, entonces $\mathrm{coker}(f) \in^{\perp} \mathcal{M}$.

(a)* Sea $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{Mod}_R$ una clase de módulos cerrada bajo núcleos de epimorfismos y que contiene todos los módulos proyectivos. Si $g : A \longrightarrow B$ es una $\mathcal{M}$-precubierta especial de B, entonces $\ker(g) \in \mathcal{M}^{\perp}$.

Demostración. Directo de la definición de $\mathcal{M}$-preenvoltura especial. $\square$

Lema 4.1.4. Sea $M \in \mathrm{Mod}_R$.

(a) Sea $\mathcal{X} = M^{\perp}$. Si $\mathrm{pd}(M) = n$, entonces $\mathcal{X}^{\vee} = \mathrm{Mod}_R$, y todo $Y \in {}^{\perp}\mathcal{X}$ tiene $\mathrm{pd}(Y) \leq n$.

(a)* Sea $\mathcal{X} = {}^{\perp}M$. Si $\mathrm{id}(M) = n$, entonces $\mathcal{X}^{\wedge} = \mathrm{Mod}_R$, y todo $Y \in \mathcal{X}^{\perp}$ tiene $\mathrm{id}(Y) \leq n$.

Demostración. Sea $N \in \mathrm{Mod}_R$. Podemos contruir una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_n \longrightarrow 0,$$

donde I_j es inyectivo, para $1 \leq j < n$ (se toma una resolución intectiva de N hasta el $n-1$ ésimo nivel). Por el "cambio de dimensión", para cada módulo A tenemos

$$\mathrm{Ext}^i(A, I_n) \cong \mathrm{Ext}^{i+n}(A, N) \text{ para todo } i > 0.$$

En particular, $\mathrm{Ext}^i(M, I_n) \cong \mathrm{Ext}^{i+n}(M, N) = 0$, porque $i + n > n$ y $\mathrm{pd}(M) = n$. $\mathrm{Ext}^i(M, I_n) = 0$, para todo $i > 0$, implica que $I_n \in \mathcal{X}$. Además, $I_j \in \mathcal{X}$, para cada $1 \leq j < n$, por ser inyectivos. Entonces, $N \in \mathcal{X}^{\vee}$.
Falta ver que si $Y \in {}^{\perp}\mathcal{X}$ entonces $\mathrm{pd}(Y) \leq n$. Sea $Y \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. Tenemos $0 = \mathrm{Ext}^i(Y, I_n) \cong \mathrm{Ext}^{i+n}(Y, N)$, para todo $i > 0$, porque $Y \in {}^{\perp}\mathcal{X}$ e $I_n \in \mathcal{X}$. $\mathrm{Ext}^j(Y, -)|_{\mathrm{Mod}_R} \equiv 0$, para todo $j > n$, implica que $\mathrm{pd}(Y) \leq n$. $\square$

4.2 Pares de cotorsión generados y cogenerados

El Teorema de P. Eklof y E. Trlifaj establece que todo par de cotorsión cogenerado por un conjunto de módulos es completo. Este resultado importante fue demostrado en [10]. Para poder probarlo hacen falta varias nociones, entre ellas están el concepto de par de cotorsión cogenerado, naturalmente, y el concepto de cadena continua de submódulos. También se necesita un resultado conocido como el Lema de Eklof, que estable una propiedad importante del funtor Ext cuando se trabaja con cadenas continuas.

Definición 4.2.1. Dado λ un número ordinal y $\{M_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ una familia de submódulos de M. Diremos que tal familia es una **cadena continua de submódulos** si:

(a) $M_\alpha \subseteq M_\beta$ cuando $\alpha \leq \beta < \lambda$.

(b) $M_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$ cuando $\beta < \lambda$ es un límite ordinal.

Lema 4.2.1 (Eklof)**.** Sean M y N módulos y suponga que M es la unión de una cadena continua de submódulos de M, $\{M_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$. Si $\operatorname{Ext}^1(M_0, N) = 0$ y $\operatorname{Ext}^1(M_{\alpha+1}/M_\alpha, N) = 0$ cuando $\alpha + 1 < \lambda$, entonces $\operatorname{Ext}^1(M, N) = 0$.

Demostración. Usemos inducción transfinita. Consideremos el enunciado

$$\operatorname{Ext}^1(M_\alpha, N) = 0.$$

(I) Por hipótesis, se cumple para $\alpha = 0$.

(II) Supongamos que $\alpha + 1 < \lambda$ y que $\operatorname{Ext}^1(M_\alpha, N) = 0$. Como $\{M_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ es una cadena continua y $\alpha < \alpha+1$, tenemos que $M_\alpha \subseteq M_{\alpha+1}$. Así, podemos construir una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} M_{\alpha+1} \xrightarrow{\pi_{\alpha+1}} M_{\alpha+1}/M_\alpha \longrightarrow 0,$$

donde i_α es la inclusión y $\pi_{\alpha+1}$ es la proyección canónica.

Aplicamos $\operatorname{Ext}^1(-, N)$ a esta sucesión.

$$\operatorname{Ext}^1(M_{\alpha+1}/M_\alpha, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(M_{\alpha+1}, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(M_\alpha, N)$$

Por hipótesis, $\operatorname{Ext}^1(M_{\alpha+1}/M_\alpha, N) = 0$. Además, $\operatorname{Ext}^1(M_\alpha, N) = 0$. Entonces,

$$\operatorname{Ext}^1(M_{\alpha+1}, N) = 0.$$

(III) Sea $\beta < \lambda$ un límite ordinal, supongamos que $\operatorname{Ext}^1(M_\alpha, N) = 0$ para todo $\alpha < \beta$. Veamos que $\operatorname{Ext}^1(M_\beta, N) = 0$. Probemos primero que cualquier extensión de N por M_β

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} M_\beta \longrightarrow 0$$

se parte.

Como $\alpha < \beta$, sabemos que $M_\alpha \subseteq M_\beta$. Así, $g^{-1}(M_\alpha) \subseteq G$. Sea $f(n) \in \mathrm{Im}(f)$. Como la sucesión anterior es exacta, se tiene que $g(f(n)) = 0 \in M_\alpha$. Luego, $f(n) \in g^{-1}(M_\alpha)$. Así, $\mathrm{Im}(f) \subseteq g^{-1}(M_\alpha)$. Por lo que tiene sentido considerar $f : N \longrightarrow g^{-1}(M_\alpha)$, que es un monomorfismo.

Por otro lado, consideremos $g|_{g^{-1}(M_\alpha)} : g^{-1}(M_\alpha) \longrightarrow M_\alpha$, que es un epimorfismo.

$\ker(g|_{g^{-1}(M_\alpha)}) = g^{-1}(M_\alpha) \cap \ker(g) = g^{-1}(M_\alpha) \cap \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f)$. Por lo tanto, la sucesión

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} g^{-1}(M_\alpha) \xrightarrow{g|_{g^{-1}(M_\alpha)}} M_\alpha \longrightarrow 0$$

es exacta.

Como $\mathrm{Ext}^1(M_\alpha, N) = 0$, tenemos que la sucesión anterior se parte. De donde existe $s_\alpha : M_\alpha \longrightarrow g^{-1}(M_\alpha)$ tal que $g|_{g^{-1}(M_\alpha)} \circ s_\alpha = 1_{M_\alpha}$. Usaremos inducción transfinita para probar que si $\alpha \leq \alpha' < \beta$, entonces $s_{\alpha'}|_{M_\alpha} = s_\alpha$ (es decir, las secciones s_α son compatibles).

(i) Para $\alpha' = 0$ no hay nada que probar.

(ii) Veamos que existe una sección $s_{\alpha+1} : M_{\alpha+1} \longrightarrow g^{-1}(M_{\alpha+1})$ tal que $s_{\alpha+1}|_{M_\alpha} = s_\alpha$. Sabemos que $\mathrm{Ext}^1(M_{\alpha+1}, N) = 0$, de donde existe $t : M_{\alpha+1} \longrightarrow g^{-1}(M_{\alpha+1})$ tal que $g|_{g^{-1}(M_{\alpha+1})} \circ t = 1_{M_{\alpha+1}}$. Consideremos el morfismo $s_\alpha - t|_{M_\alpha}$. Sea $x \in M_\alpha$, $g(s_\alpha(x) - t|_{M_\alpha}(x)) = g(s_\alpha(x)) - g(t(x)) = x - x = 0$. Entonces tiene sentido definir $s_\alpha - t|_{M_\alpha} : M_\alpha \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$, pues $\mathrm{Im}(s_\alpha - t|_{M_\alpha}) \subseteq \ker(g) = \mathrm{Im}(f)$. Sabemos que $\mathrm{Im}(f) \cong N$ porque f es un monomorfismo, entonces $\mathrm{Ext}^1(M_{\alpha+1}/M_\alpha, \mathrm{Im}(f)) \cong \mathrm{Ext}^1(M_{\alpha+1}/M_\alpha, N) = 0$. Consideremos nuevamente la sucesión

$$0 \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow M_{\alpha+1} \longrightarrow M_{\alpha+1}/M_\alpha \longrightarrow 0.$$

Aplicamos $\mathrm{Ext}^1(-, \mathrm{Im}(f))$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_{\alpha+1}/M_\alpha, \mathrm{Im}(f)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_{\alpha+1}, \mathrm{Im}(f)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}(M_\alpha, \mathrm{Im}(f)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M_{\alpha+1}/M_\alpha, \mathrm{Im}(f)) = 0$$

es exacta. Luego, para $s_\alpha - t|_{M_\alpha} : M_\alpha \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ existe $u : M_{\alpha+1} \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ tal que $s_\alpha - t|_{M_\alpha} = u \circ i_\alpha$. Sea $s_{\alpha+1} = t + u$ y $x \in M_\alpha$. $s_{\alpha+1}(x) = t(x) + u(x) = t(x) + s_\alpha(x) - t(x) = s_\alpha(x)$. Así, $s_{\alpha+1}|_{M_\alpha} = s_\alpha$.

`(iii)` Sea γ un límite ordinal y supongamos que tenemos secciones compatibles para todo $\alpha < \gamma$. Luego, para cada $\alpha < \gamma$ existe una sección s_γ^α tal que $s_\gamma^\alpha|_{M_\alpha} = s_\alpha$.

Debemos construir una sección s_γ que sea compatible con s_α para todo $\alpha \leq \gamma$. Sea $s_\gamma : M_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} M_\alpha \longrightarrow g^{-1}(M_\gamma) = g^{-1}(\bigcup_{\alpha<\gamma} M_\alpha)$ la aplicación definida por $s_\gamma(x) = s_\gamma^\alpha(x)$ si $x \in M_\alpha$. Primero veamos que s_γ está bien definida. Supongamos que existe otro α' tal que $x \in M_{\alpha'}$. Sabemos que $\{\mathrm{Ord}(A) : A \text{ es un conjunto}\}$ es un conjunto bien ordenado. Así, $\{\alpha, \alpha'\}$ tiene un primer elemento. Sin pérdida de generalidad, supongamos que α es ese primer elemento. Luego, $\alpha < \alpha'$. Entonces $s_{\alpha'}|_{M_\alpha} = s_\alpha$, de donde $M_\alpha \subseteq M_{\alpha'}$ y $x \in M_\alpha$ implican $s_{\alpha'}(x) = s_\alpha(x)$. Por lo tanto, s_γ está bien definida.

Es claro que s_γ es una sección, porque cada s_γ^α lo es. Ahora, sea $\alpha < \gamma$ y $x \in M_\alpha$. Luego, $s_\gamma(x) = s_\gamma^\alpha(x) = s_\alpha(x)$. Así, $s_\gamma|_{M_\alpha} = s_\alpha$. Por lo tanto, s_γ es compatible con toda sección s_α con $\alpha \leq \gamma$.

Por el principio de inducción transfinita, podemos construir secciones compatibles s_α tales que $s_{\alpha'}|_{M_\alpha} = s_\alpha$ si $\alpha \leq \alpha' < \beta$.

Luego, existe una sección $s_\beta : M_\beta \longrightarrow G$ (se construye tal cual como s_γ). Así, la sucesión

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow M_\beta \longrightarrow 0$$

se parte. Entonces, tenemos que toda extensión de N por M_β se parte. Esto implica que $\mathrm{Ext}^1(M_\beta, N) = 0$ (ver [19, Corolario 7.20]).

Entonces, por el principio de inducción transfinita tenemos que $\mathrm{Ext}^1(M_\alpha, N) = 0$, para todo $\alpha < \lambda$.

Tenemos que cada extensión de N por M_α se parte, de donde es fácil probar que cada extensión de N por M se parte, basta tomar la sección $s : M \longrightarrow G$ dada por $s(x) = s_\alpha(x)$ si $x \in M_\alpha$ (pues $M = \bigcup_{\alpha<\gamma} M_\alpha$), donde cada s_α es la sección resultante del hecho de que cada extensión

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow 0$$

se parte. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1(M, N) = 0$.

$\square$

Definición 4.2.2. Se dice que una clase $\mathcal{D}$ de módulos **genera** al par de cotorsión $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ si ${}^{\perp_1}\mathcal{D} = \mathcal{A}$. De forma dual, se dice que una clase $\mathcal{G}$ de módulos **cogenera** al par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ si $\mathcal{G}^{\perp_1} = \mathcal{B}$.

Ejemplo 4.2.1. El par de cotorsión $(\mathrm{Mod}_R, \mathcal{I}_0)$ está cogenerado por el conjunto de módulos R/I donde I es un ideal, y está generado por la clase de los módulos inyectivos.

Antes de hacer la prueba del Teorema de Eklof-Trlifaj, necesitamos dos lemas previos.

Lema 4.2.2. Si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión generado (cogenerado) por un conjunto X, entonces $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ está generado (cogenerado) por el módulo $\prod_{M\in X} M$ ($\bigoplus_{M\in X} M$).

Demostración. Sólo haremos la prueba cuando $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ está generado por X. La prueba de lo que está entre paréntesis es dual. Tenemos que ${}^{\perp_1}X = \mathcal{A}$. Sea $D = \prod_{M\in X} M$. Veamos que ${}^{\perp_1}\{D\} = \mathcal{A}$. Sea $A \in \mathcal{A}$.

$$\mathrm{Ext}^1(A, D) = \mathrm{Ext}^1(A, \Pi_{M\in X} M) \cong \prod_{M\in X} \mathrm{Ext}^1(A, M) = 0.$$

La última igualdad se debe a que $\operatorname{Ext}^1(A, M) = 0$ para todo $M \in X$ porque $A \in {}^{\perp_1}X$. Ahora, sea $A \in {}^{\perp_1}\{D\}$. Sea $M \in X$. Sabemos que $\prod_{M \in X} \operatorname{Ext}^1(A, M) = \operatorname{Ext}^1(A, D) = 0$, de donde $\operatorname{Ext}^1(A, M) = 0$ para cada $M \in X$. Así, $A \in {}^{\perp_1}X = \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\{D\}$. $\square$

Lema 4.2.3. Sea S un submódulo de P y $f : S \longrightarrow M$ un homomorfismo de módulos. Entonces, f se puede extender a P.

Demostración. Consideramos la inclusión $i : S \longrightarrow P$ junto con el cuadrado cocartesiano

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[d, "u"] \\ M \arrow[r, "v"'] & G \end{tikzcd}$$

Por la construcción del cuadrado cocartesiano vista en la prueba del Lema de Salce, sabemos que v es un monomorfismo. Entonces, podemos identificar a M con un submódulo de G. Además, se puede ver que u coincide con f en S. Entonces, $f : S \longrightarrow M$ se puede extender al morfismo $u : P \longrightarrow G$.

Recordemos que $G = P \times M/G'$, $G' = \{(s, -f(s)) : s \in S\}$, $u(p) = (p, 0) + G'$ para todo $p \in P$, y $v(m) = (0, m) + G'$ para todo $m \in M$. Probemos ahora que $G/M \cong P/S$. Sea $\alpha : P/S \longrightarrow G/v(M)$ la aplicación dada por $\alpha(p + S) = u(p) + v(M)$. Veamos primero que α está bien definida. Supongamos que $p + S = p' + S$. Luego, $p = p' + s$. Así,

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= u(p' + s) + v(M) = ((p', 0) + G' + v(M)) + ((s, 0) + G' + v(M)) \\ &= \alpha(p') + (u(s) + v(M)) = \alpha(p') + (v(f(s)) + v(M)) \\ &= \alpha(p') + (0 + v(M)) = \alpha(p'). \end{aligned}$$

Por lo que α está bien definida. Además, es fácil ver que α es un homomorfismo. Ahora veamos que α es un monomorfismo. Supongamos que $u(p) + v(M) = 0 + v(M)$. Luego, $(p, 0) + G' \in v(M)$, es decir, $(p, 0) + G' = (0, m) + G'$ para algún $m \in M$. Entonces,

$(p,-m) \in G'$. Así, $(p,-m) = (s,-f(s))$ para algún $s \in S$. De donde $p = s$ y por ende $p + S = 0 + S$. Falta ver que α es un epimorfismo. Sea $g + v(M) \in G/v(M)$. Luego,

$$\begin{aligned} g + v(M) &= (p,m) + G' + v(M) \\ &= ((p,0) + G' + v(M)) + ((0,m) + G' + v(M)) \\ &= (p,0) + G' + v(M) = \alpha(p+S). \end{aligned}$$

Por lo tanto, α es un isomorfismo y $P/S \cong G/v(M)$. Como $M \cong v(M)$, se tiene que $P/S \cong G/M$. $\square$

Ahora estamos listos para probar el Teorema de Eklof-Trlifaj, junto con otro resultado debido a Trlifaj. Tal teorema demuestra que los pares de cotorsión completos son abundantes.

Teorema 4.2.1. Sea R un anillo y $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Mod}_R$ un conjunto de módulos. Sea $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ el par de cotorsión cogenerado por $\mathcal{S}$, entonces:

(a) (Teorema de Eklof-Trlifaj). $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ es completo.

(b) (Trlifaj). Sea R un anillo y M un módulo. Denotamos por Z_M la clase de todos los sumandos directos de los módulos Z que son la unión de una cadena continua $\{Z_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ de submódulos de Z tales que Z_0 es un módulo libre y $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha \cong M$, para todo $\alpha < \lambda$. Entonces, $Z_M = {}^{\perp_1}(M^{\perp_1})$.

Demostración.

(a) Por el Lema 4.2.2 podemos asumir que $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ está cogenerado por un módulo N. Hay que ver que todo módulo tiene una $\mathcal{B}$-preenvoltura especial, es decir, que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

con $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$.

Sabemos que existe un módulo proyectivo P y un epimorfismo $P \longrightarrow N \longrightarrow 0$, de donde podemos formar una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Sea λ un número ordinal y M un módulo, podemos usar el principio de inducción transfinita para construir una cadena continua $\{M_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ tal que:

(i) $M_0 = M$.

(ii) Para cualquier $\alpha + 1 < \lambda$, cualquier morfismo $S \longrightarrow M_\alpha$ tiene una extensión $P \longrightarrow M_{\alpha+1}$.

(iii) $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ es isomorfo a $P/S \cong N$, para $\alpha + 1 < \lambda$.

(ii) y (iii) son consecuencias del Lema 4.2.3. Falta construir M_β cuando β es un límite ordinal. Basta definir $M_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$, pues queremos una cadena continua.

Tomando $X = S$ en el Lema 1.1.1 y en el Corolario 1.1.1, existe un límite ordinal λ tal que para cualquier homomorfismo $S \longrightarrow B$ hay una factorización $S \longrightarrow M_\alpha \longrightarrow B$, para algún $\alpha < \lambda$, donde $B = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$. Como λ es un límite ordinal, se tiene que $\alpha + 1 < \lambda$ y por construcción existe un homomorfismo $P \longrightarrow M_{\alpha+1}$ que extiende a $S \longrightarrow M_\alpha$. De donde, $S \longrightarrow B$ tiene una extensión $P \longrightarrow B$. Ahora consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{i} P \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

y aplicamos $\mathrm{Ext}(-, B)$ para obtener la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,B)} \mathrm{Hom}(S, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(N, B).$$

Tenemos que $\mathrm{Hom}(i, B)$ es un epimorfismo porque $(P \longrightarrow B) \circ i = S \longrightarrow B$. Entonces, $\mathrm{Ext}^1(N, B) = 0$. Luego, $B \in \mathcal{A}^{\perp_1} = \mathcal{B}$.

Sea $A = B/M$ y considere la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Hay que ver que $A \in \mathcal{A}$. Sea $A_\alpha = M_\alpha/M$. Luego,

$$A = B/M = (\bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha)/M = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha.$$

$\{A_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ es una cadena continua porque $\{M_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ lo es. Sea $D \in \mathcal{B}$. $\mathrm{Ext}^1(A_0, D) = \mathrm{Ext}^1(M_0/M, D) = \mathrm{Ext}^1(0, D) = 0$. Ahora supongamos que $\alpha + 1 < \lambda$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1(A_{\alpha+1}/A_\alpha, D) &= \mathrm{Ext}^1((M_{\alpha+1}/M)/(M_\alpha/M), D) \\ &\cong \mathrm{Ext}^1(M_{\alpha+1}/M_\alpha, D) \cong \mathrm{Ext}^1(P/S, D) \\ &\cong \mathrm{Ext}^1(N, D). \end{aligned}$$

$\mathrm{Ext}^1(N, D) = 0$ porque $D \in \mathcal{B} = \{N\}^{\perp_1}$. Entonces, $\mathrm{Ext}^1(A_{\alpha+1}/A_\alpha, D) = 0$. Por el Lema de Eklof tenemos que $\mathrm{Ext}^1(A, D) = 0$ para todo $D \in \mathcal{B}$ y por lo tanto $A \in {}^{\perp_1}\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

(b) Sea $N \in Z_M$. Luego, existe un módulo K tal que $N \oplus K \cong Z$, donde $Z = \bigcup_{\alpha<\lambda} Z_\alpha$ tal que $\{Z_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ es una cadena continua de submódulos de Z con Z_0 libre y $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha \cong M$. Como Z_0 es libre, se tiene que $Z_0 \cong R^{(J)}$, para algún conjunto J. Además,

$$\mathrm{Ext}^1(Z_0, -)|_{M^{\perp_1}} \cong \prod_J \mathrm{Ext}^1(R, -)|_{M^{\perp_1}} = 0,$$

$$\mathrm{Ext}^1(Z_{\alpha+1}/Z_\alpha, -)|_{M^{\perp_1}} \cong \mathrm{Ext}^1(M, -)|_{M^{\perp_1}} = 0.$$

Entonces, por el Lema de Eklof se tiene que $\mathrm{Ext}^1(Z, -)|_{M^{\perp_1}} = 0$, de donde

$$\mathrm{Ext}^1(N, -)|_{M^{\perp_1}} \times \mathrm{Ext}^1(K, -)|_{M^{\perp_1}} \cong \mathrm{Ext}^1(Z, -)|_{M^{\perp_1}} = 0.$$

Así, $\mathrm{Ext}^1(N, -)|_{M^{\perp_1}} = 0$. Entonces, $Z_M \subseteq^{\perp_1} (M^{\perp_1})$.

Ahora, sea $X \in {}^{\perp_1}(M^{\perp_1})$. Todo módulo es imagen epimórfica de un módulo libre, de donde podemos construir una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

con F un módulo libre. Por la prueba de la parte (a), existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow B \longrightarrow B/N \longrightarrow 0,$$

donde $B = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha \in M^{\perp_1}$, $\{M_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ es una cadena continua tal que $N_0 = N$ y $M_{\alpha+1}/M_\alpha \cong M$, para cada $\alpha < \lambda$. Por el Lema de Salce, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r] & 0 \\
 & B/N \arrow[r, "1"] \arrow[d] & B/N \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como f es un epimorfismo, se tiene que $Z = \bigcup_{\alpha<\lambda} Z_\alpha$, donde $Z_\alpha = f^{-1}(M_\alpha/N)$. Tenemos que

$$Z_0 = f^{-1}(M_0/N) = f^{-1}(N/N) = f^{-1}(0) = \ker(f) = \mathrm{Im}(F \longrightarrow Z) \cong F,$$

porque $F \longrightarrow Z$ es un monomorfismo. Así tenemos que Z_0 es un módulo libre. Además se tiene que $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha \cong M$. Tenemos que $Z \in Z_M$. Como $B \in M^{\perp_1}$ y $X \in {}^{\perp_1}(M^{\perp_1})$, la fila del medio del diagrama de Salce se parte y por lo tanto $Z \cong B \oplus X$. De donde $X \in Z_M$. Entonces, ${}^{\perp_1}(M^{\perp_1}) \subseteq Z_M$. Por lo tanto, $Z_M = {}^{\perp_1}(M^{\perp_1})$.

$\square$

Observación 4.2.1.

1. Sea M un módulo. Del Teorema de Eklof-Trlifaj se tiene que todo módulo tiene una $M^{\perp_1}$-preenvoltura especial. Usando el "cambio de dimensión", se puede generalizar que todo módulo tiene una $M^{\perp}$-preenvoltura especial.

2. Supongamos que $R \in \mathcal{S}$, donde $\mathcal{S}$ es un conjunto de módulos. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ el par de cotorsión cogenerado por $\mathcal{S}$. Entonces $\mathcal{A}$ consiste en todos los sumandos directos de módulos Z tales que $Z = \bigcup_{\alpha<\lambda} Z_\alpha$, donde $\{Z_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ es una cadena continua de submódulos de Z, tal que $Z_0, Z_{\alpha+1}/Z_\alpha$ son isomorfos a sumas directas de elementos de $\mathcal{S}$.

   En efecto, sabemos que $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}(\mathcal{S}^{\perp_1})$. Sea $M = \bigoplus_{S\in\mathcal{S}} S$. Es fácil ver que ${}^{\perp_1}(M^{\perp_1}) = \mathcal{A}$. Por el resultado anterior, tenemos que $Z_M = {}^{\perp_1}(M^{\perp_1}) = \mathcal{A}$. Sabemos que Z_M son todos los sumandos directos de módulos Z tales que $Z = \bigcup_{\alpha<\lambda} Z_\alpha$, donde $\{Z_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ es una cadena continua de submódulos de Z tales que Z_0 es libre y $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha \cong M$. Tenemos que $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha$ es isomorfo a una suma directa de elementos de $\mathcal{S}$. Además, $Z_0 \cong R^{(J)}$, para algún conjunto J, y como $R \in \mathcal{S}$ nos queda que Z_0 es también isomorfo a una suma directa de elementos de $\mathcal{S}$.

4.3 Módulos tilting

Definición 4.3.1. Un módulo $T \in \mathrm{Mod}_R$ es **tilting** si:

`(T1)` $\mathrm{pd}(T) < \infty$.

`(T2)` $\mathrm{Ext}^i(T, T^{(I)}) = 0$, para todo $i > 0$ y para todo conjunto I.

`(T3)` $\mathrm{coresdim}_{\mathrm{Add}(T)}(R) < \infty$.

Ejemplo 4.3.1. Los ejemplos de módulos tilting no son nada triviales. Algunos de los más conocidos son los módulos tilting de Fuchs, Bass, Ringel y Lukas. Cada uno de estos ejemplos requiere la definición de algunos conceptos y de la presentación de ciertos resultados que escapan del contexto general de este trabajo. En [12, Ejemplos 5.1.2, 5.1.3, 5.1.4, 5.1.5 y 5.1.6] pueden estudiarse con más profundidad.

Proposición 4.3.1. Sea T un módulo tilting, $\mathcal{B} = T^{\perp}$ y $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}(T^{\perp})$. Entonces $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión completo y hereditario. Tal par se conoce como **par de cotorsión tilting inducido por** T.

Demostración.

(I) Veamos que $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\perp_1}$. Sea $B \in \mathcal{B}$. Luego, $\mathrm{Ext}^j(T, B) = 0$, para todo $j > 0$. Queremos ver que $\mathrm{Ext}^1(X, B) = 0$ para todo $X \in {}^{\perp_1}(T^{\perp})$. Sea $X \in {}^{\perp_1}(T^{\perp}) = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$. Luego,

$$\mathrm{Ext}^1(X, B) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Ext}^1(-, B)|_{{}^{\perp_1}\mathcal{B}} \equiv 0 \Longrightarrow B \in ({}^{\perp_1}\mathcal{B})^{\perp_1}.$$

Ahora, sea $X \in ({}^{\perp_1}\mathcal{B})^{\perp_1}$. Luego, $\mathrm{Ext}^j(Y, X) = 0$ para todo $Y \in {}^{\perp_1}\mathcal{B}$, porque ${}^{\perp_1}\mathcal{B}$ es resoluble. De donde, $\mathrm{Ext}^j(T, -)|_{\mathcal{B}} \equiv 0$, para todo $j > 0$. Luego, $T \in {}^{\perp}\mathcal{B}$. Así, $\mathrm{Ext}^j(T, X) = 0$ y $X \in T^{\perp} = \mathcal{B}$.

(II) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es completo: basta ver que todo módulo tiene una $\mathcal{B}$-preenvoltura especial, es decir, una $T^{\perp}$-preenvoltura especial, pero esto es consecuencia del Teorema de Eklof-Trlijaf.

(III) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es hereditario: es inmediato porque $\mathcal{B} = T^{\perp}$ es corresoluble.

$\square$

Vamos a ver que los axiomas de la definición anterior ayudan a la existencia de $\mathrm{Add}(M)$-preenvolturas de R, para cualquier módulo M.

Lema 4.3.1. Sea $M \in \mathrm{Mod}_R$. Si M satisface (T2) y (T3), entonces:

(a) Existe una $\mathrm{Add}(M)$-preenvoltura de R.

(b) Para cada $X \in M^{\perp}$ existe un epimorfismo $M' \longrightarrow X$ con $M' \in \mathrm{Add}(M)$.

Demostración. (a) Sea $\mathcal{X} = M^{\perp}$. Por (T3) existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{f_0} M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_n} M_n \longrightarrow 0,$$

con $M_i \in \mathrm{Add}(M)$, $0 \leq i \leq n$. Veamos que $M_i \in^{\perp} \mathcal{X}$. $M_i \in \mathrm{Add}(M)$ implica que existe un conjunto J y un módulo K_i tales que $M^{(J)} \cong M_i \oplus K_i$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^j(M_i, X) \times \mathrm{Ext}^j(K_i, X) &\cong \mathrm{Ext}^j(M_i \oplus K_i, X) \cong \mathrm{Ext}^j(M^{(J)}, X) \\ &\cong \prod_J \mathrm{Ext}^j(M, X) = 0. \end{aligned}$$

Así, $\mathrm{Ext}^j(M_i, X) = 0$ y por lo tanto $M_i \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. Sabemos que ${}^{\perp}\mathcal{X}$ es resoluble, de donde ${}^{\perp}\mathcal{X}$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos. Luego, $K_n = \ker(f_n) = \mathrm{Im}(f_{n-1}) \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. Entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_{n-1} \xrightarrow{i} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \mathrm{Im}(f_{n-1}) \longrightarrow 0,$$

con $M_{n-1}, \mathrm{Im}(f_{n-1}) \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. De donde $K_{n-1} \in {}^{\perp}\mathcal{X}$.

Inductivamente, tenemos que todos los K_i pertenecen a ${}^{\perp}\mathcal{X}$. Luego, $\mathrm{Ext}^j(K_i, -)|_{\mathcal{X}} \equiv 0$, para todo $j > 0$. En particular, $\mathrm{Ext}^1(K_2, X) = 0$, para todo $X \in \mathcal{X}$. Ahora cosideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{f_0} M_0 \xrightarrow{f_1} K_2 \longrightarrow 0.$$

Veamos que f_0 es una $\mathrm{Add}(M)$-preenvoltura de R. Sea $Z \in \mathcal{X}$. Como $\mathrm{Ext}^1(K_2, Z) = 0$, tenemos que $\mathrm{Hom}(f_0, Z) : \mathrm{Hom}(M_0, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R, Z)$ es sobreyectivo. Entonces, $f_0 : R \longrightarrow M_0$ es una $\mathcal{X}$-preenvoltura de R. Por (T2), se tiene $\mathrm{Add}(M) \subseteq \mathcal{X}$. Además, $M_0 \in \mathrm{Add}(M)$. De donde, f_0 es una $\mathrm{Add}(M)$-preenvoltura de R.

(b) Sea $X \in M^{\perp}$. Veamos que existe un epimorfismo $M' \longrightarrow X$, con $M' \in \mathrm{Add}(M)$. Ya vimos que $f_0 : R \longrightarrow M_0$ es una $\mathcal{X}$-preenvoltura de R. $\mathrm{Hom}(f_0, X) : \mathrm{Hom}(M_0, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R, X)$ es un epimorfismo, para todo $X \in \mathcal{X}$. Sabemos que X es imagen epimórfica de un módulo libre. De donde existe un conjunto J y un epimorfismo $R^{(J)} \xrightarrow{h} X \longrightarrow 0$. Consideremos las inclusiones $i_j : R \longrightarrow R^{(J)}$. Sea $h_j = h \circ i_j \in \mathrm{Hom}(R, X)$. Como $\mathrm{Hom}(f_0, X)$ es un epimorfismo, para cada j existe $g_j : M_0 \longrightarrow X$ tal que $h_j = g_j \circ f_0$. Ahora consideremos el morfismo $g : M_0^{(J)} \longrightarrow X$ dado por $g((m_j)_{j\in J}) = \sum_J g_j(m_j)$, con $m_j \in M_0$. Veamos que g es un epimorfismo. Sea $x \in X$. Como h es un epimorfismo, existe $(r_j)_{j\in J} \in R^{(J)}$ tal que $x = h((r_j)_{j\in J})$. Sea $x_j = g_j \circ f_0(r_j) = h_j(r_j) = h((y_i^j)_{i\in J})$, donde $y_i^j = \delta_{ij} r_j$. Así,

$$\begin{aligned} x &= h((r_j)_{j\in J}) = h\left(\sum_{j\in J}(y_i^j)_{i\in J}\right) = \sum_{j\in J} h((y_i^j)_{i\in J}) \\ &= \sum_{j\in J} x_j = \sum_{j\in J} g_j(f_0(r_j)) = g((f_0(r_j))_{j\in J}) \end{aligned}$$

y g es un epimorfismo de $M_0^{(J)}$ sobre X. Además, $M_0^{(J)} \in \mathrm{Add}(M_0) \subseteq \mathrm{Add}(M)$, porque $M_0 \in \mathrm{Add}(M)$.

□

Lema 4.3.2. Sea $M \in \mathrm{Mod}_R$ tal que M satisface (T2) y (T3). Sea $\mathcal{X} = M^{\perp}$. Entonces,

(a) Para cada $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M' \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

con $M' \in \mathrm{Add}(M)$ y $K \in \mathcal{X}$ ($\mathrm{Add}(M)$ es un genenador de $\mathcal{X}$).

(b) Cada morfismo $A \longrightarrow X$ con $A \in {}^{\perp}\mathcal{X}$ y $X \in \mathcal{X}$ se factoriza a través de $\mathrm{Add}(M)$. En particular, tenemos $\mathrm{Add}(M) = \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$.

Demostración.

(a) Sea $X \in \mathcal{X}$. Por el Lema 4.1.3 existe una $\mathrm{Add}(M)$-precubierta de X, digamos $g : M' \longrightarrow X$. Veamos que g es un epimorfismo. Por el Lema 4.3.1 existe un epimorfismo $g'' : M'' \longrightarrow X$. Sabemos que la aplicación $\mathrm{Hom}(M'', g) : \mathrm{Hom}(M'', M') \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'', X)$ es sobreyectiva. Luego, existe $h : M'' \longrightarrow M'$ tal que $g'' = g \circ h$. Sea $x \in X$, existe $m'' \in M''$ tal que $x = g''(m'')$. Así, $x = g(h(m''))$ y g es un epimorfismo. Sea $K = \ker(g)$. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M' \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0.$$

Falta ver que $K \in \mathcal{X} = M^{\perp}$.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, M') \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(M, X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M, K) = 0,$$

porque g^* es epimorfismo. $\mathrm{Ext}^1(M, M') = 0$ porque $M' \in \mathrm{Add}(M)$ y por (T2). Aplicando $\mathrm{Ext}(M, -)$, se tiene

$$\mathrm{Ext}^i(M, X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(M, K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(M, M').$$

$X \in \mathcal{X} \Longrightarrow \mathrm{Ext}^i(M, X) = 0$. Y $\mathrm{Ext}^{i+1}(M, K) = 0$ porque $M' \in \mathrm{Add}(M)$ y por (T2). De donde, $\mathrm{Ext}^{i+1}(M, K) = 0$, para todo $i > 0$. Entonces $\mathrm{Ext}^j(M, K) = 0$, para todo $j > 0$. Por lo tanto, $K \in \mathcal{X}$.

(b) Sea $f : A \longrightarrow X$ con $A \in {}^{\perp}\mathcal{X}$ y $X \in \mathcal{X}$. Recordemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M' \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0 \ (1)\ .$$

$K \in \mathcal{X}$ y $A \in {}^{\perp}\mathcal{X} \Longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A, K) = 0$. Entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, M') \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A, K) = 0,$$

y por lo tanto la sucesión (1) se parte. Así, existe $h : A \longrightarrow M'$ tal que $f = g \circ h$, dando la factorización deseada.

Por ver que $\mathrm{Add}(M) = \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$. Sea $A \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$ y consideremos la identidad $1_A : A \longrightarrow A$. Sabemos que 1_A se factoriza a través de $\mathrm{Add}(M)$. $1_A = g \circ h$, donde $g : M' \longrightarrow A$ y $h : A \longrightarrow M'$, con $M' \in \mathrm{Add}(M)$. Luego, la sucesión (1) se parte y por lo tanto $M' \cong A \oplus K$. Así, $A \oplus K \in \mathrm{Add}(M) \Longrightarrow A \in \mathrm{Add}(M)$.

Ahora, sea $A \in \mathrm{Add}(M)$. Por (T2), $\mathrm{Ext}^1(M, A) = 0$. Así, $A \in M^{\perp} = \mathcal{X}$. Como $A \in \mathrm{Add}(M)$, existe un conjunto J y un módulo N tal que $M^{(J)} \cong A \oplus N$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^j(A, X) \times \mathrm{Ext}^j(N, X) &\cong \mathrm{Ext}^j(A \oplus N, X) \cong \mathrm{Ext}^j(M^{(J)}, X) \\ &= \prod_J \mathrm{Ext}^j(M, X).\end{aligned}$$

Pero $\mathrm{Ext}^j(M, X) = 0$ por (T2). Así que $\mathrm{Ext}^j(A, X) = 0$. De donde $A \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$. Así, $\mathrm{Add}(M) = \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$.

$\square$

El siguiente teorema muestra que la existencia de $\mathcal{X}$-preenvolturas especiales para cuaquier módulo está ligada a la existencia de un módulo tilting cuya clase ortogonal derecha es igual a $\mathcal{X}$.

Teorema 4.3.1. Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Mod}_R$, cerrada bajo conúcleos de monomorfismos y sumandos directos, y tal que $\mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$ es cerrada bajo coproductos. Entonces son equivalentes:

(a) Existe un módulo tilting T con $\mathrm{pd}(T) \leq n$ tal que $\mathcal{X} = T^{\perp}$.

(b) Cada módulo tiene una $\mathcal{X}$-preenvoltura especial y todo $Y \in {}^{\perp}\mathcal{X}$ tiene $\mathrm{pd}(Y) \leq n$.

Demostración.

(a)$\Longrightarrow$(b) Sea A un módulo. Por el Teorema de Eklof-Trlijaf, A tiene una $T^{\perp}$-preenvoltura especial. De donde existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

con $B \in T^{\perp} = \mathcal{X}$ y $C \in {}^{\perp_1}\mathcal{X}$.

Ahora, sea $Y \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. Por el Lema 4.1.4 (a), $\mathrm{pd}(T) \leq n \Longrightarrow \mathrm{pd}(Y) \leq n$.

`(b)`$\Longrightarrow$`(a)` Sea $A \in \mathrm{Mod}_R$. Veamos que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_0} N_0 \xrightarrow{f_1} N_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} N_n \longrightarrow 0,$$

con $N_i \in \mathcal{X}$ y $\mathrm{coker}(f_i) \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. A tiene una $\mathcal{X}$-preenvoltura especial, de donde existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_0} N_0 \xrightarrow{g_0} C_1 \longrightarrow 0,$$

donde $N_0 \in \mathcal{X}$ y $C_1 = \mathrm{coker}(f_0) \in {}^{\perp_1}\mathcal{X}$. Aplicamos el mismo procedimiento a C_1. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{g_1} N_1 \xrightarrow{g_2} C_2 \longrightarrow 0,$$

con $N_1 \in \mathcal{X}$ y $C_2 = \mathrm{coker}(g_1) \in {}^{\perp_1}\mathcal{X}$. Considerando el homomorfismo $f_1 = g_1 \circ g_0$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_0} N_0 \xrightarrow{f_1} N_1 \xrightarrow{g_2} C_2 \longrightarrow 0.$$

Siguiendo este procedimiento, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_0} N_0 \xrightarrow{f_1} N_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_n} N_n \longrightarrow C_{n+1} \longrightarrow 0,$$

con $N_j \in \mathcal{X}$ para $0 \leq j \leq n$, y $C_j = \mathrm{coker}(f_{j-1}) \in {}^{\perp_1}\mathcal{X}$ para $1 \leq j \leq n+1$.

Luego, $\mathrm{Ext}^1(C_j, X) = 0$, para todo $X \in \mathcal{X}$. Ahora, sea I un módulo inyectivo. Consideremos una $\mathcal{X}$-preenvoltura especial de I

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

con $X \in \mathcal{X}$ y ${}^{\perp_1}\mathcal{X}$. Además, $\mathrm{Ext}^1(Y, I) = 0$ porque I es inyectivo. Entonces la sucesión anterior se parte y por lo tanto $X \cong I \oplus Y$. Así, $I \oplus Y \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumandos directos, se tiene que $I \in \mathcal{X}$. Por lo que $\mathcal{X}$ es una clase cerrada bajo conúcleos de monomorfismos que contiene los módulos inyectivos, por la Proposición 2.1.2 (b), se tiene que $C_i \in {}^{\perp}\mathcal{X}$, para todo $i = 0, ..., n+1$. Entonces tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_0} N_0 \xrightarrow{f_1} N_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} N_n \longrightarrow C_{n+1} \longrightarrow 0,$$

con $N_i \in \mathcal{X}$ y $C_i \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. Así, $\mathrm{Ext}^i(C_{n+1}, N_j) = 0$ para $j = 0, ..., n$. Entonces, $N_0, ..., N_{n-1} \in C_{n+1}^{\perp}$.

Ahora considere la sucesión del paso $n-1$.

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow N_0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_{n-1} \longrightarrow C_n \longrightarrow 0.$$

Por el "cambio de dimensión" sabemos que $\mathrm{Ext}^1(C_{n+1}, C_n) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}(C_{n+1}, A)$.

$C_{n+1} \in {}^{\perp}\mathcal{X} \Longrightarrow \mathrm{pd}(C_{n+1}) \leq n$, por hipótesis. Y $\mathrm{pd}(C_{n+1}) \leq n \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}(C_{n+1}, A) = 0$. Así, $\mathrm{Ext}^1(C_{n+1}, C_n) = 0$. De donde la sucesión

$$0 \longrightarrow C_n \longrightarrow N_n \longrightarrow C_{n+1} \longrightarrow 0$$

se parte y $N_n \cong C_n \oplus C_{n+1}$. Como $N_n \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumando directos, se tiene que $C_n \in \mathcal{X}$. Hemos construído una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow N_0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_{n-1} \longrightarrow C_n \longrightarrow 0 \ (1) \ ,$$

donde $N_j \in \mathcal{X}$ para $j = 0, ..., n-1$ y $C_n \in \mathcal{X}$.

Veamos ahora que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow B_0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_n \longrightarrow 0 \ (2) \ ,$$

con $B_j \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$. Por lo anterior, tenemos la sucesión (2) pero con $B_j \in \mathcal{X}$. Veamos primero que $R \in {}^{\perp}\mathcal{X}$, es decir, $\mathrm{Ext}^j(R, X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}$. Como R es un módulo libre, tenemos que R es proyectivo y por lo tanto $R \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. Consideremos la sucesión

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow B_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow 0.$$

Como $R, C_1 \in {}^{\perp}\mathcal{X}$ y ${}^{\perp}\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones, tenemos que $B_0 \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. Inductivamente se tiene que $B_j \in {}^{\perp}\mathcal{X}$, para todo $j = 0, ..., n$. De donde, $B_j \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$.

Ahora, sea $T = \bigoplus_{i=0}^{n} B_i$. Veamos que T es un módulo tilting. Por la sucesión (2), tenemos que T satisface (T3). $T \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$ porque $\mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$ es cerrada bajo coproductos. Así, $T \in {}^{\perp}\mathcal{X}$ y por hipótesis $\mathrm{pd}(T) \leq n$. Así tenemos que T satisface (T1).

Sea J un conjunto. Como $T \in {}^{\perp}\mathcal{X}$ y $T^{(J)} \in \mathcal{X}$, se tiene que $\mathrm{Ext}^i(T, T^{(J)}) = 0$. Probando que T satisface (T2).

Por lo tanto, T es un módulo tilting.

Sólo falta probar que $\mathcal{X} = T^{\perp}$. Probemos primero que $\mathcal{X} \subseteq T^{\perp}$. Sea $X \in \mathcal{X}$. Hay que ver que $\mathrm{Ext}^j(T, X) = 0$, para todo $j > 0$.

$$\mathrm{Ext}^j(T, X) = \mathrm{Ext}^j(\bigoplus_{i=1}^{n} B_i, X) \cong \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Ext}^j(B_i, X) = 0,$$

porque $B_i \in {}^{\perp}\mathcal{X}$.

Probemos ahora que $T^{\perp} \subseteq \mathcal{X}$. Primero veamos que $\mathrm{Add}(T) = \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$.

`(I)` $\mathrm{Add}(T) \subseteq \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$: sea $X \in \mathrm{Add}(T)$. Luego, existe un conjunto J y un módulo N tal que $X \oplus N \cong T^{(J)}$. $T^{(J)} \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$ porque $T \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$ y $\mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$ es cerrada bajo coproductos. Así, $X \oplus N \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$. $N \in \mathcal{X}$ porque $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumandos directos, y es fácil ver que $N \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. Entonces $N \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$.

`(II)` $\mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Add}(T)$: sea $X \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$. Luego, $X \in T^{\perp}$. Por el Lema 4.3.2, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

con $K_0 \in T^{\perp}$ y $M_0 \in \mathrm{Add}(T)$. Repitiendo el proceso varias veces, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_1} M_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

con $K_n \in T^{\perp}$ y $M_j \in \text{Add}(T)$. Por "cambio de dimensión" tenemos

$$\text{Ext}^1(K_{n-1}, K_n) \cong \text{Ext}^{1+n}(X, K_n).$$

Sabemos que $X \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. Por hipótesis, $\text{pd}(X) \leq n$. Así,

$$\text{Ext}^{n+1}(X, K_n) = 0.$$

De donde $\text{Ext}^1(K_{n-1}, K_n) = 0$. Podemos tomar $K_i = \ker(f_i)$. Así, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M_n \longrightarrow \text{Im}(f_n) = K_{n-1} \longrightarrow 0,$$

la cual se parte porque $\text{Ext}^1(K_{n-1}, K_n) = 0$. De donde $K_n \oplus K_{n-1} \cong M_n \in \text{Add}(T)$. Como $\text{Add}(T)$ es cerrada bajo sumandos directos, se tiene que $K_n \in \text{Add}(T) \subseteq \mathcal{X}$. Sabemos que $K_{n-1} \cong \text{coker}(K_n \longrightarrow M_n)$ y que $\text{coker}(K_n \longrightarrow M_n) \in \mathcal{X}$ porque $\mathcal{X}$ es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos. Luego, $K_{n-1} \in \mathcal{X}$. Inductivamente, tenemos que $K_0 \in \mathcal{X}$. $X \in {}^{\perp}\mathcal{X}$ y $K_0 \in \mathcal{X} \implies \text{Ext}^1(X, K_0) = 0$. De donde la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

se parte y $M_0 \cong K_0 \oplus X$. $M_0 \in \text{Add}(T)$ y $\text{Add}(T)$ cerrada bajo sumandos directos implica que $X \in \text{Add}(T)$. Por lo tanto, $\mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X} = \text{Add}(T)$.

Ahora, sea $A \in T^{\perp}$. Sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_0} N_0 \xrightarrow{f_1} N_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_n} N_n \longrightarrow 0,$$

con $N_i \in \mathcal{X}$ y $\text{coker}(f_j) \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. Como $N_n \cong \text{coker}(f_{n-1})$, nos queda que $N_n \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. Así, $N_n \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X} = \text{Add}(T)$. Ahora consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow N_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow 0,$$

con $A \in T^{\perp}$ y $N_0 \in T^{\perp}$. $T^{\perp}$ es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos por ser corresoluble, por lo que $C_1 \in T^{\perp}$. Inductivamente, $C_i \in T^{\perp}$. Veamos que

$\text{Ext}^1(C_1, A) = 0$. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow N_{n-1} \longrightarrow N_n \longrightarrow 0.$$

Como $N_n \in \text{Add}(T)$, existe un módulo Y_n y un conjunto J tales que $N_n \oplus Y_n \cong T^{(J)}$. Usando el argumento acostumbrado, se prueba que $\text{Ext}^1(N_n, C_{n-1}) = 0$. Por lo que la sucesión anterior se parte y $C_{n-1} \oplus N_n \cong N_{n-1}$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumandos directos, se tiene que $C_{n-1} \in \mathcal{X}$. De donde $C_{n-1} \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X} = \text{Add}(T)$. Siguiendo este procedimiento de manera inductiva, se tiene que $C_i \in \text{Add}(T)$ para cada i. Así tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow N_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow 0,$$

con $C_1 \in \text{Add}(T)$. Nuevamente por el argumento de costumbre, se prueba que $\text{Ext}^1(C_1, A) = 0$. Por lo que la sucesión anterior se parte y $N_0 \cong A \oplus C_1$. Y como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumandos directos, nos queda que $A \in \mathcal{X}$.

$\square$

El siguiente teorema caracteriza los pares de cotorsión tilting. Además, se da la igualdad entre varias dimensiones homológicas cuando trabajamos con tales pares.

Teorema 4.3.2. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión completo y hereditario en Mod_R con núcleo ω.

(a) Son equivalentes:

- (a1) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión tilting.
- (a2) $\text{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$ y ω es cerrado bajo coproductos.
- (a3) ω es cerrado bajo coproductos, $\text{pd}(\omega) < \infty$ y $\mathcal{A} \subseteq \omega^{\wedge}$.

(b) Si $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ es un par de cotorsión tilting inducido por un módulo tilting T, entonces

$$\mathrm{pd}(T) = \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_{\mathrm{Add}(T)}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Mod}_R).$$

Demostración.

(a)

(a1)$\Longrightarrow$(a2) $\mathcal{B} = T^{\perp}$. Por el Teorema 4.3.1, tenemos que $\mathrm{pd}(Y) \leq n$, para todo $Y \in {}^{\perp}\mathcal{B}$. ${}^{\perp_1}\mathcal{B} = {}^{\perp}\mathcal{B}$ porque $\mathcal{B}$ es corresoluble. Luego, $\mathrm{pd}(Y) \leq n$, para todo $Y \in {}^{\perp_1}\mathcal{B} = \mathcal{A}$. De donde $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) < \infty$. Por el Lema 4.3.2, tenemos $\mathrm{Add}(T) = \mathcal{B} \cap {}^{\perp}\mathcal{B} = \mathcal{B} \cap {}^{\perp_1}\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \omega$. Pero $\mathrm{Add}(T)$ es cerrada bajo coproductos, de donde ω es cerrada bajo coproductos.

(a2)$\Longrightarrow$(a1) $\mathcal{B}$ es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos por ser corresoluble.

$\mathcal{B}$ es cerrada bajo sumandos directos. En efecto, sea K un sumando directo de $\mathcal{B}$. Luego, existe un módulo $B \in \mathcal{B}$ y otro módulo K' tal que $K \oplus K' = B$.

$$\mathrm{Ext}^j(T,K) \times \mathrm{Ext}^j(T,K') \cong \mathrm{Ext}^j(T, K \oplus K') = \mathrm{Ext}^j(T,B) = 0.$$

De donde $\mathrm{Ext}^j(T,K) = 0$ para todo $j > 0$. Así, $K \in \mathcal{B}$.

$\omega = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap {}^{\perp_1}\mathcal{B} = \mathcal{B} \cap {}^{\perp}\mathcal{B}$, porque $\mathcal{B}$ es corresoluble. Entonces $\mathcal{B} \cap {}^{\perp}\mathcal{B}$ es cerrada bajo coproductos. Cada módulo tiene una $\mathcal{B}$-preenvoltura especial porque $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ es completo. Como dicho par también es hereditario, se tiene que $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}(\mathcal{A})$. Por otro lado, $\mathrm{pd}({}^{\perp_1}\mathcal{B}) = \mathrm{pd}({}^{\perp}\mathcal{B}) = \mathrm{pd}\mathcal{A} = \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$. Entonces se cumplen las hipótesis del Teorema 4.3.1, por lo que $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ es un par de cotorsión tilting.

(a2)$\Longrightarrow$(a3) Por el Teorema 3.2.2, tenemos que $\mathcal{A} \subseteq \omega^{\vee}$ y $\mathrm{pd}(\omega) < \infty$.

(a3)$\Longrightarrow$(a2) Es inmediato también por el Teorema 3.2.2.

(b) $\mathcal{B} = T^{\perp}$. Tenemos $\omega = \mathrm{Add}(T)$, por el Lema 4.3.2. Sabemos que $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ es un par de cotorsión completo y hereditario, entonces por el Teorema 3.2.2 tenemos

$$\mathrm{pd}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_{\omega}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_{\mathrm{Add}(T)}(\mathcal{A}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) =$$

$$= \operatorname{coresdim}_{\mathcal{B}}(\operatorname{Mod}_R).$$

Por ver que $\operatorname{pd}(\mathcal{A}) = \operatorname{pd}(T)$.

$\operatorname{pd}(T) = \operatorname{ínf}\{n \geq 0 : \operatorname{Ext}^j(T, -) \equiv 0$ para todo $j > n\}$.

$\operatorname{pd}(\mathcal{A}) = \sup\{\operatorname{pd}(A) : A \in \mathcal{A}\}$.

$\operatorname{pd}(A) = \operatorname{ínf}\{n \geq : \operatorname{Ext}^j(A, -) \equiv 0$ para todo $j > n\}$.

$A \in \mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B} = {}^{\perp}\mathcal{B}$. De donde $\operatorname{Ext}^j(A, B) = 0$, para todo $j > 0$ y $B \in T^{\perp}$. Así, $\operatorname{pd}(T) \leq \operatorname{pd}(\mathcal{A})$. Ahora, sea $A \in \mathcal{A}$. Por el Teorema 3.2.1, tenemos $\operatorname{pd}(A) \leq \operatorname{pd}(T)$. De donde $\operatorname{pd}(\mathcal{A}) \leq \operatorname{pd}(T)$.

Por lo tanto, $\operatorname{pd}(T) = \operatorname{pd}(\mathcal{A})$.

$\square$

Capítulo 5
DIMENSIONES FINITÍSTICAS

Este capítulo está dedicado al estudio de las conjeturas de la dimensiones finitísticas. Recordemos que la **dimensión finitística grande (derecha)** de un anillo R se define como $\mathrm{Findim}(R) = \mathrm{pd}(\mathcal{P})$, y la **dimensión finitística pequeña (derecha)** de un anillo R se define como $\mathrm{findim}(R) = \mathrm{pd}(\mathcal{P}^{<\infty})$. La primera conjetura de la dimensión finitística establece que $\mathrm{Findim}(R) = \mathrm{findim}(R)$. Mientras que la segunda conjetura establece que $\mathrm{findim}(R) < \infty$ si R es un álgebra de Artin. Los pares de cotorsión son usados para dar estimaciones de las dimensiones finitísticas.

5.1 Estimaciones para las dimensiones finitísticas

En esta sección damos una serie de resultados que conducen a encontrar algunas cotas para las dimensiones finitísticas, usando ciertos pares de cotorsión. Los resultados de esta sección fueron demostrados por Angeleri-Hügel y Mendoza en [3].

Proposición 5.1.1. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión completo y hereditario en Mod_R con núcleo ω. Asuma que $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$. Entonces:

(a) $\mathcal{A}^\wedge = \{M \in \mathrm{Mod}_R : \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) < \infty\} = \mathcal{P}$.

(b) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M)$, para todo $M \in \mathcal{P}$.

(c) $\mathrm{pd}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M)$ para todo $M \in \mathcal{P}$.

(d) $\mathcal{P} \cap \mathcal{B} = \omega^\wedge$.

Demostración.

(a) $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = 0$ porque $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es hereditario. Como $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$ y $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = 0$, por la Proposición 3.1.1 (b)* tenemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M)$, para todo $M \in \mathcal{A}^\wedge$. Luego, si $M \in \mathcal{A}^\wedge$, entonces $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M) < \infty$, de donde $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) < \infty$. Hemos probado que $\mathcal{A}^\wedge \subseteq \{M \in \mathrm{Mod}_R : \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) < \infty\}$.

Sea $M \in \mathrm{Mod}_R$ tal que $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) < \infty$. Como $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B}$, podemos usar la Proposición 3.1.1 (c)* y tenemos

$$\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) < \infty \ (1)\ .$$

De donde, $M \in \mathcal{A}^\wedge$ y $\{M \in \mathrm{Mod}_R : \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) < \infty\} \subseteq \mathcal{A}^\wedge$. Así tenemos $\mathcal{A}^\wedge = \{M \in \mathrm{Mod}_R : \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) < \infty\}$.

Ahora probemos la igualdad faltante. $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{A}$ porque $\mathcal{A}$ es resoluble. Luego, $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{P}_0}(M)$, para todo $M \in \mathrm{Mod}_R$. $\mathcal{P}_0$ es cerrada bajo sumandos directos, en efecto: sea K un sumando directo de $\mathcal{P}_0$. Luego, existe $P \in \mathcal{P}_0$ y K' módulos tales que $K \oplus K' = P$. Entonces, $\mathrm{Ext}^n(K, N) \times \mathrm{Ext}^n(K', N) \cong \mathrm{Ext}^n(K \oplus K', N) = \mathrm{Ext}^n(P, N) = 0$. De donde $\mathrm{Ext}^n(K, N) = 0$ para todo $n > 0$ y $N \in \mathrm{Mod}\ R$, es decir, $K \in \mathcal{P}_0$.

Además, sabemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}_0) = 0$. Luego, por la Proposición 3.1.1 (b)* tenemos que $\mathrm{pd}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{P}_0}(M)$. Sea $M \in \mathcal{P}$. Luego, $\mathrm{pd}(M) < \infty$. De donde $\mathrm{resdim}_{\mathcal{P}_0}(M) < \infty$. Así, $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M) < \infty$ y $M \in \mathcal{A}^\wedge$. Entonces, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}^\wedge$.

Falta probar que $\mathcal{A}^\wedge \subseteq \mathcal{P}$. $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}(\mathcal{A})$, porque $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de cotorsión completo y hereditario. Luego, $\mathrm{pd}(\mathcal{A}) < \infty$. Sea $M \in \mathcal{A}^\wedge$. $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M) < \infty$. Por la Proposición 3.1.1 (a)*, tenemos que $\mathrm{pd}(M) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{A}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M)$. Como los sumandos del lado derecho son finitos, se tiene que $\mathrm{pd}(M) < \infty$ y $M \in \mathcal{P}$.

Por lo tanto, $\mathcal{A}^\wedge = \mathcal{P}$.

(b) Sea $M \in \mathcal{P}$. Por la Proposición 3.1.1 (a)*, tenemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M)$. De la desigualdad (1) tenemos que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M)$. Por lo tanto, $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M)$.

(c) Por la Proposición 3.1.1 (a)*, tenemos $\mathrm{pd}(M) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{A}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M)$, para todo $M \in \mathrm{Mod}_R$.

(d) Sea $Y \in \omega^\wedge$. $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty \Longrightarrow \mathcal{A} \subseteq \omega^\vee$, $\mathrm{pd}(\omega) < \infty$ y $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}(\omega) = \mathrm{id}_\omega(\mathcal{A})$. Sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow W_n \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} W_1 \xrightarrow{f_0} W_0 \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0,$$

con $W_i \in \omega$, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$.

Como $\mathrm{pd}(Y) \leq \mathrm{pd}(\omega) + \mathrm{resdim}_\omega(Y) < \infty$, se tiene que $Y \in \mathcal{P}$. Por ver que $Y \in \mathcal{B} = \mathcal{A}^{\perp_1}$.

Usemos inducción sobre $\mathrm{resdim}_\omega(-)$. El resultado es trivial si $\mathrm{resdim}_\omega(Y) = 0$. Tenemos que $\mathrm{resdim}_\omega(\mathrm{Im}(f_0)) = n-1$. Por hipótesis inductiva se tiene que $\mathrm{Im}(f_0) \in \mathcal{B}$. Por otro lado, tenemos dos sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(f_0) \xrightarrow{i} W_0 \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker}(i) \longrightarrow 0 \text{ y}$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(f_0) \xrightarrow{i} W_0 \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0.$$

De donde, $Y \cong \mathrm{coker}(i)$. Pero $\mathrm{coker}(i) \in \mathcal{B}$, porque $\mathcal{B}$ es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos. Entonces, $Y \in \mathcal{B}$.

Ahora, sea $Y \in \mathcal{P} \cap \mathcal{B}$. Veamos que ω es un generador de $\mathcal{B}$. Existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow A \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

con $A \in \mathcal{A}$ y $C \in \mathcal{A}^{\perp_1} = \mathcal{B}$ porque Y posee una $\mathcal{A}$-precubierta especial. $Y, C \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ cerrada bajo extensiones implica que $A \in \omega$. Esto prueba que ω es un generador de $\mathcal{B}$. Además, $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\omega) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = 0$. Tenemos que ω es un generador proyectivo de $\mathcal{B}$. $Y \in \mathcal{B}$, $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(Y) \leq \mathrm{pd}(Y) < \infty$ porque $Y \in \mathcal{P}$. Luego, por el Lema 2.4.6 tenemos que $\mathrm{resdim}_\omega(Y) < \infty$, lo que concluye la prueba.

□

Sean $\alpha = \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P})$ y $\beta = \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}^{<\infty})$. El siguiente lema da una forma para calcular la dimensión finitística grande bajo ciertas condiciones.

Lema 5.1.1. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión completo y hereditario en Mod_R con núcleo ω. Asuma que $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$. Entonces:

(a) $\alpha = \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\omega^\wedge) = \mathrm{resdim}_{\omega}(\omega^\wedge) = \mathrm{pd}_{\omega}(\mathcal{P}) \leq \mathrm{pd}(\omega^\wedge)$.

(b) $\mathrm{pd}(\omega^\wedge) = \mathrm{Findim}(R)$.

Demostración.

(a) $\alpha = \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P})$. $\omega^\wedge = \mathcal{P} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P} \implies \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\omega^\wedge) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P})$. Tenemos que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\omega^\wedge) \leq \alpha$.

Sea $M \in \mathcal{P}$. Por la Proposición 5.1.1, tenemos $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M)$. Existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

con $B \in \mathcal{B}$ y $A \in \mathcal{A}$, porque M tiene una $\mathcal{B}$-preenvoltura especial. Además, $\mathrm{pd}(B) \leq \mathrm{máx}\{\mathrm{pd}(M), \mathrm{pd}(A)\}$. Y $\mathrm{pd}(A) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$. También, $\mathrm{pd}(M) < \infty$ porque $M \in \mathcal{P}$. Así, $\mathrm{pd}(B) < \infty$ y $B \in \mathcal{P} \cap \mathcal{B} = \omega^\wedge$. Por el Lema 2.2.1 (b), tenemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) \leq \mathrm{máx}\{\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(B), \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(A) - 1\}$. Pero $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(A) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = 0$. Así, $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(B) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\omega^\wedge)$, porque $B \in \omega^\wedge$. Luego, $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(B) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\omega^\wedge)$. Entonces, $\alpha \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\omega^\wedge)$.

Tenemos que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\omega^\wedge) \leq \alpha \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\omega^\wedge)$. Por otro lado, $\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(L) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(L) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(L)$, para todo $L \in \omega^\wedge$. Así,

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\omega^\wedge) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\omega^\wedge) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}),$$

la última desigualdad es porque $\omega \subseteq \mathcal{P}$. Tenemos que

$$\operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(\omega^{\wedge}) \leq \alpha \leq \operatorname{pd}_{\mathcal{B}}(\omega^{\wedge}) \leq \operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(\omega^{\wedge}).$$

Por lo tanto, $\alpha = \operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(\omega^{\wedge}) = \operatorname{pd}_{\mathcal{B}}(\omega^{\wedge}) \leq \operatorname{pd}(\omega^{\wedge})$, la última desigualdad es porque $\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Mod}_R$. Por el Lema 3.2.1 (b), se tiene $\operatorname{pd}_{\mathcal{B}}(M) = \operatorname{resdim}_{\omega}(M)$, para todo $M \in \omega^{\wedge}$. Tomando supremo, nos queda que $\operatorname{pd}_{\mathcal{B}}(\omega^{\wedge}) = \operatorname{resdim}_{\omega}(\omega^{\wedge})$. Por el Lema 3.2.1 (c), tenemos que $\operatorname{pd}_{\omega}(M) = \operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(M)$, para todo $M \in \mathcal{A}^{\wedge}$. Así, $\operatorname{pd}_{\omega}(\mathcal{A}^{\wedge}) = \operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{\wedge})$.

La Proposición 5.1.1 (a) implica $\mathcal{A}^{\wedge} = \mathcal{P}$. De donde, $\operatorname{pd}_{\omega}(\mathcal{P}) = \operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P})$, lo que termina la prueba.

(b) Veamos que $\operatorname{pd}(\omega^{\wedge}) = \operatorname{Findim}(R)$. $\operatorname{Findim}(R) = \operatorname{pd}(\mathcal{P})$. Además, $\omega^{\wedge} = \mathcal{P} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$. Así, $\operatorname{pd}(\omega^{\wedge}) \leq \operatorname{pd}(\mathcal{P}) = \operatorname{Findim}(R)$.

Por ver que $\operatorname{Findim}(R) \leq \operatorname{pd}(\omega^{\wedge})$. Tomando $M \in \mathcal{P}$, vimos en (a) que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

con $B \in \omega^{\wedge}$ y $A \in \mathcal{A}$. Por el Lema 2.2.1 (b), tenemos que

$$\operatorname{pd}(M) \leq \text{máx}\{\operatorname{pd}(B), \operatorname{pd}(A) - 1\}.$$

$\operatorname{pd}(A) \leq \operatorname{pd}(\mathcal{A}) = \operatorname{pd}(\omega)$, porque $\operatorname{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$, por el Teorema 3.2.2 (b). Como $B \in \omega^{\wedge}$, se tiene que $\operatorname{pd}(B) \leq \operatorname{pd}(\omega^{\wedge})$. Luego, $\text{máx}\{\operatorname{pd}(B), \operatorname{pd}(A) - 1\} \leq \operatorname{pd}(\omega^{\wedge})$. Así, $\operatorname{pd}(M) \leq \operatorname{pd}(\omega^{\wedge})$. Tomando supremo, nos queda $\operatorname{pd}(\mathcal{P}) \leq \operatorname{pd}(\omega^{\wedge})$.

Por lo tanto, $\operatorname{pd}(\omega^{\wedge}) = \operatorname{Findim}(R)$.

$\square$

Ahora vamos a dar unas estimaciones para las dimensiones finitísticas usando pares de cotorsión completos y hereditarios.

Teorema 5.1.1. Sea $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ un par de cotorsión completo y hereditario en Mod_R. Asuma que $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$. Entonces:

(a) $\alpha \leq \mathrm{Findim}(R) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + \alpha$.

(b) $\beta \leq \mathrm{findim}(R) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + \beta$.

Demostración.

(a) Por el Lema 5.1.1 (a), sabemos que $\alpha \leq \mathrm{Findim}(R)$. Por la Proposición 5.1.1 (c), $\mathrm{pd}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M)$, para todo $M \in \mathcal{P}$. Tomando supremo sobre $\omega^{\wedge} \subseteq \mathcal{P}$ nos queda: $\mathrm{pd}(\omega^{\wedge}) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\omega^{\wedge})$. Pero, $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\omega^{\wedge}) = \alpha$, por el Lema 5.1.1 (a). Además, $\mathrm{pd}(\omega^{\wedge}) = \mathrm{Findim}(R)$, por el Lema 5.1.1 (b). Así, $\mathrm{Findim}(R) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + \alpha$.

(b) $\beta = \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}^{<\infty})$. $\mathcal{P}^{<\infty} = \mathcal{P} \cap \mathrm{mod}_R$. $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M) = \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(M)$, para todo $M \in \mathcal{P}$, por la Proposición 5.1.1 (b). En particular, esto vale para todo $M \in \mathcal{P}^{<\infty}$. Así, $\mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}^{<\infty}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}^{<\infty}) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{P}^{<\infty}) = \mathrm{findim}(R)$. De donde, $\beta \leq \mathrm{findim}(R)$.

Por la Proposición 5.1.1 (c), se tiene que $\mathrm{pd}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(M)$, para todo $M \in \mathcal{P}$. En particular, esto vale para todo $M \in \mathcal{P}^{<\infty}$. Así, $\mathrm{pd}(\mathcal{P}^{<\infty}) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}^{<\infty})$. Es decir, $\mathrm{findim}(R) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + \beta$

□

5.2 Clases cerradas syzygy y cerradas cosyzygy.

En esta sección estudiaremos una clase especial de módulos, la clase $\mathcal{P}_n^{<\infty}$. Esta clase cumple con la definición de ser cerrada syzygy, cuando se trabaja con anillos coherentes por la derecha. A continuación haremos un estudio de las propiedades de esta clase.

Definición 5.2.1. Sea $M \in \mathrm{Mod}_R$ y sea

$$\Theta : \cdots \xrightarrow{f_{i+2}} P_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} P_i \xrightarrow{f_i} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de M. El módulo $\mathrm{Im}(f_i)$ se llama el **i-ésimo syzygy** de M en Θ. Sea

$$\Lambda : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{g_0} I_0 \xrightarrow{g_1} \cdots \xrightarrow{g_i} I_i \xrightarrow{g_{i+1}} I_{i+1} \xrightarrow{g_{i+1}} \cdots$$

una corresolución inyectiva de M. El módulo $\ker(g_i)$ se llama **i-ésimo cosyzygy** de M en Λ. Denotamos por $\Omega^i(M)$ la clase de todos los i-ésimos syzygys de todas las resoluciones proyectivas de M, y por $\Omega^{-i}(M)$ la clase de todos los i-ésimos cosyzygys de todas las coresoluciones inyectivas de M.

Sea $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{Mod}_R$ una clase de módulos. Para cada i, definimos $\Omega^i(\mathcal{M}) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \Omega^i(M)$ y $\Omega^{-i}(\mathcal{M}) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \Omega^{-i}(M)$. Diremos que $\mathcal{M}$ es **cerrada syzygy** si $\Omega^1(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$, y que es **cerrada cosyzygy** si $\Omega^{-1}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$.

Observación 5.2.1.

(a) Es claro que toda clase resoluble es cerrada syzygy, y que toda clase corresoluble es cerrada cosyzygy.

(b) Por el "cambio de dimensión", tenemos que

$$\mathrm{Ext}^n(M, N) \cong \mathrm{Ext}^1(\Omega^{n-1}(M), N) \cong \mathrm{Ext}^1(M, \Omega^{-n+1}(N)).$$

El siguiente lema, conocido como el lema de Auslander, es una consecuencia del Lema de Eklof.

Lema 5.2.1 (Auslander)**.** Sea M un módulo. Si M es la unión de una cadena continua de submódulos de M, $\{M_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$, tal que $M_0, M_{\alpha+1}/M_\alpha \in \mathcal{P}_n$ para todo $\alpha + 1 < \lambda$, entonces $M \in \mathcal{P}_n$.

Demostración. Tenemos que $\mathrm{Ext}^j(M_0, N) = 0$ y $\mathrm{Ext}^j(M_{\alpha+1}/M_\alpha, N) = 0$, para $j > n$. Por la observación anterior tenemos que $\mathrm{Ext}^1(\Omega^{j-1}(M_0), N) \cong \mathrm{Ext}^1(M_0, \Omega^{-j+1}(N)) = 0$ y $\mathrm{Ext}^1(\Omega^{j-1}(M_{\alpha+1}/M_\alpha), N) \cong \mathrm{Ext}^1(M_{\alpha+1}/M_\alpha, \Omega^{-j+1}(N)) = 0$. Por el Lema de Eklof, nos queda que $\mathrm{Ext}^j(M, N) \cong \mathrm{Ext}^1(M, \Omega^{-j+1}(N)) = 0$, para $j > n$, de donde $M \in \mathcal{P}_n$. □

Tenemos el siguiente lema que nos da ejemplos de clases cerradas syzygy.

Lema 5.2.2. Las clases $\mathcal{P}_n^{<\infty}$ y $\mathcal{P}^{<\infty}$ son clases cerradas syzygy, si R es un anillo coherente por la derecha.

Demostración. Sólo haremos la prueba para $\mathcal{P}_n^{<\infty}$, la prueba para $\mathcal{P}^{<\infty}$ es análoga. Queremos ver que $\Omega^1(\mathcal{P}_n^{<\infty}) \subseteq \mathcal{P}_n^{<\infty}$. Sea M un módulo finitamente presentado y

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} \cdots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de M. Como estamos trabajando en la subcategoría mod_R, con R coherente por la derecha, consideraremos que esta resolución está formada por módulos proyectivos finitamente presentados. $\mathrm{Im}(f_1)$ es imagen epimórfica de $P_1 \xrightarrow{f_1} \mathrm{Im}(f_1)$. Como todo módulo finitamente presentado es finitamente generado, se tiene que $\mathrm{Im}(f_1)$ es imagen epimórfica de un módulo finitamente generado, por lo que $\mathrm{Im}(f_1)$ es finitamente generado. Luego, tenemos que $\mathrm{Im}(f_1)$ es un submódulo finitamente generado de P_0, que es finitamente presentado, y como R es coherente por la derecha se tiene que $\mathrm{Im}(f_1)$ es finitamente presentado. Falta ver que $\mathrm{pd}(\mathrm{Im}(f_1)) \leq n$, pero esto es consecuencia del Lema 2.2.1 aplicado a la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(f_1) \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

□

Lema 5.2.3. Si $\mathcal{S}$ es una clase cerrada syzygy, entonces $\mathcal{S}^{\perp_1} = \mathcal{S}^{\perp}$. También vale el resultado dual, es decir, si $\mathcal{S}$ es una clase cerrada cosyzygy, entonces ${}^{\perp_1}\mathcal{S} = {}^{\perp}\mathcal{S}$.

Demostración. Probaremos sólo el caso cuando $\mathcal{S}$ es cerrada syzygy. Es claro que $\mathcal{S}^{\perp} \subseteq \mathcal{S}^{\perp_1}$. Sea $X \in \mathcal{S}^{\perp_1}$. Luego, $\mathrm{Ext}^1(-, X)|_{\mathcal{S}} \equiv 0$. Sea $M \in \mathcal{S}$ y sea

$$\cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de M. Como $\mathcal{S}$ es cerrada syzygy, se tiene que $\ker(f_0) = \mathrm{Im}(f_1) \in \mathcal{S}$. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \ker(f_0) \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

con $\ker(f_0), M \in \mathcal{S}$. Aplicamos el funtor $\mathrm{Ext}(-, X)$ a la sucesión anterior y obtenemos

$$\mathrm{Ext}^1(\ker(f_0),X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(M,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(P_0,X) \longrightarrow$$

$$\mathrm{Ext}^2(\ker(f_0),X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^3(M,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^3(P_0,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^3(\ker(f_0),X).$$

$\mathrm{Ext}^1(\ker(f_0),X) = 0$ porque $\ker(f_0) \in \mathcal{S}$. $\mathrm{Ext}^2(P_0,X) = 0$ porque P_0 es proyectivo. Entonces, $\mathrm{Ext}^2(M,X) = 0$, para todo $M \in \mathcal{S}$. De donde $\mathrm{Ext}^2(\ker(f_0),X) = 0$, y como $\mathrm{Ext}^3(P_0,X) = 0$, se tiene que $\mathrm{Ext}^3(M,X) = 0$. Procediendo de esta manera, nos queda que $\mathrm{Ext}^n(M,X) = 0$, para todo $M \in \mathcal{S}$ y $n \geq 1$, es decir, $X \in \mathcal{S}^{\perp}$. □

El siguiente lema establece una propiedad importante que cumplen los pares de cotorsión cogenerados por clases cerradas syzygys de módulos finitamente presentados. Estos pares son tilting si, y sólo si, la clase $\mathcal{A}$ esta compuesta por módulos que tienen dimensión proyectiva acotada.

Lema 5.2.4. Sea R un anillo coherente por la derecha y $\mathcal{S}$ una clase de módulos finitamente presentados que es cerrada syzygy. Sea $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ el par de cotorsión cogenerado por $\mathcal{S}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_n$;

(b) Existe un módulo tilting T con $\mathrm{pd}(T) \leq n$ tal que $\mathcal{B} = T^{\perp}$.

Demostración. Sabemos que $\mathcal{B} = \mathcal{S}^{\perp_1}$ es corresoluble, porque $\mathcal{S}$ es cerrado syzygy (Lema 5.2.3). Así, $\mathcal{A} = {}^{\perp_1}\mathcal{B} = {}^{\perp}\mathcal{B}$. Como $\mathcal{S}$ es una clase de módulos finitamente presentados, se tiene por el Teorema 1.2.2 que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo límites directos. Como los coproductos son un tipo de límites directos (ver Ejemplo 1.2.1), se tiene que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo coproductos. De donde $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es cerrada bajo coproductos. $\mathcal{S}$ puede verse como un conjunto en vez de una clase, para que podamos usar el Teorema de Eklof-Trlifaj. Sea $S \in \mathcal{S}$, como S es finitamente presentado, existe una sucesión exacta

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow S \longrightarrow 0,$$

donde F_1 y F_0 son módulos libres finitamente generados. De donde podemos tomar un epimorfismo $F_0 \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R \xrightarrow{f} S$, y tomando en núcleo de este epimorfismo nos queda $S \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R/I$, donde I es un ideal (el núcleo de f). Entonces S tiene una clase de representantes $\{\bigoplus_{i=1}^{n} R/I : I \text{ es un ideal}\}_{n\in\mathbb{N}}$, la cual es un conjunto. Como $\mathcal{S}$ cogenera a $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, se tiene que la clase de representantes de $\mathcal{S}$ cogenera a $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, entonces por el Teorema de Eklof-Trlifaj, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es completo, es decir, $\mathcal{B}$ nos da preenvolturas especiales. Sabemos que $\mathcal{B}$ es una clase cerrada bajo sumandos directos, conúcleos de monomorfismos y que $\mathcal{B} \cap {}^{\perp}\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es cerrada bajo coproductos. El Teorema 4.3.1 nos da la equivalencia deseada. $\square$

5.3 Segunda conjetura de la dimensión finitística

La segunda conjetura de la dimensión finitística ($\text{findim}(R) < \infty$) ha sido probada para todas las álgebras monomiales de dimensión finita [13], y para todas las álgebras con dimensión de representación ≤ 3 [15], pero permanece abierta para álgebras de Artin en general.

Empezaremos esta sección con un resultado debido a Enochs, el cual establece que $(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n^{\perp_1})$ es un par de cotorsión completo. Aquí probaremos además que es hereditario.

Lema 5.3.1. $\mathcal{P}_n$ es una clase resoluble.

Demostración.

(I) $\mathcal{P}_n$ es cerrada bajo extensiones. Sea

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta con $A, C \in \mathcal{P}_n$. Por el Lema 2.2.1, $\text{pd}(B) \leq \text{máx}\{\text{pd}(A), \text{pd}(C)\}$. $A, C \in \mathcal{P}_n \Longrightarrow \text{pd}(A) \leq n$ y $\text{pd}(C) \leq n$. Así, $\text{pd}(B) \leq n$ y por tanto $B \in \mathcal{P}_n$.

(II) $\mathcal{P}_n$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos. Sea $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo con $A, B \in \mathcal{P}_n$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \ker(f) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0,$$

que es exacta. Por el Lema 2.2.1, tenemos que

$$\mathrm{pd}(\ker(f)) \leq \max\{\mathrm{pd}(A), \mathrm{pd}(B) - 1\} \leq \max\{n, n-1\} \leq n.$$

Así, $\ker(f) \in \mathcal{P}_n$.

(III) Es claro que $\mathcal{P}_n$ contiene los módulos proyectivos.

Por lo tanto, $\mathcal{P}_n$ es una clase resoluble. $\square$

Lema 5.3.2. $(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n^{\perp_1})$ es un par de cotorsión completo y hereditario.

Demostración. Sea $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}_n$ un conjunto de representantes de $\mathcal{P}_n$. Sea $B = \bigoplus_{L \in \mathcal{L}} L$. Por construcción de B, por propiedades de $\mathrm{Ext}^1(-,-)$ y por definición de conjunto de representantes, se sigue que $G \in \mathcal{P}_n^{\perp_1}$ si, y sólo si, $\mathrm{Ext}^1(B, G) = 0$.

Sea K un módulo. Imitando la prueba del Teorema de Eklof-Trlifaj, podemos construir una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

donde $A = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$, $\{M_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ es una cadena continua tal que $M_0 = K$ y $M_{\alpha+1}/M_\alpha \cong B$, y $L = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$ con $L_\alpha = M_\alpha/K$. Además, $\mathrm{Ext}^1(B, A) = 0$. Del comentario hecho en el párrafo anterior, se tiene que $A \in \mathcal{P}_n^{\perp_1}$. Como $L_0 = K/K \cong 0 \in \mathcal{P}_n$ y $L_{\alpha+1}/L_\alpha \cong M_{\alpha+1}/M_\alpha \cong B \in \mathcal{P}_n$, se tiene por el Lema de Auslander que $L \in \mathcal{P}_n$ (1).

Ahora veamos que $(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n^{\perp_1})$ es un par de cotorsión. Sea M un módulo. Sabemos que se puede construir una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

con P un módulo proyectivo. Por (1) tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

con $A \in \mathcal{P}_n^{\perp_1}$ y $L \in \mathcal{P}_n$. Por el Lema de Salce, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & L' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & L \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

con filas y columnas exactas. Como $P, L \in \mathcal{P}_n$ y $\mathcal{P}_n$ es cerrada bajo extensiones, se tiene $L' \in \mathcal{P}_n$. Supongamos que $M \in {}^{\perp_1}(\mathcal{P}_n^{\perp_1})$. Entonces como $A \in \mathcal{P}_n^{\perp_1}$, la fila del medio se parte, por lo que $L' = A \oplus M$. De donde M es un sumando directo de L'. Como $\mathcal{P}_n$ es cerrada bajo sumandos directos, se tiene que $M \in \mathcal{P}_n$. Entonces tenemos que ${}^{\perp_1}(\mathcal{P}_n^{\perp_1}) \subseteq \mathcal{P}_n$, y sabemos también que $\mathcal{P}_n \subseteq {}^{\perp_1}(\mathcal{P}_n^{\perp_1})$. Por lo tanto, $\mathcal{P}_n = {}^{\perp_1}(\mathcal{P}_n^{\perp_1})$ y $(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n^{\perp_1})$ es un par de cotorsión, y por (1) es completo. Por el Lema 5.3.1 tenemos que $(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n^{\perp_1})$ es un par de cotorsión hereditario. $\square$

Acontinuación presentamos el siguiente resultado de Angeleri-Hügel y Mendoza, el cual establece condiciones necesarias y suficientes para que la dimensión finitística pequeña sea finita. Además se establece una equivalencia análoga para Findim(R).

Corolario 5.3.1. Sea R un anillo.

(I) Son equivalentes:

(a) $\operatorname{Findim}(R) < \infty$.

(b) Existe un par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en Mod_R tal que $\operatorname{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$ y $\alpha = \operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}) < \infty$.

(c) Cada par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en Mod_R con $\operatorname{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$ satisface $\alpha = \operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}) < \infty$.

(II) Son equivalentes:

(a) $\operatorname{findim}(R) < \infty$.

(b) Existe un par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en Mod_R tal que $\operatorname{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$ y $\beta = \operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}^{<\infty}) < \infty$.

(c) Cada par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ en Mod_R con $\operatorname{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$ satisface $\beta = \operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}^{<\infty}) < \infty$.

Demostración. Sólo probaremos (I), pues (II) es análogo.

(b)$\Longrightarrow$(a) Supongamos que existe un par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tal que $\operatorname{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$ y $\operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}) < \infty$. Por el Teorema 5.1.1, tenemos que $\operatorname{Findim}(R) \leq \operatorname{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) + \operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P})$. Como $\operatorname{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ y $\operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P})$ son finitos, nos queda que $\operatorname{Findim}(R) < \infty$.

(a)$\Longrightarrow$(c) Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un par de cotorsión completo y hereditario tal que $\operatorname{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) < \infty$. El Teorema 5.1.1 implica que $\operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}) \leq \operatorname{Findim}(R)$. Como $\operatorname{Findim}(R) < \infty$, nos queda que $\operatorname{resdim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}) < \infty$.

(c)$\Longrightarrow$(b) Sabemos que $(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n^{\perp_1})$ es un par de cotorsión completo y hereditario. Basta probar que $\operatorname{pd}_{\mathcal{P}_n}(\mathcal{P}_n) < \infty$. Por el Corolario 3.2.1, tenemos que $\operatorname{pd}_{\mathcal{P}_n}(\mathcal{P}_n) = \operatorname{pd}(\mathcal{P}_n) \leq n$. Entonces, por (c) tenemos que $\operatorname{resdim}_{\mathcal{P}_n}(\mathcal{P}) < \infty$.

$\square$

5.4 Primera conjetura de la dimensión finitística

Esta sección está dedicada al estudio de la primera conjetura de la dimensión finitística, la cual establece que $\mathrm{Findim}(R) = \mathrm{findim}(R)$. Ya sabemos que no es cierta, en general. Acá daremos las condiciones necesarias y suficientes para que valga.

Ejemplo 5.4.1.

1. Para probar que la primera conjetura falla en general, Huisgen-Zimmermann dio el siguiente ejemplo en álgebras de Artin: para cada $n \geq 2$ se contruye un álgebra monomial finito-dimensional Δ_n tal que $\mathrm{findim}(\Delta_n) = n$ y $\mathrm{Findim}(\Delta_n) = n + 1$.

2. Smalø dio ejemplos que prueban que $\mathrm{Findim}(R) - \mathrm{findim}(R)$ puede ser arbitrariamente grande: para cada $n \geq 1$ existe un álgebra finito-dimensional R_n sobre un cuerpo tal que $\mathrm{findim}(R_n) = 1$ y $\mathrm{Findim}(R_n) = n$.

3. Para un anillo noetheriano conmutativo R, Bass, Gruson y Raynaud probaron que $\mathrm{Findim}(R)$ coincide con la dimensión de Krull de R. Auslander y Buchsbaum probaron que, si R es además local, entonces $\mathrm{findim}(R) = \mathrm{depth}(R)$, donde $\mathrm{depth}(R)$ denota la longitud de una sucesión regular en $\mathrm{Rad}(R)$. Así, en el caso local, ambas dimensiones son finitas, pero ellas coinciden si, y sólo si, R es un anillo de Cohen-Macaulay. Nagata contruyó el siguiente ejemplo para anillos conmutativos noetherianos tales que $\mathrm{Findim}(R) = \mathrm{findim}(R) = \infty$: sea $R = K[x_i : i \in \mathbb{N}]$ el anillo de polinomios con una cantidad numerable de variables x_i sobre un cuerpo K. Sea $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales tal que $d_{i+1}-d_i > d_i-d_{i-1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego, para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $P_i =< x_{d_i+1}, \dots, x_{d_{i+1}} >$ el ideal primo en R generado por las variables x_j tales que $d_i < j \leq d_{i+1}$. Sea $U = R - (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i)$ y S la localización de R en U. Se tiene que S es noetheriano, con dimensión de Krull igual a ∞ y $\mathrm{Findim}(S) = \mathrm{findim}(S) = \infty$.

Denotamos por $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ el par de cotorsión cogenerado por la clase $\mathcal{P}^{<\infty}$, y por $(\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n)$ el par de cotorsión cogenerado por la clase $\mathcal{P}_n^{<\infty}$.

Los dos primeros resultados que presentamos en esta sección se deben a Angeleri-Hügel y Trlifaj, que fueron probados en [6].

Lema 5.4.1. Sea R un anillo noetheriano por la derecha. Para un número natural n existe un módulo tilting T_n de dimensión proyectiva a lo sumo n tal que $\mathbb{B}_n = T_n^{\perp}$. Más aún, si $\operatorname{findim}(R) \geq n$, entonces T_n tiene dimensión proyectiva igual a n.

Demostración. Para probar la primera parte, tomamos $\mathcal{S} = \mathcal{P}_n^{<\infty}$. Entonces sabemos que $\mathcal{S}$ es una clase cerrada syzygy de módulos finitamente presentados. Veamos que $\mathbb{A}_n \subseteq \mathcal{P}_n$. Sea $A \in \mathbb{A}_n$, como $R \in \mathcal{P}_n^{<\infty}$, por la Observación 4.2.1, existe un módulo M tal que $A \oplus K = M$ para algún módulo K, y $M = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$, donde $\{M_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ es una cadena continua de submódulos de M tales que M_0 y $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ son isomorfos a sumas directas de elementos de $\mathcal{P}_n^{<\infty}$. Por el Lema de Auslander, nos queda que $M \in \mathcal{P}_n$, y como esta clase es cerrada bajo sumandos directos, se tiene que $A \in \mathcal{P}_n$. Entonces por el Lema 5.2.4 que existe un módulo tilting T_n con $\operatorname{pd}(T_n) \leq n$ tal que $\mathbb{B}_n = T_n^{\perp}$.
Ahora supongamos que $\operatorname{findim}(R) \geq n$. Luego, $\sup\{\operatorname{pd}(M) : M \in \mathcal{P}^{<\infty}\} \geq n$. Entonces existe un módulo M finitamente presentado de dimensión proyectiva igual a n, de lo contrario, $\operatorname{pd}(M) < n$, para todo $M \in \mathcal{P}^{<\infty}$, de donde $\sup\{\operatorname{pd}(M) : M \in \mathcal{P}^{<\infty}\} < n$, lo que contradice el hecho de que $\operatorname{findim}(R) \geq n$. Supongamos que $\operatorname{pd}(T_n) < n$. Luego, $T_n \in \mathcal{P}_{n-1}$, con $\mathbb{B}_n = T_n^{\perp}$. Por el Lema 5.2.4 tenemos que $\mathbb{A}_n \subseteq \mathcal{P}_{n-1}$. Por otro lado, $\mathcal{P}_n^{<\infty} \subseteq {}^{\perp_1}((\mathcal{P}_n^{<\infty})^{\perp_1}) = \mathbb{A}_n$. De donde $M \in \mathcal{P}_{n-1}$, lo que contradice el hecho de que $\operatorname{pd}(M) = n$. Por lo tanto, $\operatorname{pd}(T_n) = n$. $\square$

El siguiente lema nos permite calcula la dimensión finitística pequeña mediante la dimensión proyectiva de un módulo tilting.

Lema 5.4.2. Asuma que R es un anillo noetheriano por la derecha. Entonces $\text{findim}(R) < \infty$ si, y sólo si, existe un módulo tilting T tal que $\mathbb{B} = T^{\perp}$. En este caso, $\text{findim}(R) = \text{pd}(T)$.

Demostración. Supongamos que $\text{findim}(R) = n$, es decir, $\text{pd}(\mathcal{P}^{<\infty}) = n$. Entonces, $\mathcal{P}^{<\infty} = \mathcal{P}_n^{<\infty}$. Por lo tanto, $(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = (\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n)$. Por el Lema 5.4.1 existe un módulo tilting T tal que $\mathbb{B} = T^{\perp}$ y $\text{pd}(T) = n$.
Ahora supongamos que existe un módulo tinting T tal que $\mathbb{B} = T^{\perp}$. Sabemos que $\mathcal{P}^{<\infty}$ es una clase cerrada syzygy de módulos finitamente presentados. Por el Lema 5.2.4, se tiene que $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{P}_n$. Como $\mathcal{P}^{<\infty} \subseteq {}^{\perp_1}((\mathcal{P}^{\infty})^{\perp_1}) = \mathbb{A}$, nos queda $\text{pd}(M) \leq n$, para todo $M \in \mathcal{P}^{<\infty}$. Tomando supremo sobre $\mathcal{P}^{<\infty}$, tenemos que $\sup\{\text{pd}(M) : M \in \mathcal{P}^{<\infty}\} \leq n$, es decir, $\text{findim}(R) \leq n < \infty$. $\square$

El teorema que sigue prueba dos cosas muy importantes, primero cuán grande puede ser la diferencia entre la dimensión finitística grande y la pequeña. Segundo, establece las condiciones necesarias y suficientes para que ambas dimensiones sean iguales.

Teorema 5.4.1. Sea R un anillo noetheriano por la derecha con $\text{findim}(R) < \infty$. Considere el par de cotorsión $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ con núcleo ω. Entonces:

(a) $\text{Findim}(R) - \text{findim}(R) \leq \text{resdim}_{\mathbb{A}}(\mathcal{P})$.

(b) $\text{Findim}(R) = \text{findim}(R)$ si, y sólo si, $\text{pd}(\omega^{\wedge}) = \text{pd}(\omega)$.

Demostración. Por el Lema 5.4.2 existe un módulo tilting T tal que $\mathbb{B} = T^{\perp}$ y $\text{pd}(T) = \text{findim}(R)$. Por el Teorema 4.3.2, $\text{pd}(T) = \text{pd}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A})$. Entonces $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ es un par de cotorsión completo y hereditario con $\text{pd}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}) < \infty$. Por el Teorema 5.1.1 tenemos que $\text{Findim}(R) \leq \text{pd}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}) + \alpha$, es decir, $\text{Findim}(R) - \text{findim}(R) \leq \alpha$, lo que prueba la parte (a).
Por el Lema 5.1.1 (b), $\text{pd}(\omega^{\wedge}) = \text{Findim}(R)$. Por el Teorema 3.2.2 (b), tenemos $\text{pd}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}) = \text{pd}(\omega)$, es decir, $\text{findim}(R) = \text{pd}(\omega)$. De donde es inmediato (b). $\square$

Para finalizar, presentamos un corolario que sirve para acotar superiormente la dimensión finitística grande mediante las dimensiones proyectivas e inyectivas de un módulo tilting.

Corolario 5.4.1. Sea T un módulo tilting en Mod_R. Si R es noetheriano entonces

$$\mathrm{Findim}(R) \leq \mathrm{pd}(T) + \mathrm{id}(T).$$

Demostración. Consideremos el par de cotorsión tilting $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ inducido por T. Por el Teorema 4.3.2, sabemos que $\omega = \mathrm{Add}(T)$ y que $\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathrm{pd}(T)$. Por el Teorema 5.1.1, obtenemos la desigualdad $\mathrm{Findim}(R) \leq \mathrm{pd}(T) + \alpha$. Ahora, $\alpha = \mathrm{pd}_{\mathrm{Add}(T)}(\mathcal{P})$, por el Lema 5.1.1. Luego, $\alpha = \mathrm{pd}_{\mathrm{Add}(T)}(\mathcal{P}) = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}(\mathrm{Add}(T)) \leq \mathrm{id}(\mathrm{Add}(T))$. Y como R es noetheriano, se tiene que $\mathrm{id}(\mathrm{Add}(T)) = \mathrm{id}(T)$. Veamos esto: sea $d = \mathrm{id}(T)$ y $d' = \mathrm{id}(\mathrm{Add}(T))$. Luego, $\mathrm{Ext}^j(-, T) = 0$ para todo $j > d$. Sea $M \in \mathrm{Add}(T)$, entonces existe un módulo N tal que $M \oplus N \cong T^{(I)}$.

$$\mathrm{Ext}^j(-, M) \times \mathrm{Ext}^j(-, N) \cong \mathrm{Ext}^j(-, M \oplus N) \cong \mathrm{Ext}^j(-, T^{(I)}).$$

Consideremos R/I, donde I es un ideal derecho de R. R/I es un módulo finitamente presentado. Además, sabemos que toda suma directa es un límite directo. Entonces, por el Teorema 1.2.2 se tiene que

$$\mathrm{Ext}^j(R/I, T^{(I)}) \cong \bigoplus_I \mathrm{Ext}^j(R/I, T).$$

Como $\mathrm{Ext}^j(R/I, T) = 0$ para todo $j > d$, tenemos que $\mathrm{Ext}^j(R/I, M) = 0$. Del álgebra homológica sabemos que esto último implica que $\mathrm{Ext}^j(-, M) = 0$, para todo $j > d$. Entonces, $d' \leq d$. La otra desigualdad es trivial porque $T \subseteq \mathrm{Add}(T)$. $\square$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Angeleri-Hügel L., Coelho F.U. (2001). "Infinitely generated tilting modules of finite projective dimension". *Forum Math.* V.13. 239-250.

[2] Angeleri-Hügel L., Herbera D., Trlifaj J. (2006). "Tilting modules and Gorenstein rings". *Forum Math.* V.18. 211-229.

[3] Angeleri-Hügel L., Mendoza O. "Homological dimensions in cotorsion pairs". *Illinois Journal of Mathematics* (por aparecer).

[4] Angeleri-Hügel L., Tonolo A., Trlifaj J. (2001). "Tilting preenvelopes and cotilting precovers". *Algebras and Representation Theory*. V.4. 155-170.

[5] Angeleri-Hügel L., Trlifaj J. (2004). "Direct limit of modules of finite projective dimension". *Rings, Modules, Algebras, and Abelian Groups, LNPAM.* V. 236. 27-44.

[6] Angeleri-Hügel L., Trlifaj J. (2002). "Tilting theory and the finitistic dimension conjectures". *Trans. of the AMS.* V.354. 4345-4358.

[7] Auslander M., Buchweitz R. O. (1989). "The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations". *Societe Mathematique de France*. V. 38. 5-37.

[8] Brenner S., Butler M. C. R. (1980). "Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors". Berlín. *Springer. Proc. ICRA II, Lec. Notes Math.*. V. 832. 103-169.

[9] Bass H. (1962). "Injective dimension in noetherian rings". *Trans. Amer. Math. Soc.* V. 102. 18-29.

[10] Eklof P., Trlifaj J. (2001). "How to make Ext vanish." *Bull. London Math. Soc.* V.33. 41-51.

[11] Enochs E. E., Jenda O. M. G. (2001). "Relative Homological Algebra". Berlín. *Walter de Gruyter*.

[12] Göbel R., Trlifaj J. (2006). "Approximations and Endomorphism Algebras of Modules". Berlín. *Walter de Gruyter*.

[13] Green L. L., Kirkman E. E., Kuzmanovich J. J. (1991). "Finitistic dimension of finite dimensional monomial algebras". *Journal of algebra*. V. 136. 37-51.

[14] Huisgen-Zimmermann B. (1992). "Homological domino effects and the first finitistic dimension conjecture". *Invent. Math.* V 108. 369-383.

[15] Igusa K., Todorov G. (2005). "On the finitistic global dimension conjecture for artin algebras". *Representations of Algebras and Related Topics, Fields Inst. Comm.* V. 45. 201-204.

[16] Mendoza O., Saenz C. (2006). "Tilting categories with applications to stratifying systems". *Journal of algebra*. V. 302. 419-449.

[17] Osborne S. (2000). "Basic Homological Algebra". Nueva York. *Springer Verlag.*

[18] Rada J., Saorin M. (1998). "Rings characterized by (pre)envelopes and (pre)covers of their modules". *Comm. Algebra* V. 26. 899-912.

[19] Rotman J. (1979). "An Introduction to Homological Algebra". Nueva York. *Academic Press.*

[20] Salce L. (1979). "Cotorsion theories for abelian groups". *Symposia Math.* V.23. 11-32.

[21] Smalø S.O. (2000). "Homological difference between finite and infinite dimensional representations of algebras." *Trends in Math.,* Birkhäuser, Basel. 81-93.

[22] Trlifaj J. (2001). "Cotorsion theories induced by tilting and cotilting modules." *Contemporary Mathematics.* V.273. 285-300.