

# CURSO ESPECIALIZADO DE ÁLGEBRA: ÁLGEBRA HOMOLÓGICA VS. ÁLGEBRA HOMOTÓPICA.

PROFESOR: DR. MARCO ANTONIO PÉREZ BULLONES

## PROPÓSITO DEL CURSO

El curso está basado principalmente en los temas investigados por el ponente en su tesis doctoral y se basa principalmente en un resultado conocido como la Correspondencia de Hovey. Dicha correspondencia a logrado conectar los campos de álgebra homológica y álgebra homotópica, específicamente la teoría de pares de cotorsión con las categorías de modelos.

En el desarrollo del curso, primero se empezará con una introducción bastante actualizada de categorías de modelos, sin olvidar su motivación clásica. Luego se estudiará de manera sumamente detallada la prueba de la correspondencia de Hovey en el contexto de categorías abelianas, para luego ver su generalización a categorías exactas en la forma de lo que se conoce como Correspondencia de Hovey-Gillespie. Finalmente, se verán aplicaciones de dicha correspondencia en las áreas de teoría de homotopía, categorías monoidales, y álgebra homológica clásica y de Gorenstein.

## CONTENIDO DEL CURSO

### 1. **Introducción a las categorías de modelos.**

- 1.1 Algo de historia: De Quillen a Hovey.
- 1.2 Definición de categorías de modelo (por Mark Hovey): Los axiomas del  $3x2$ , de retracción, de levantamientos y de factorización.
- 1.3 Ejemplos de estructuras de modelos.
- 1.4 Sistemas de factorización débiles.
- 1.5 Simplificación de la definición de Hovey de categoría de modelos (Lema de Tierney): Eliminando el axioma de retracción.

### 2. **Estructuras de modelo abelianas.**

- 2.1 Definición.
- 2.2 Ejemplos de estructuras abelianas y no abelianas: La estructura inyectiva de Joyal y la estructura absoluta.

### 3. **La correspondencia de Hovey.**

- 3.1 Clases de objetos gruesas.
- 3.2 Pares de Hovey.
- 3.3 Enunciado de la correspondencia: Estructuras abelianas vs. pares de Hovey.
- 3.4 Ejemplos de estructuras abelianas obtenidas vía la correspondencia: Sobre complejos de cadenas, y sobre módulos sobre anillos quasi-Frobenius, Gorenstein y Ding-Chen.
- 3.5 La correspondencia simplificada: Sistemas de factorización débiles vs. pares de cotorsión completos.

- 3.6 Prueba de la correspondencia de Hovey.
- 3.7 Sistemas de factorización ortogonales: Comparación de sistemas ortogonales con respecto a los sistemas de factorización obtenidos de pares de cotorsión.
- 3.8 Factorizaciones functoriales: Extendiendo un poco la correspondencia de Hovey.

#### 4. Estructuras de modelo abelianas sobre complejos de cadena.

- 4.1 Pares de cotorsión inducidos de módulos a complejos.
- 4.2 Algunos isomorfismos naturales con funtores de extensión.
- 4.3 Ejemplos de estructuras de modelo abelianas sobre complejos de cadena.

#### 5. La categoría de homotopía de una categoría de modelos.

- 5.1 Dos definiciones de homotopía: Categorías de homotopía vía localización y relaciones de homotopía a izquierda y derecha.
- 5.2 Aplicaciones a estructuras abelianas de modelos sobre complejos de cadena: Nuevas formas de calcular el funtor Ext.

#### 6. Estructuras de modelo sobre categorías exactas.

- 6.1 Categorías exactas.
- 6.2 Pares de cotorsión y estructuras de modelo sobre categorías exactas.
- 6.3 La correspondencia de Hovey-Gillespie.

#### 7. Categorías de modelo monoidales.

- 7.1 Categorías monoidales (simétricas y cerradas)
- 7.2 Estructuras de modelo monoidales.
- 7.3 Estructuras de modelo monoidales y abelianas.
- 7.4 Dos tipos de complejos de cadena planos.
- 7.5 Ejemplos de estructuras de modelos monoidales y no monoidales: La estructura de modelo plana grado-a-grado.

#### 8. Estructuras de modelo a la Gorenstein.

- 8.1 Objetos Gorenstein-proyectivos y Gorenstein-inyectivos en categorías abelianas.
- 8.2 Dimensiones Gorenstein-proyectivas y Gorenstein-inyectivas.
- 8.3 Categorías de Gorenstein.
- 8.4 Pares de cotorsión y estructuras de modelo en categorías de Gorenstein.
- 8.5 Módulos Gorenstein-proyectivos y Gorenstein-inyectivos graduados: Correspondencia 1-1 entre complejos dg-proyectivos (dg-inyectivos) sobre un anillo  $R$  y módulos graduados Gorenstein-proyectivos (Gorenstein-inyectivos) sobre  $R[x]/(x^2)$ .
- 8.6 Módulos Gorenstein-planos.
- 8.7 Pares de cotorsión a partir de Gorenstein-planos: La Conjetura de la Cubierta Plana a la Gorenstein.
- 8.8 La estructura de modelo Gorenstein-plana sobre módulos.
- 8.9 Complejos Gorenstein-planos.
- 8.10 Pares de cotorsión de complejos Gorenstein-planos: Cambiando la ortogonalidad mediante funtores Ext enriquecidos.
- 8.11 Caracterización de complejos Gorenstein-planos.
- 8.12 La estructura Gorenstein-plana sobre complejos de cadena.

## REFERENCES

- [1] Buhler, T. (2010). Exact Categories. *Expositiones Mathematicae*. Vol. 28, pp. 1-69.
- [2] Dwyer, W. G., y Spalinski J. (1995). *Handbook of Algebraic Topology*. Edited by I. M. James. Elsevier Science B. V.
- [3] García Rozas, J. R. (1999). Covers and Envelopes in the Category of Complexes of Modules. *Chapman and Hall/CRC Research Notes in Mathematics*. Vol. 407.
- [4] Gillespie, J. (2004). The Flat Model Structure on  $\text{Ch}(\mathbb{R})$ . *Transactions of the American Mathematical Society*. Vol. 356, No. 8, pp. 3369-3390.
- [5] Gillespie, J. (2011). Model structures on exact categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*. Vol. 215, pp. 2892-2902.
- [6] Gillespie, J. (2008). Cotorsion pairs and degreewise homological model structures. *Homology, Homotopy, and Applications*. Vol. 10, No. 1, pp. 283-304.
- [7] Gillespie, J. (2010). Model Structures on Modules Over Ding-Chen Rings. *Homology, Homotopy and Applications*. Vol. 12, No. 1, pp. 61-73.
- [8] Hovey, M. (2002). Cotorsion pairs, model category structures, and representation theory. *Mathematical Zeitschrift*. Vol. 241, pp. 553-592.
- [9] Hovey, M. (2006). *Cotorsion pairs and model categories*. American Mathematical Society.
- [10] Hovey, M. (1999). *Model Categories*. AMS Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 63. Providence, Rhode Island, Estados Unidos.
- [11] Quillen, D. (1967). *Homotopical Algebra*. Springer Lecture Notes in Mathematics. Vol. 43. Berlín, Alemania.

Certifico que el curso especializado “Álgebra homológica vs. álgebra homotópica” fue impartido por el Dr. Marco Antonio Pérez Bullones, dentro del marco de nuestro Seminario de Representaciones de Álgebras. Dicho curso fue impartido del 15 de Agosto al 9 de Noviembre de 2015, con una duración total de 33 horas

Dr. Octavio Mendoza Hernández:  
Investigador Titular B,  
Organizador del Seminario de Representaciones de álgebras,  
Instituto de Matemáticas, UNAM.  
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria, C.P. 04510, México, D.F. MEXICO.  
`omendoza@matem.unam.mx`