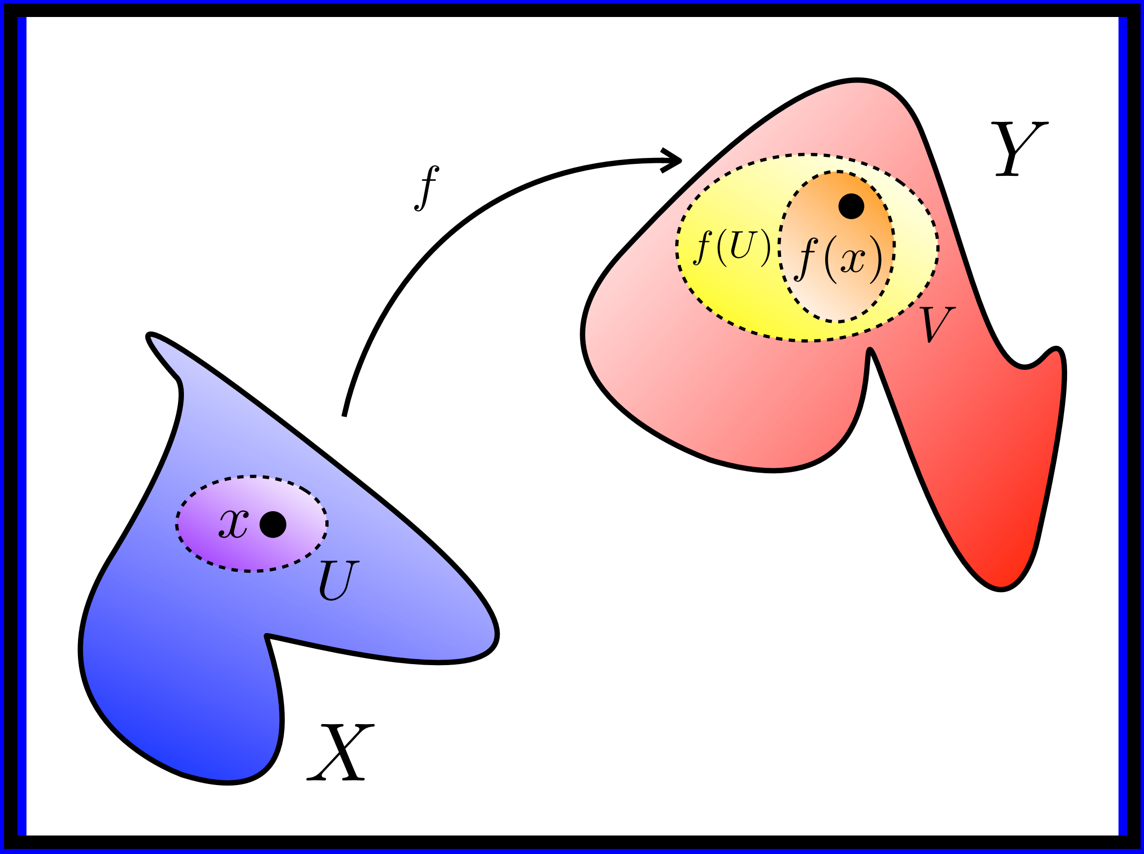
MARCO A. PÉREZ B.
Université du Québec à Montréal.
Département de Mathématiques.

TOPOLOGÍA

Notas de curso



Abril, 2012.

Estas notas están basadas en un curso dado por Fermín Dalmagro en la UCV a mediados del 2006. Cualquier error u omisión es responsabilidad del autor.

TABLA DE CONTENIDOS

CAPÍTULO 1

TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1 Operaciones entre conjuntos

Un **conjunto** es "cualquier cosa" sobre la cual está dado un predicado,

$$X = \{x \ / \ P(x)\},$$

donde X es el conjunto de todos los elementos para los cuales se cumple $P(x)$. Denotaremos por $A \subseteq X$ si A es un **subconjunto** de X, i.e. todo elemento de A pertenece a X.

Ejemplo 1.1.1.

(1) $\mathbb{N}$ = El conjunto de los números naturales = $\{1, 2, 3, \dots\}$.

(2) $\mathbb{P}$ = El conjunto de los número pares = $\{2, 4, 6, \dots\}$. Note que $\mathbb{P}$ es un subconjunto de $\mathbb{N}$.

Dado un conjunto X, denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ el **conjunto de los subconjuntos** de X,

$$\mathcal{P}(X) = \{A \ / \ A \subseteq X\}.$$

Ejemplo 1.1.2. Si $X = \{0, 4, 5\}$ entonces $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{5\}, \{0, 4\}, \{0, 5\}, \{4, 5\}, X\}$.

Proposición 1.1.1. Si $\operatorname{Card}(X) = n$ entonces $\operatorname{Card}(\mathcal{P}(X)) = 2^n$.

Demostración: Existe un subconjunto de 0 elementos, $\emptyset$. Existen $\binom{n}{1} = n$ subconjuntos de 1 elemento, $\binom{n}{2}$ subconjuntos de 2 elementos, ..., $\binom{n}{n} = 1$ subconjunto de n elementos, el mismo X. Así obtenemos

$$\operatorname{Card}(\mathcal{P}(X)) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

$\square$

Sean $A, B \in \mathcal{P}(X)$:

- **Unión**: $A \cup B = \{x \in X \ / \ x \in A \text{ o } x \in B\} \in \mathcal{P}(X)$.
- **Intersección**: $A \cap B = \{x \in X \ / \ x \in A \text{ y } x \in B\} \in \mathcal{P}(X)$.

Proposición 1.1.2.

(1) $A \cup \emptyset = A$.

(2) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(3) $A \cup A = A$.

(4) $A \cap A = A$.

La operación

$$\begin{aligned} U : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ (A, B) &\mapsto A \cup B \end{aligned}$$

es un ejemplo de **ley de composición interna**.

Proposición 1.1.3 (Distributividad)**.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Demostración:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x \in X \ / \ x \in A \text{ y } (x \in B \text{ o } x \in C)\} \\ &= \{x \in X \ / \ (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ y } x \in C)\} \\ &= \{x \in X \ / \ x \in A \text{ y } x \in B\} \cup \{x \in X \ / \ x \in A \text{ y } x \in C\} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

$\square$

Estas operaciones le dan a $\mathcal{P}(X)$ una estructura de **álgebra de Boole**, donde $\cup$ funge como suma y $\cap$ como producto.

1.2 Relaciones y funciones

Dados dos conjuntos X e Y, es posible relacionar sus elementos de varias maneras. Se define el **producto cartesiano** de X e Y como el conjunto

$$X \times Y = \{(x, y) \ / \ x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

Una **relación** en $X \times Y$ es cualquier subconjunto de $X \times Y$.

Una **función** es una relación f que satisface la siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) pertenecen a f entonces $b = c$. Los pares ordenados (a, b) en una función f se denotan por $(a, f(a))$.

Dada una función $f : X \longrightarrow Y$, la **imagen directa** de un subconjunto $A \subseteq X$ es el subconjunto de Y dado por

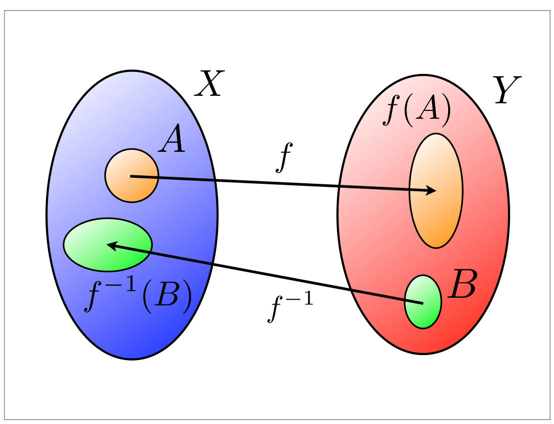
$$f(A) = \{y \in Y \ / \ y = f(x) \text{ para algún } x \in A\} = \{f(x) \in Y \ / \ x \in A\}.$$

La **imagen inversa** de un subconjunto $B \subseteq Y$ es el subconjunto de X dado por

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \ / \ f(x) \in B\}.$$

Proposición 1.2.1. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Demostración: Sabemos que $f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\}$ y $f^{-1}(f(A)) = \{x \in X \ / \ f(x) \in f(A)\}$. Sea $x \in A$. Luego, $f(x) \in f(A)$. De donde $x \in f^{-1}(f(A))$. $\square$



Proposición 1.2.2. $B \cap f(A) = f(f^{-1}(B) \cap A)$.

Demostración: Note que

$$f^{-1}(B) \cap A = \{x \in X \ / \ x \in f^{-1}(B) \text{ y } x \in A\} = \{x \in X \ / \ f(x) \in B \text{ y } x \in A\}.$$

Sea $y \in f(f^{-1}(B) \cap A)$. Luego, existe $x \in f^{-1}(B) \cap A$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in A$, $y = f(x) \in f(A)$. Por otro lado, $x \in f^{-1}(B)$, de donde $y = f(x) \in B$. Entonces se tiene $y \in B$ e $y \in f(A)$, es decir $y \in B \cap f(A)$. Por lo tanto, $f(f^{-1}(B) \cap A) \subseteq B \cap f(A)$.

Sea $y \in B \cap f(A)$. Luego, $y \in B$ y $y = f(x)$, para algún $x \in A$. Entonces $f(x) = y \in B$ implica que $x \in f^{-1}(B)$. Tenemos $y = f(x)$, donde $x \in f^{-1}(B)$ y $x \in A$, es decir $x \in f^{-1}(B) \cap A$. Se sigue $y \in f(f^{-1}(B) \cap A)$. Por lo tanto, $B \cap f(A) \subseteq f(f^{-1}(B) \cap A)$. $\square$

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Diremos que f es:

(1) **Inyectiva** si para todo $a, b \in X$, $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$.

(2) **Sobreyectiva** si para todo $y \in Y$ existe algún $x \in X$ tal que $y = f(x)$, es decir, si $Y = f(X)$.

(3) **Biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva, es decir, si para todo $y \in Y$ existe un único elemento $x \in X$ tal que $y = f(x)$.

Ejemplo 1.2.1. Sea X un conjunto.

(1) Denotaremos por $1_X : X \longrightarrow X$ la función dada por $1_X(x) = x$, para todo $x \in X$. Esta función se conoce como **función identidad**, y es biyectiva.

(2) Si A es un subconjunto de X, la **inclusión de** A **en** X es la función $i_A : A \longrightarrow X$ definida por $i_A(x) = x$, para todo $x \in A$. Esta función es inyectiva, pero no es sobreyectiva si A es distinto de X.

Sea Y otro conjunto y $f : X \longrightarrow Y$ una función.

(3) La función $\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ dada por $A \mapsto f(A)$ se conoce como **función imagen directa** (I.D.).

(4) La función $\mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $B \mapsto f^{-1}(B)$ se conoce como **función image inversa** (I.I.).

Proposición 1.2.3.

(1) I.D. e I.I. son en efecto funciones.

(2) f es inyectiva si, y sólo si I.D. lo es.

(3) f es sobreyectiva si, y sólo si, I.D lo es

(4) f es inyectiva si, y sólo si, I.I. es sobreyectiva.

(5) f es sobreyectiva si, y sólo si, I.I. es inyectiva.

Demostración: Sean $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ y $\psi : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ las funciones I.D. e I.I., respectivamente.

(1) Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$ tales que $A_1 = A_2$. Tenemos

$$y \in f(A_1) \Longleftrightarrow y = f(a),\ a \in A_1 \Longleftrightarrow y = f(a),\ a \in A_2 \Longleftrightarrow y \in f(A_2).$$

Entonces $f(A_1) = f(A_2)$ y por ende φ está bien definida. Ahora sean $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y)$ tales que $B_1 = B_2$. Tenemos

$$x \in f^{-1}(B_1) \Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \Longleftrightarrow f(x) \in B_2 \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_2).$$

Entonces $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2)$, por lo que ψ está bien definida.

(2) Supongamos que f es inyectiva. Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$ tales que $f(A_1) = f(A_2)$. Dado $a \in A_1$, tenemos $f(a) \in f(A_1) = f(A_2)$. De donde existe $a' \in A_2$ tal que $f(a) = f(a')$. Como f es inyectiva, se sigue que $a = a' \in A_2$. Entonces $A_1 \subseteq A_2$. De manera similar, se tiene que $A_2 \subseteq A_1$. Por lo tanto, φ es inyectiva.

Ahora supongamos que φ es inyectiva. Sean $x, x' \in X$ tales que $f(x) = f(x')$. Luego $\varphi(\{x\}) = \varphi(\{x'\})$. Como φ es inyectiva, se tiene que $\{x\} = \{x'\}$, es decir $x = x'$. Por lo tanto, f es inyectiva.

(3) Supongamos que f es sobreyectiva. Veamos que $B = f(f^{-1}(B)) = \varphi(f^{-1}(B))$. Sea $b \in B$, luego existe $a \in X$ tal que $b = f(a)$. Se sigue que $a \in f^{-1}(B)$, por lo que $b \in f(f^{-1}(B))$. Por otro lado, si $b = f(f^{-1}(B))$, entonces existe $a \in f^{-1}(B)$ tal que $b = f(a)$. Como $a \in f^{-1}(B)$, se sigue que $b = f(a) \in B$. Por lo tanto, $B = f(f^{-1}(B)) = \varphi(f^{-1}(B))$.

Ahora supongamos que φ es sobreyectiva. Sea $y \in Y$. Considere el conjunto $\{y\} \in \mathcal{P}(Y)$. Como φ es sobreyectiva, existe $A \in \mathcal{P}(X)$ tal que $\{y\} = \varphi(A) = f(A)$. De donde existe $x \in A \subseteq X$ tal que $y = f(x)$. Por lo tanto, f es sobreyectiva.

(4) Supongamos que f es injectiva. Sea A un subconjunto de X. Veamos que $A = f^{-1}(f(A))$. Es claro que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Ahora supongamos que $x \in f^{-1}(f(A))$. Luego $f(x) \in f(A)$. De donde existe $a \in A$ tal que $f(x) = f(a)$. Como f es inyectiva, se tiene $x = a$. Entonces $x \in A$. Por lo tanto, $A = \psi(f(A))$.

Ahora supongamos que ψ es sobreyectiva. Sean x y x' en X tales que $f(x) = f(x')$. Como ψ es sobreyectiva, existe $B \subseteq Y$ tal que $\{x\} = \psi(B) = f^{-1}(B)$. Luego, $f(x') = f(x) \in B$. De donde $x' \in f^{-1}(B) = \{x\}$. De donde $x = x'$.

(5) Supongamos que f es sobreyectiva. Sean B_1 y B_2 dos subconjuntos de Y tales que $\psi(B_1) = \psi(B_2)$, es decir $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2)$. Como f es sobreyectiva, tenemos

$$B_1 = f(f^{-1}(B_1)) = f(f^{-1}(B_2)) = B_2.$$

Entonces, ψ es inyectiva.

Ahora supongamos que ψ es inyectiva. Veamos que $Y = f(X)$. Supongamos lo contrario, $Y \neq f(X)$. Como ψ es inyectiva, tenemos que $\psi(Y) \neq \psi(f(X))$, es decir, $X = f^{-1}(Y) \neq f^{-1}(f(X))$. Lo cual es una contradiccón porque $X = f^{-1}(f(X))$. Por lo tanto, f es sobreyectiva.

$\square$

Proposición 1.2.4. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función.

(1) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(2) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(4) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

Demostración:

(1)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ o } f(x) \in B_2 \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ o } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ y } f(x) \in B_2 \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ y } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

(3) Sea $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Luego, $y = f(x)$ para algún $x \in A_1 \cup A_2$. De donde $f(x) \in f(A_1)$ o $f(x) \in f(A_2)$. Entonces $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

Ahora supongamos que $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Luego, $y \in f(A_1)$ o $y \in f(A_2)$. Si $y \in f(A_1)$ entonces existe $x \in A_1$ tal que $y = f(x)$. Como $A_1 \subseteq A_\cup A_2$, nos queda $y \in f(A_1 \cup A_2)$. De forma similar, si $y \in f(A_2)$ entonces $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

(4) Como $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$, se tiene que $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1)$. Similarmente, $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_2)$. De donde $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

La otra contención no es necesariamente cierta. Por ejemplo, consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, junto con los conjuntos $A_1 = (-\infty, 0]$ y $A_2 = [0, +\infty)$. Tenemos $A_1 \cap A_2 = \{0\}$. Por otro lado, $f(A_1) = [0, +\infty)$ y $f(A_2) = [0, +\infty)$. Tenemos $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, +\infty)$. Por lo que

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\} \subsetneq [0, +\infty) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

$\square$

Diremos que un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

es **conmutativo** si $h = g \circ f$. Recuerde que la composición de funciones $g \circ f$ está dada por $g \circ f(x) = g(f(x))$. En este caso, se tiene que el dominio de g es un subconjunto de la imagen de f.

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función inyectiva y $g : Y \longrightarrow X$ es su inversa, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "1_Y"] & \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

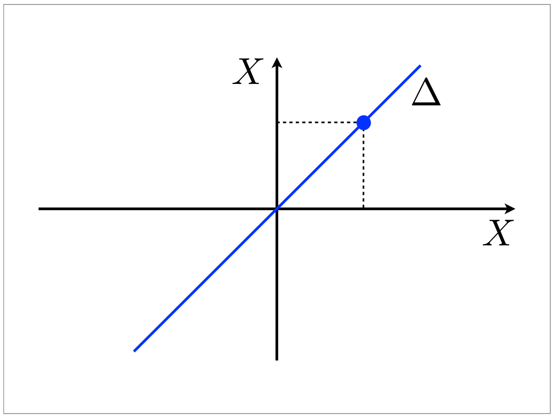
1.3 Relaciones de equivalencia

Dado un conjunto X y una relación $R \subseteq X \times X$, diremos que R es una **relación de equivalencia** si se satisfacen las siguientes condiciones:

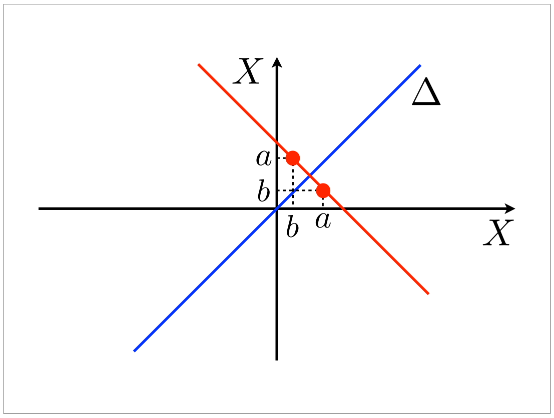
(1) R es **reflexiva**: Para todo $a \in X$, $(a, a) \in R$. Esto equivale a decir que la **diagonal**

$$\Delta = \{(x, x) \ / \ x \in X\}$$

está contenida en R.



(2) R es **simétrica**: Para todo $a, b \in X$, si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$.



(3) R es **transitiva**: Para todo $a, b, c \in X$, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ entonces $(a, b) \in R$.

Ejemplo 1.3.1.

(1) $R = \{(a, a) \ / \ a \in X\}$ es la relación más fina de X, mientras que $R' = X \times X$ es la más gruesa.

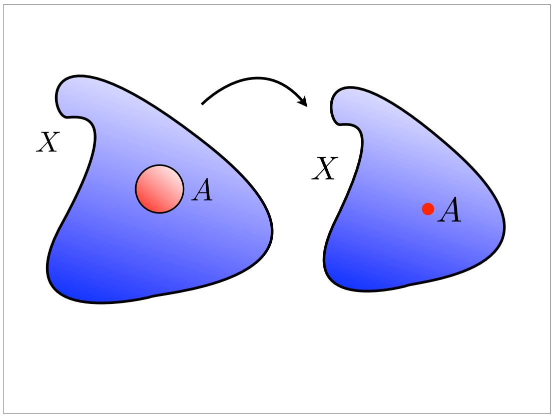
(2) Sea $X = \mathbb{N}$ y $R = \{(m, n) : m = np\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, no es reflexiva. Por otro lado,

$$R = \{(m, n) : m - n = kp, \ p \text{ fijo y } k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

es una relación de equivalencia.

(3) En $X = \mathbb{R}^2$, $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \;/\; y_1 = y_2\}$ es una relación de equivalencia.

(4) Sea X un conjunto y A un subconjunto de X. Sea $R = \{(a, b) : a = b \text{ o } a, b \in A\}$. Es fácil ver que R es una relación de equivalencia en X.



Dado un conjunto X y R una relación de equivalencia, para cada $a \in X$, se define la **clase** de a como el conjunto

$$[a] := \{b \in X : (a, b) \in R\}.$$

Note que:

(1) $a \in [a]$.

(2) $(a, b) \in R \Longrightarrow [a] = [b]$.

(3) $[a] \cap [b] = \emptyset \Longleftrightarrow (a, b) \in R$. En efecto, si $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ entonces existe $c \in [a] \cap [b]$. De donde $(a, c) \in R$ y $(b, c) \in R$. Se sigue que $[a] = [b]$.

Ejemplo 1.3.2.

(1) $[(a, b)] = \{(x, y) : y = b\}$.

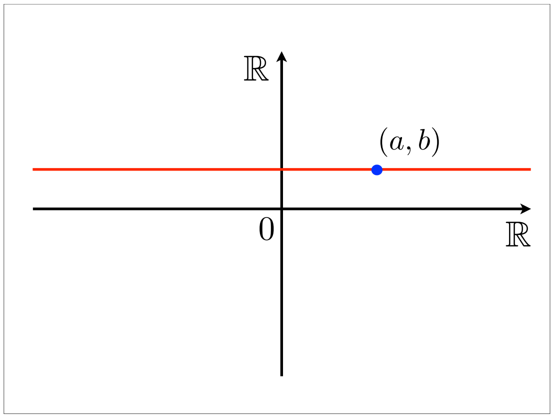
(2) $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R \Longleftrightarrow ||(x_1, y_1)|| = ||(x_2, y_2)||$.

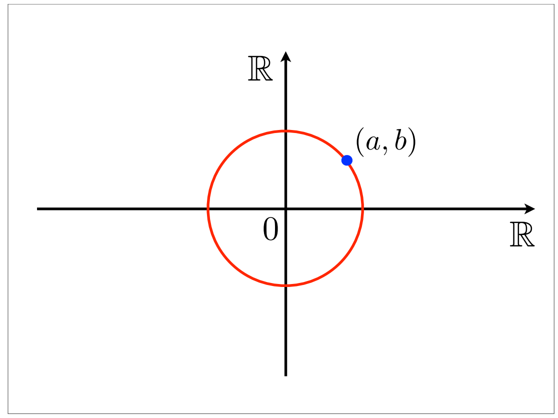
(3) Dado $X = [-1, 1]$ y $A = \{-1, 1\}$. Consideremos la relación

$$(a, b) \in R \Longleftrightarrow a = b \text{ o } a, b \in A.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} [-1] &= \{x \in [-1, 1] \;/\; x = -1 \text{ o } x, -1 \in A\} = \{-1, 1\}, \\ [1] &= [-1], \\ [t] &= \{t\}, \text{ si } t \neq \pm 1. \end{aligned}$$


ℝ
(a, b)
0
ℝ


ℝ
(a, b)
0
ℝ

1.4 Conjunto cociente

Dada una relación de equivalencia R en X, definimos el **conjunto cociente** X/R como el conjunto de las clases se equivalencia

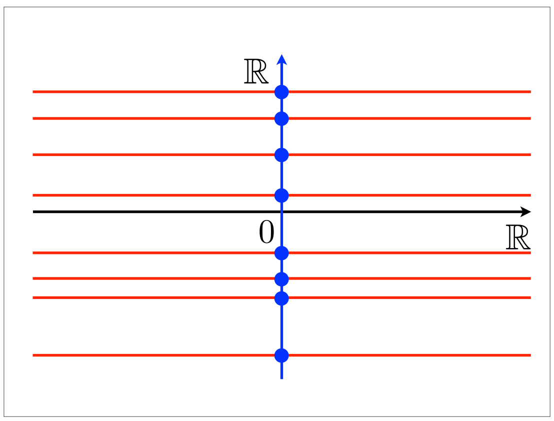
$$X/R := \{[x] \,:\, x \in X\}.$$

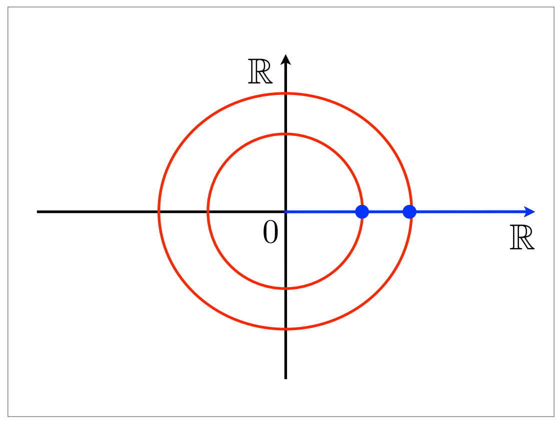
La función $p : X \longrightarrow X/R$ dada por $p(x) = [x]$ se denomina **proyección canónica**.

Ejemplo 1.4.1.

(1) Para la relación en $\mathbb{R}^2$ dada por $((a,b),(a',b')) \in R \iff b = b'$, se tiene el conjunto cociente X/R está dado por el eje Y.

(2) Para la relación en $\mathbb{R}^2$ dada por $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in R \iff ||(x_1,y_1)|| = ||(x_2,y_2)||$, tenemos que el conjunto cociente X/R es la semirecta $\{(x,0) \,:\, x \geq 0\}$.





Dada una relación de equivalencia R en un conjunto X, supongamos que tenemos una funcón $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(a) = f(b)$ si aRb. Entonces tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/R \arrow[r, "\widehat{f}"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde $\widehat{f} : X/R \longrightarrow Y$ es la función dada por $\widehat{f}([a]) = f(a)$. Note que $\widehat{f}$ está bien definida. Si $\widehat{f}$ es biyectiva, entonces $X/R \cong Y$ y tenemos al conjunto X/R liberado de la relación de equivalencia.

Ejemplo 1.4.2.

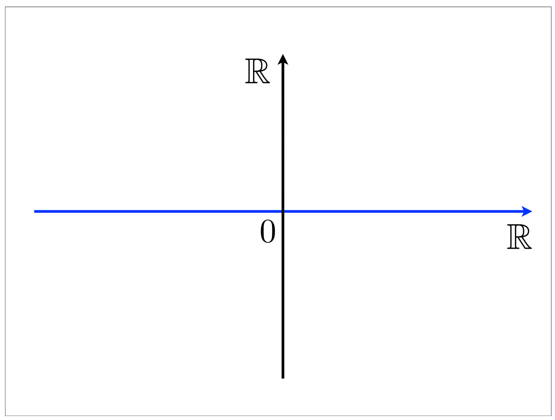
(1) Considere $\mathbb{R}^2$ con la relación

$$(x_1,y_1)R(x_2,y_2) \iff x_1 = x_2.$$

Probemos que el eje X es el conjunto cociente. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{R}^2/R \arrow[r, "\widehat{f}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

donde $f(a,b) = a$. Note que $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ implica $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Luego tenemos $\widehat{f}([(x,y)]) = f(x,y) = x$. Supongamos $\widehat{f}([(a,b)]) = \widehat{f}([(c,d)])$. Entonces $f(a,b) = f(c,d)$. De donde $a = c$. Esto implica que $(a,b)R(c,d)$, es decir $[(a,b)] = [(c,d)]$. Tenemos que $\widehat{f}$ es inyectiva. Ahora, sea $x \in \mathbb{R}$. Luego $x = f(x,y)$ para algún $y \in \mathbb{R}$. Entonces $x = \widehat{f}([(x,y)])$. Tenemos que $\widehat{f}$ es sobreyectiva. Por lo tanto, $\widehat{f}$ es biyectiva, y así $\mathbb{R}^2/R \cong \mathbb{R}$ (eje X).



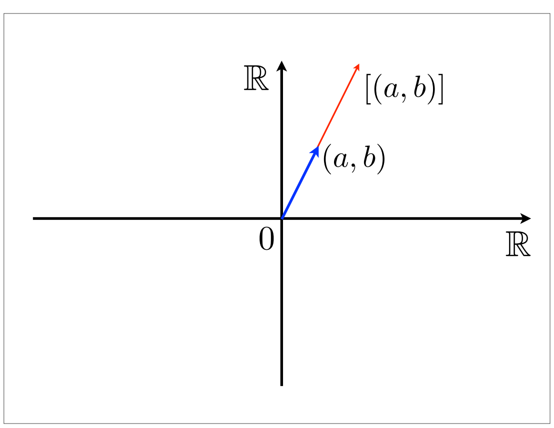
(2) Considere nuevamente $X = \mathbb{R}^2$, esta vez con la relación

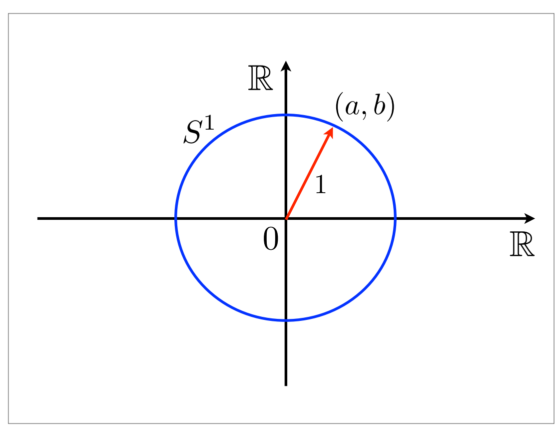
$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff \text{ existe } \lambda > 0 \text{ tal que } (x_2, y_2) = \lambda(x_1, y_1).$$

Tenemos

$$[(a,b)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \text{ existe } \lambda > 0 \text{ tal que } (a,b) = \lambda(x,y)\}.$$

Note que $[(a,b)]$ es la semirecta que nace en el origen de $\mathbb{R}^2$ y cuyo vector director es (a,b) si (a,b) es no nulo. Cuando $(a,b) = (0,0)$, se tiene que $[(a,b)]$ viene dado por el origen de $\mathbb{R}^2$. De esto se sigue que el conjunto cociente X/R viene dado por $S^1 \cup \{(0,0)\}$.





Probemos esto último. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{R}^2/R \arrow[r, "\widehat{f}"'] & S^1 \cup \{0\} \end{tikzcd}$$

donde

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x,y)}{||(x,y)||} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Veamos que $\widehat{f}$ está bien definida. Supongamos que $(a,b)R(x,y)$. Luego existe $\lambda > 0$ tal que $(a,b) = \lambda(x,y)$. De donde $\lambda = \frac{||(a,b)||}{||(x,y)||}$. Entonces,

$$f(a,b) = \frac{(a,b)}{||(a,b)||} = \frac{1}{||(a,b)||} \cdot \frac{||(a,b)||}{||(x,y)||} \cdot (x,y) = f(x,y).$$

Ahora veamos que $\widehat{f}$ es inyectiva. Supongamos que $\widehat{f}([(a,b)]) = \widehat{f}([(c,d)])$. Entonces $f(a,b) = f(c,d)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{(a,b)}{||(a,b)||} &= \frac{(c,d)}{||(c,d)||} \\ (a,b) &= \frac{||(a,b)||}{||(c,d)||} \cdot (c,d). \end{aligned}$$

De donde $(a,b)R(c,d)$ tomando $\lambda = \frac{||(a,b)||}{||(c,d)||}$. Así, $[(a,b)] = [(c,d)]$ y $\widehat{f}$ es inyectiva. Ahora veamos que $\widehat{f}$ es sobreyectiva. Sea $(x,y) \in S^1$. Luego $||(x,y)|| = 1$. Tenemos

$$(x,y) = \frac{(x,y)}{||(x,y)||} = f(x,y) = \widehat{f}([x,y]).$$

Por lo tanto, $\widehat{f}$ es biyectiva.

(3) Consideremos el intervalo $X = [0,1]$ y el subconjunto $A = \{0,1\}$, junto con la relación

$$(a,b) \in R \Longleftrightarrow a = b \text{ o } a,b \in A.$$

Note que

$$X/A = \{[1]\} \cup \{t : t \notin A\}.$$

Veamos que este cociente viene dado por S^1. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/R \arrow[r, "\widehat{f}"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

donde

$$f(\theta) = e^{2\pi i\theta} = (\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)).$$

Tenemos que $f(0) = (1,0)$ y $f(1) = (1,0)$, por lo que $\widehat{f}$ está bien definida. Veamos que es inyectiva. Supongamos que $\widehat{f}([x]) = \widehat{f}([y])$. Nos queda $e^{2\pi i(x-y)} = 1$. De donde $2\pi i(x-y) = 0$ o $2\pi i(x-y) = 2k\pi i$, donde k es un entero no nulo. En el primer caso nos queda $x = y$. En el segundo, tenemos $x = k + y$. Ahora, como $x, y \in [0, 1]$, necesariamente $k = 1$. Se sigue que $x = 1$ y $y = 0$. En cualquier caso, tenemos $[x] = [y]$ y $\widehat{f}$ es inyectiva. Ahora veamos que es sobreyectiva. Sea $(x, y) \in S^1$. Tenemos

$$(x, y) = (\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)), \text{ donde } \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Por lo tanto, $\widehat{f}$ es una biyección.

1.5 Familias de conjuntos

Considere un conjunto X y sea Δ una familia de índices. Podemos considerar la familia $\{A_i \subseteq X \ / \ i \in \Delta\}$.

Ejemplo 1.5.1. $\{D_r = \text{ disco de radio } r > 0 \text{ y centro en } (0,0) \ / \ r \in (0, +\infty)\}$.

Dada una familia $\{A_\alpha \ / \ \alpha \in \Delta\}$ de subconjunto de X, definimos la unión y la intersección de esta familia como:

$$\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha = \{x \in X \ / \ \text{existe } \alpha_0 \in \Delta \text{ tal que } x \in A_{\alpha_0}\},$$
$$\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha = \{x \in X \ / \ x \in A_\alpha, \ \text{para todo } \alpha \in \Delta\}.$$

Ejemplo 1.5.2. Sea $A_n = \{m \in \mathbb{N} \ / \ m > n\}$. Tenemos $\bigcap A_n = \emptyset$.

1.6 Conjuntos numerables

Un conjunto X se dice **numerable** si existe una biyección $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$ de X en $\mathbb{N}$.

Lema 1.6.1. Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ o es finito o es numerable.

Demostración: Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Supongamos que A no es finito. El Principio del Mínimo Entero Positivo dice que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un primer elemento. Entonces A tiene un primer elemento a_1. Consideramos ahora $A - \{a_1\}$. Sea a_2 el primer elemento de $A - \{a_1\}$. Note que $a_1 < a_2$. Luego consideramos $A - \{a_1, a_2\}$ y seguimos aplicando el mismo razonamiento inductivamente. Denotamos por a_n el primer elemento de $A - \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$, donde $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n$. Consideremos la función $\mathbb{N} \longrightarrow \{a_1, a_2, \dots\}$ dada por $n \mapsto a_n$. Tenemos que esta funcón es una biyección. Sólo falta probar que $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Es obvio que $\{a_1, a_2, \dots\} \subseteq A$. Supongamos que esta contención es estricta, es decir que $A - \{a_1, a_2, \dots\} \neq \emptyset$. Sea a el primer elemento de $A - \{a_1, a_2, \dots\}$. Luego $a > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual no es posible. Por lo tanto $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. $\square$

Corolario 1.6.1. Todo subconjunto de un conjunto numerable o es finito o es numerable.

Demostración: Sea A un subconjunto de X, donde X es numerable. Tenemos una biyección $X \xrightarrow{f} \mathbb{N}$. Luego, $f(A)$ es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que es o finito o numerable. Como f es biyectiva, se tiene que A es o finito o numerable. $\square$

Teorema 1.6.1. La unión numerable de conjunto numerables es un conjunto numerable.

Demostración: Sea $\mathcal{F} = \{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de conjuntos numerables. Note que podemos escribir cada X_n como una lista

$$X_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots\}.$$

Para probar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es numerable, una manera de hacerlo es escribir este conjunto como una lista. Una forma de hacer esto viene dada por contar los elementos de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ como se muestra a continuación:

$$\begin{tikzcd}
X_1 : & a_{11} \arrow[r] & a_{12} \arrow[dl] & a_{13} \arrow[r] & a_{14} \arrow[dl] & \cdots \\
X_2 : & a_{21} \arrow[d] & a_{22} \arrow[ur] & a_{23} \arrow[dl] & a_{24} & \cdots \\
X_3 : & a_{31} \arrow[ur] & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

$\square$

Teorema 1.6.2. Si $X_1, \dots, X_n$ son conjuntos numerables entonces $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ es numerable.

Demostración: Por el Principio de Inducción, basta probar que si X e Y son numerables entonces $X \times Y$ es numerable. Escribamos

$$\begin{aligned} X &= \{x_1, x_2, x_3, \dots\}, \\ Y &= \{y_1, y_2, y_3, \dots\}. \end{aligned}$$

Luego, podemos escribir $X \times Y$ como una lista

$$X \times Y = \left\{ \begin{array}{lll} (x_1, y_1), & (x_2, y_1), & \dots \\ (x_1, y_2), & (x_2, y_2), & \dots \\ \vdots & & \end{array} \right\}.$$

Por lo tanto, $X \times Y$ es numerable. $\square$

Corolario 1.6.2. $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable.

Ejemplo 1.6.1. $\mathbb{Q}^+ = \{\text{racionales positivos}\}$ es un conjunto numerable. La función $\mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $\frac{p}{q} \mapsto (p, q)$ es inyectiva. Por otro lado, $\mathrm{Im}(\mathbb{Q}^+)$ es un subconjunto numerable de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, por ser este último numerable. Se sigue que $\mathbb{Q}^+$ es numerable.

Ejemplo 1.6.2. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$ (n veces) es numerable.

1.7 Ejercicios

1.7.1 Operaciones entre conjuntos

Ejercicio 1.7.1. Dados A, B y C subconjuntos de X, probar:

(1) $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C \Longrightarrow A = B = C$.

(2) **Leyes de De Morgan:** $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ y $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(3) **Propiedad distribituva:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.7.2 Funciones y diagramas

Ejercicio 1.7.2. Dada una función $f : X \longrightarrow Y$, probar que para todo $B \subseteq Y$ se tiene $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

Ejercicio 1.7.3. Dado el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

siendo $1_X(x) = x$ para todo $x \in X$, probar que f es una función inyectiva y g una función sobreyectiva.

1.7.3 Relaciones de equivalencia

Ejercicio 1.7.4. Dada una relación de equivalencia R en un conjunto X, y una función $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(x) = f(y)$ si xRy, sabemos que se puede contruir una función $\widehat{f} : X/R \longrightarrow Y$, dada por $\widehat{f}([x]) = f(x)$, tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/R \arrow[r, "\widehat{f}"'] & Y \end{tikzcd}$$

Probar que $\widehat{f}$ es la única función de X/R en Y tal que $\widehat{f} \circ p = f$. Probar además que si f es sobreyectiva entonces $\widehat{f}$ es biyectiva.

1.7.4 Familias de conjuntos: operaciones, funciones y Leyes de De Morgan

Ejercicio 1.7.5. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de subconjuntos de X, probar la siguiente generalización de las leyes de De Morgan:

(1) $\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$.

(2) $\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$.

Ejercicio 1.7.6. Si $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de sunconjuntos de Y y $f : X \longrightarrow Y$ es una función, probar:

(1) $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(B_\alpha)$.

(2) $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(B_\alpha)$.

Ejercicio 1.7.7.

(1) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de sunconjuntos de $\mathbb{N}$ definida por $A_n = \{m \in \mathbb{N} \;/\; m \geq n\}$. Probar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

(2) Probar $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$.

(3) Probar $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = (0,1)$.

1.7.5 Cubrimientos y particiones

Ejercicio 1.7.8. Diremos que una familia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de subconjuntos de X es un **cubrimiento** de un subconjunto $A \subseteq X$ si $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$. Un cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una **partición** de X si para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$, $\alpha \neq \beta \Longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$. Dado cualquier cubrimiento $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X, considere la familia $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{aligned} &V_1 = U_1,\; V_2 = U_2 - U_1,\; V_3 = U_3 - (U_1 \cup U_2),\\ &\;\vdots\\ &V_n = U_n - \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} U_j\right). \end{aligned}$$

Probar que $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento de X, y más aún que $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento de X.

Ejercicio 1.7.9. Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una familia finita de subconjuntos de X. Para cada $H \subseteq \{1, \ldots, n\}$, se define

$$P_H = \bigcup_{i\in H} A_i \text{ y } Q_H = \bigcap_{i\in H} A_i.$$

PAra cada $1 \leq k \leq n$, sea $\mathcal{F}_k$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ que tiene k-elementos. Probar

$$\bigcap_{H\in\mathcal{F}_k} P_H \subseteq \bigcup_{H\in\mathcal{F}_k} Q_H \text{ si } 2k < n+1.$$

1.7.6 Conjuntos numerables

Ejercicio 1.7.10. Demuestre que:

(1) La unión numerable de conjuntos numerables es numerable, pero esta vez definiendo una biyección de $\mathbb{N}$ en dicha unión.
Sugerencia: Probar primero el resultado para uniones disjuntas.

(2) $\mathbb{Z}$ es numerable.

(3) El producto de dos conjuntos numerables es numerable, usando la parte (1).

(4) $\mathbb{Q}$ es numerable.

(5) $\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$ (n veces) es numerable.

CAPÍTULO 2

ESPACIOS TOPOLÓGICOS

2.1 Topologías

Dado un conjunto X, una **topoloía** en X es una familia $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisface las siguientes propiedades:

(1) $\emptyset, X \in \tau$.

(2) τ es **cerrada bajo intersecciones finitas**: Si $A_1, A_2 \in \tau$ entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

(3) τ es **cerrada bajo uniones arbitrarias**: Para toda familia $\{A_\alpha \ / \ \alpha \in \Lambda\} \subseteq \tau$, se tiene $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \tau$.

Dadas dos topologías τ_1 y τ_2 en X, diremos que τ_1 es más débil que τ_2 si $\tau_1 \subseteq \tau_2$. A veces denotaremos este hecho mediante el uso de una flecha $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Ejemplo 2.1.1. Sea $X = \{a, b, c, d\}$. La familia de subconjuntos $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ es una topología de X. Note que es claro que $\{\emptyset, X\}$ y $\mathcal{P}(X)$ también son topologías de X. Éstas se denominan **topología indiscreta** y **topología discreta**, respectivamente. Es fácil ver que la familia de subconjuntos $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ es también una topología de X. Tenemos el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & \tau_1 \arrow[dr] & \\
\{\emptyset, X\} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathcal{P}(X) \\
 & \tau_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Un espacio topológico (X, τ) es un conjunto X junto con una topología τ.

Ejemplo 2.1.2.

(1) Sea X un conjunto y $\tau = \{A \subseteq X : A^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Veamos que τ es una topología, a la cual llamaremos **topología cofinita**. Ya sabemos que $\emptyset \in \tau$. Además, $X^c = \emptyset$ es finito, de donde $X \in \tau$. Ahora sean $A_1, A_2 \in \tau$. Tenemos que $(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$ es finito, porque A_1^c y A_2^c lo son. Entoces τ es cerrada bajo intersecciones finitas. Ahora consideremos una familia de subconjuntos $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Tenemos que $\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c$ es finito porque cada A_α^c es finito y la intersección de conjuntos finitos es finita. Por lo tanto, τ es una topología. Si X es finito, note que $\tau = \mathcal{P}(X)$.

(2) Sea A un sunconjunto de un espacio topológico (X, τ). Existe una topología que A hereda de τ_X, definida por

$$\tau_A := \{A \cap V \,:\, V \in \tau_X\}.$$

Dicha topología se conoce como la **topología relativa** de A. En efecto, veamos que τ_A define una topología en A. Es claro que $\emptyset, A \in \tau_A$ pues $\emptyset = A \cap \emptyset$ y $A = A \cap X$. Sean $V_1, V_2 \in \tau_A$. Luego, existen $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $V_1 = A \cap U_1$ y $V_2 = A \cap U_2$. De donde

$$V_1 \cap V_2 = (A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = A \cap (U_1 \cap U_2),$$

donde $U_1 \cap U_2 \in \tau$. Por lo que $V_1 \cap V_2 \in \tau_A$. Ahora sea $\{V_\alpha \ / \ \alpha \in \Lambda\}$ una familia de τ_A. Para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $U_\alpha \in \tau$ tal que $V_\alpha = A \cap U_\alpha$. Entonces tenemos

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A \cap U_\alpha = A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \right),$$

donde $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \in \tau$. Así $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha \in \tau_A$.

Dado (X, τ) un espacio topológico. Los elementos de τ se denominan **abiertos** de X. Diremos que $A \subseteq X$ es **cerrado** si A^c es abierto.

Recordamos de los cursos de análisis que, en $\mathbb{R}$, A es abierto si, y sólo si, para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subseteq A$. A la familia $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} \ / \ A \text{ es abierto}\}$ la llamaremos **topología usual** de $\mathbb{R}$. Veamos que τ es una topología con respecto a la definición que dimos anteriormente. Es claro que $\emptyset \in \tau$ y $\mathbb{R} \in \tau$. Ahora supongamos que A_1 y A_2 son abiertos. Sea $x \in A_1 \cap A_2$. Luego, existen $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$ tales que $(x - r_1, x + r_1) \subseteq A_1$ y $(x - r_2, x + r_2) \subseteq A_2$. Si $r = \min\{r_1, r_2\}$, entonces $(x - r, x + r) \subseteq A_1 \cap A_2$. Finalmente, consideremos una familia de abiertos $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$. Luego, existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x \in A_\alpha$. De donde existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subseteq A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$.

De forma más general, tenemos la topología usual de $\mathbb{R}^n$, en la cual un conjunto A es abierto si, y sólo si, para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que la bola abierta $B_x(r)$ de centro x y radio r está contenida en A.

2.2 Espacios métricos

Dado un conjunto X, una **métrica** en X es una función $f : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(1) $d(x, y) \geq 0$, donde $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in X$.

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todo $x, y, z \in X$.

Dado $x \in X$ y $r > 0$, denotamos la **bola abierta de centro** x **y radio** r como

$$B_x(r) := \{y \in X \,:\, d(x, y) < r\}.$$

Definamos τ_d como la familia de subconjuntos de X tales que

$$A \in \tau_d \iff \text{para todo } x \in A, \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B_x(r) \subseteq A.$$

La familia τ_d se conoce como la **topología métrica** en X.

Proposición 2.2.1. Un conjunto A pertenece a τ_d si, y sólo si, es la unión de bolas abiertas.

Demostración: Sea $A \in \tau_d$. Luego para cada $x \in A$ existe $r_x > 0$ tal que $x \in B_x(r_x) \subseteq A$. De esto se sigue que $A \subseteq \bigcup_{x \in X} B_x(r_x) \subseteq A$. Por lo tanto, $A = \bigcup_{x \in X} B_x(r_x)$.
Ahora supongamos que $A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_{b_\alpha}(r_\alpha)$. Sea $x \in A$. Luego existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x \in B_{b_\alpha}(r_\alpha)$, de donde $d(x, b_\alpha) < r_\alpha$. Tomamos $r = r_\alpha - d(x, b_\alpha)$. Tenemos que $B_x(r_x) \subseteq A$. $\square$

Ejemplo 2.2.1.

(1) **Métrica discreta:** La función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

es una métrica en X, llamada **métrica discreta**. Tenemos que $B_x(1) = \{x\}$, $B_x(r) = \{x\}$ si $r \leq 1$, y que $B_x(r) = X$ si $r > 1$. Veamos que $\tau_d = \mathcal{P}(X)$. Es claro que $\tau_d \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ahora sea $A \in \mathcal{P}(X)$. Tenemos $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} = \bigcup_{x \in A} B_x(1)$, y por la proposición anterior, nos queda $A \in \tau_d$. Por lo tanto, $\tau_d = \mathcal{P}(X)$. De aquí viene el nombre de métrica discreta.

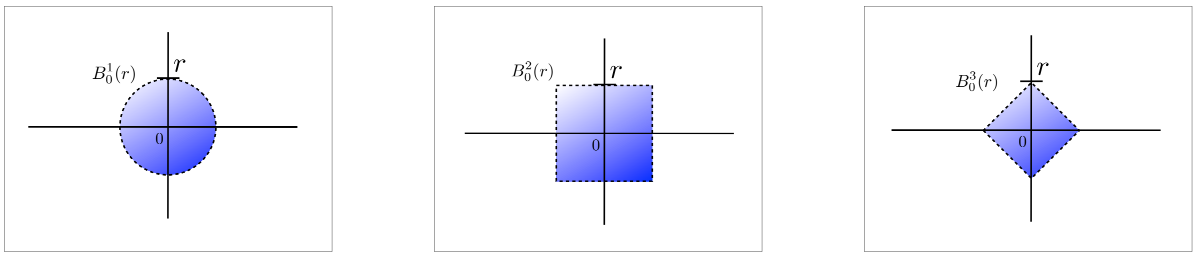
(2) Sea $X = \mathbb{R}^n$ y $d_1, d_2, d_3 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ las métricas dadas por

$$d_1(x, y) := \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right]^{1/2}, \quad d_2(x, y) := \max\{|x_i - y_i| \;/\; i = 1, \ldots, n\} \;\text{ y }\; d_3(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Usamos la notación

$B_x^1(r) := \{y \in \mathbb{R}^n : d_1(x,y) < r\},\ B_x^2(r) := \{y \in \mathbb{R}^n : d_2(x,y) < r\}$ y $B_x^3(r) := \{y \in \mathbb{R}^n : d_3(x,y) < r\}$.

Para $x = 0$, tenemos la siguiente figura:



2.3 Topología inicial y final

Dada una función $f : X \longrightarrow Y$ y una topología τ_Y en Y, llamaremos a la familia

$$f^{-1}(\tau_Y) := \{f^{-1}(A) \ / \ A \in \tau_Y\}$$

la **topología inicial en X inducida por f**. Verifiquemos que $f^{-1}(\tau_Y)$ es una topología en X. Primero, $\emptyset \in f^{-1}(\tau_Y)$ ya que $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$. De forma similar, $X \in f^{-1}(\tau_Y)$ pues $X = f^{-1}(Y)$. Sean B_1 y B_2 en $f^{-1}(\tau_Y)$. Luego existen $A_1, A_2 \subseteq Y$ tales que $B_1 = f^{-1}(A_1)$ y $B_2 = f^{-1}(A_2)$. Así tenemos

$$B_1 \cap B_2 = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_1 \cap A_2) \in f^{-1}(\tau_Y).$$

Ahora consideremos una familia $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ en $f^{-1}(\tau_Y)$. Para cada $\alpha \in \Lambda$, existe $A_\alpha \subseteq Y$ tal que $B_\alpha = f^{-1}(A_\alpha)$. Así obtenemos

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(A_\alpha) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) \in f^{-1}(\tau_Y).$$

Por lo tanto, $f^{-1}(\tau_Y)$ es una topología en X.

Ahora, sea τ_X una topología en X, la **topología final en X inducida por f** se define como la familia

$$\tau_f := \{B \subseteq Y \ / \ f^{-1}(B) \in \tau_X\}.$$

Veamos que τ_f es en efecto una topología. Primero, $\emptyset \in \tau_f$ ya que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_X$. También $Y \in \tau_f$ pues $f^{-1}(Y) = X \in \tau_X$. Sean $B_1, B_2 \in \tau_f$. Tenemos

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \in \tau_X$$

y por ende $B_1 \cap B_2 \in \tau_f$. Ahora sea $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una subfamilia de τ_f. Tenemos

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(B_\alpha) \in \tau_X,$$

y así $\bigcup_\alpha B_\alpha \in \tau_f$. Por lo tanto, τ_f es una topología en Y.

2.4 Base de una topología

Dado un espacio topológico (X, τ) y $\beta \subseteq \tau$. Diremos que β es **base** de τ si todo elemento de τ es unión de miembros de β, es decir, para todo $A \in \tau$ y para todo $x \in A$ existe $U \in \beta$ tal que $x \in U \subseteq A$.

Ejemplo 2.4.1.

(1) Dado un espacio métrico (X, d), la familia $\beta = \{B(x, r) : x \in X \text{ y } r > 0\}$ es una base de la topología métrica τ_d.

(2) Sea (X, τ) un espacio topológico y β una base de τ. Dado $A \subseteq X$, $\beta_A = \{U \cap A \ / \ U \in \beta\}$ es base de la topología relativa τ_A. En efecto, sea $U \cap A \in \tau_A$. Como β es base de τ, podemos escribir $U = \bigcup\{U_\alpha \ / \ \alpha \in \Lambda\}$ donde cada U_α pertenece a β. Así tenemos $U \cap A = \bigcup\{U_\alpha \cap A \ / \ \alpha \in \Lambda\}$, donde $U_\alpha \cap A \in \beta_A$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Teorema 2.4.1. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en X, y β_1 y β_2 bases de τ_1 y τ_2, respectivamente. Si para todo $U \in \beta_2$ y para todo $x \in U$ existe $V \in \beta_1$ tal que $x \in V \subseteq U$, entonces $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Demostración: Sea $U \in \tau_2$. Entonces U puede escribirse como $U = \bigcup\{U_\alpha \ / \ \alpha \in \Lambda\}$ donde cada U_α pertenece a β_2. Fijemos $\alpha \in \Lambda$ y sea $x \in U_\alpha$. Por hipótesis, existe $V_\alpha^x \in \beta_1$ tal que $x \in V_\alpha^x \subseteq U_\alpha$. Esto implica que podemos escribir $U_\alpha = \bigcup\{V_\alpha^x \ / \ x \in U_\alpha\} \in \tau_1$. De donde se sigue que $U \in \tau_1$. $\square$

Dado X un conjunto y β una familia de subconjuntos de X. Un pregunta interesante es saber cuándo β es base de alguna topología. Impongamos las siguientes condiciones sobre β:

(1) β debe ser un cubrimiento de X, es decir que X se escribe como la unión de los conjuntos de β.

(2) Si $U, V \in \beta$ entonces $U \cap V$ debe ser unión de miembros de β.

Sea

$$\tau := \{A \in \mathcal{P}(X) \ / \ A = \bigcup\{U : U \in \mathcal{F} \subseteq \beta\}.$$

Veamos que β es una topología en X.

(i) $\emptyset \in \tau$: Basta escribir $\emptyset = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, donde $A_\alpha \in \beta$ y $\Lambda = \emptyset$.

(ii) $X \in \tau$: Escribimos $X = \bigcup\{U : U \in \beta\}$ porque β es un cubrimiento de X.

(iii) Sean $A_1, A_2 \in \tau$. Veamos que $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Sabemos que

$$A_1 = \bigcup\{U : U \in \mathcal{F}_1 \subseteq \beta\} \text{ y } A_2 = \{V : V \in \mathcal{F}_\in \subseteq \beta\}.$$

Luego tenemos

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup\{U \cap V : (U, V) \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2\}.$$

Como $U, V \in \beta$, se tiene que $U \cap V$ es unión de miembros de β, $U \cap V = \bigcup\{S : S \in \mathcal{F}_{(U,V)} \subseteq \beta\}$. Entonces,

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{(U,V) \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2} \left(\bigcup\{S : S \in \mathcal{F}_{(U,V)} \subseteq \beta\} \right) \in \tau.$$

(iv) Considere una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ donde $A_\alpha \in \tau$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Para cada α, tenemos

$$A_\alpha = \bigcup \{U : U \in \mathcal{F}_\alpha \subseteq \beta\}.$$

Así

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \left(\bigcup \{U : U \in \mathcal{F}_\alpha \subseteq \beta\} \right) \in \tau.$$

Teorema 2.4.2. Sea $\beta \subseteq \mathcal{P}(X)$. Entonces β es base de una topología si cumple las siguientes propiedades:

(1) β es un cubrimiento de X.

(2) Para cada $U, V \in \beta$, ocurre que $U \cap W = \bigcup \{W : W \in \mathcal{F} \subseteq \beta\}$, es decir $U \cap V$ es unión de miembros de β. O equivalentemente, para cada par $U, V \in \beta$ y para cada $x \in U \cap V$, existe $W \in \beta$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

Ejemplo 2.4.2.

(1) Dada una función $f : X \longrightarrow Y$, y τ una topología en X. Considere la topología final τ_f. Si β es una base de τ y f es sobreyectiva, entonces $\beta_f = \{f(U) \ / \ U \in \beta\}$ es una base de τ_f. Primero veamos que β_f es un cubrimiento de Y. Sabemos que $X = \bigcup \{U \ / \ U \in \beta\}$. Como f es sobreyectiva, tenemos

$$Y = f(X) = \bigcup \{f(U) \ / \ U \in \beta\} = \bigcup \{V \ / \ V \in \beta_f\}.$$

Ahora sean $f(U), f(V) \in \beta_f$. Sabemos que $f(U) \cap f(V) = f(U \cap V)$. Ahora, $U \cap V = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$, donde $B_\alpha \in \beta$. Se sigue que

$$f(U) \cap f(V) = f\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f(B_\alpha).$$

Por lo tanto, β_f es una base de la topología final en Y.

(2) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función y τ una topología en Y con base β. La familia $f^{-1}(\beta) = \{f^{-1}(B) \ / \ B \in \beta\}$ es base de la topología inicial en X inducida por f. Primero tenemos que $f^{-1}(\beta)$ es un cubrimiento de X, pues

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(A_\alpha),$$

donde $A_\alpha \in \beta$. Ahora sean $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in f^{-1}(\beta)$. Tenemos que $U \cap V = \bigcup \{A_\alpha \ / \ \alpha \in \Lambda\}$, donde $A_\alpha \in \beta$. Así nos queda

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(A_\alpha).$$

Por lo tanto, $f^{-1}(\beta)$ es base de $f^{-1}(\tau)$.

(3) En $\mathbb{R}$, considere la familia $\beta = \{[a, b) : b > a\}$. Note que $\mathbb{R} = \bigcup \{[a, b) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ y } b > a\}$. Ahora veamos que para cada par $[a, b)$ y $[c, d)$, se tiene que $A = [a, b) \cap [c, d)$ puede escribirse como unión de elementos de β. Las únicas posibilidades para A son

$$A = \emptyset, \ [a, b), \ [c, d), \ [c, b).$$

Por lo tanto, β es base de una topología en $\mathbb{R}$.

(4) **Topología producto**: Consideremos dos espacios topológicos (X, τ_X) y (Y, τ_Y) con bases β_X y β_Y, respectivamente. Sea

$$\beta_{X\times Y} := \{U \times V \ / \ U \in \tau_X \text{ y } V \in \tau_Y\}.$$

Veamos que $\beta_{X\times Y}$ es base de una topología en $X \times Y$. Podemos escribir $X = \bigcup\{U \ / \ U \in \beta_X\}$ y $Y = \bigcup\{V \ / \ V \in \beta_Y\}$. Tenemos

$$X \times Y = \left(\bigcup\{U \ / \ U \in \beta_X\}\right) \times \left(\bigcup\{V \ / \ V \in \beta_Y\}\right) = \bigcup\{U \times V \ / \ U \in \beta_X \text{ y } V \in \beta_Y\}$$

donde cada $U \times V$ pertenece a $\beta_{X\times Y}$. Entonces $\beta_{X\times Y}$ es un cubrimiento abierto de $X \times Y$. Ahora sean $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2 \in \beta_{X\times Y}$. Tenemos

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \beta_{X\times Y}.$$

Por lo tanto, $\beta_{X\times Y}$ es base de una topología en $X \times Y$. Dicha topología se conoce como topología producto de $X \times Y$. Es de hacer notar que la descripción que acabamos de hacer también vale para productos arbitrarios.

2.5 Topología desde un punto de vista local

Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Un **entorno de** x es cualquier abierto que contenga a x. Esto es, $U \in \tau$ es un entorno de x si $x \in U$. Otros autores definen un entorno de x como cualquier subconjunto V de X tal que existe $U \in \tau$ con $x \in U$. Dado $x \in X$, denotaremos por $W(x)$ al conjunto de todos los entornos de x.

Un subconjunto $\beta(x) \subseteq W(x)$ es una **base de entornos de** x si para todo $W \in W(x)$ existe $B \in \beta(x)$ tal que $B \subseteq W$.

Ejemplo 2.5.1. Dado $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, la familia $\beta(x) = \{B_x(r) : r > 0\}$ es base de entornos de x. Dicha base se puede reducir a la base $\beta_1(x) = \{B_x(r) : r \in \mathbb{Q}^+\}$. Veamos que $\beta_1(x) = \{B_x(r) \ / \ r \in \mathbb{Q}^+\}$ y $\beta_2(x) = \{B_x(1/n) \ / \ n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ son bases de entornos de x. Sea $U \in W(x)$. Sabemos que existe $B_x(r)$ tal que $B_x(r) \subseteq U$. Sea $q \in (0, r)$. Se tiene que $B_x(q) \subseteq B_x(r) \subseteq U$. El hecho de que $\beta_2(x)$ es base de entornos de x se sigue de manera similar.

Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que X es de **primera categoría** (o que satisface el **primer axioma de numerabilidad**) si cada $x \in X$ posee una base de entornos numerable.

2.6 Interior y clausura

Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que $x \in X$ es un **punto de acumulación de** A si para todo abierto $U \in W(x)$ se tiene que $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Es decir, x es un punto de acumulación de x si, y sólo si, todo entorno de x contiene al menos un punto en A distinto de x.

Ejemplo 2.6.1. En $\mathbb{R}$, considere $A = [a, b)$. El punto b es un punto de acumulación de A, al igual que a. Más aún, todo $c \in (a, b)$ es un punto de acumulación de A. Tenemos que $[a, b]$ es el conjunto de todos los puntos de acumulación de A.

Para $B = [a, b) \cup \{d\}$, con $d > b$, tenemos que $[a, b]$ son todos los puntos de aculumación de B.

Lema 2.6.1. Un subconjunto $A \subseteq X$ es abierto si, y sólo si, A es entorno de cada uno de sus puntos.

Demostración: Es inmediato. $\square$

Denotaremos por A' al conjunto de puntos de acumulación de A. El conjunto

$$\overline{A} := A \cup A'$$

se denomina **clausura** de A.

Teorema 2.6.1.

(1) $\overline{A}$ es cerrado.

(2) $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.

(3) $\overline{A} = \bigcap\{B \supseteq A : B \text{ es cerrado}\}$.

(4) A es cerrado si, y sólo si, $A = \overline{A}$.

Demostración:

(1) Probemos que $\overline{A}^c$ es abierto. Sea $x \in \overline{A}^c$. Luego $x \notin A'$ y $x \notin A$. De donde existe $U \in W(x)$ tal que $(U - \{x\}) \cap A = \emptyset$. Como $x \notin A$, se tiene $U \cap A = \emptyset$. Veamos que $U \cap \overline{A} = \emptyset$. Supongamos lo contrario. Luego existe $y \in U$ tal que $y \in \overline{A}$. Como $U \cap A = \emptyset$, se tiene que $y \in A'$. De donde $[(U - \{x\}) - \{y\}] \cap A \neq \emptyset$. Entonces existe $z \in U \cap A$ donde $z \neq x$. Obteniendo una contradicción. Por lo tanto, $x \in U \subseteq \overline{A}^c$.

(2) Sea B otro conjunto cerrado que contiene a A. Sea $x \in \overline{A}$. Luego, $x \in A$ o $x \in A'$. Si $x \in A$ entonces $x \in B$. Ahora supongamos que $x \in A'$. Supongamos que $x \notin B$. Entonces, como B es cerrado, existe $U \in W(x)$ tal que $U \subseteq B^c$, es decir $U \cap B = \emptyset$. Como $x \notin A$ y $A \subseteq B$, se sigue $(U - \{x\}) \cap A = \emptyset$, obteniendo una contradicción. Por lo tanto, $\overline{A} \subseteq B$.

(3) Como $\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A, se tiene que $\overline{A} \subseteq B$ para todo cerrado B que contenga a A. De donde $\overline{A} \subseteq \bigcap\{B \supseteq A : B \text{ es cerrado}\}$. Ahora, por (1) sabemos que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado que contiene a A, por lo que $\bigcap\{B \supseteq A : B \text{ es cerrado}\} \subseteq \overline{A}$.

(4) Supongamos que A es cerrado. Por (3), tenemos $A \subseteq \overline{A} = \cap\{B \supseteq A : B \text{ es cerrado}\} \subseteq A$, de donde $A = \overline{A}$. Ahora supongamos que $A = \overline{A}$. Como $\overline{A}$ es cerrado por (1), se tiene que A es cerrado.

$\square$

Proposición 2.6.1. Un subconjunto $A \subseteq X$ es cerrado si, y sólo si, A contiene todos sus puntos de acumulación.

Demostración: Supongamos que A es cerrado. Luego $A = \overline{A}$. Se tiene $A' \subseteq \overline{A} = A$. Ahora supongamos que A contiene a todos sus puntos de acumulación. Tenemos $A = A \cup A' = \overline{A}$, por lo tanto A es cerrado. $\square$

Podemos ver a $A \mapsto \overline{A}$ como un operador $\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.

Proposición 2.6.2 (Propiedades)**.**

(1) $A \subseteq B \Longrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(3) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Demostración:

(1) Tenemos que $\overline{B}$ es un cerrado que contiene a A. Como $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A, nos queda $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(2) Como la unión de cerrados es cerrado, tenemos que $\overline{A} \cup \overline{B}$ es un cerrado que contiene a $A \cup B$. Se sigue que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Falta probar la contención contraria. Como $A \subseteq A \cup B$, se tiene por (1) que $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$. De manera similar, $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. De donde $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

(3) Procedemos de manera similar a (2). Como $\overline{A} \cap \overline{B}$ es un cerrado que contiene a $A \cap B$, nos queda $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

$\square$

La contención enunciada en (3) puede ser estricta. Consideremos por ejemplo los conjuntos $A = (-1, 0)$ y $B = (0, 1)$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual. Tenemos que $\overline{A} = [-1, 0]$ y $\overline{B} = [0, 1]$. Luego $A \cap B = \emptyset$, de donde $\overline{A \cap B} = \emptyset$. Por otro lado, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{0\}$. Entonces $\overline{A \cap B} \subsetneqq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Se define el **interior** de un subconjunto $A \subseteq X$, denotado por $\mathrm{int}(A)$, como la unión de todos los abiertos contenidos en A, es decir

$$\mathrm{int}(A) := \bigcup \{U \subseteq A : U \text{ es abierto}\}.$$

Proposición 2.6.3 (Propiedades)**.**

(1) $\mathrm{int}(A)$ es abierto.

(2) A es abierto sí, y sólo si, $A = \mathrm{int}(A)$.

(3) $A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(B)$.

(4) $\mathrm{int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$.

(5) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$.

Demostración:

(1) Es inmediato pues la unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

(2) Supongamos que A es abierto. Entonces $A \subseteq \bigcup\{U \subseteq A : U \text{ es abierto}\}$. Por otro lado, es claro que $\bigcup\{U \subseteq A : U \text{ es abierto}\} \subseteq A$. De donde $A = \mathrm{int}(A)$. Ahora supongamos que $A = \mathrm{int}(A)$. Como $\mathrm{int}(A)$ es abierto, se tiene que A es abierto.

(3) Sea U cualquier abierto contenido en A. Entonces U es un abierto contenido en B. Por lo que $\bigcup\{U \subseteq A : U \text{ es abierto}\} \subseteq \bigcup\{V \subseteq B : V \text{ es abierto}\}$, es decir $\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(B)$.

(4) Como $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$ es un abierto contenido en $A \cup B$, se tiene $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) \subseteq \mathrm{int}(A \cup B)$.

(5) Por (3), tenemos $\mathrm{int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}(A)$ y $\mathrm{int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}(B)$. Entonces $\mathrm{int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$. Por otra parte, $\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$ es un conjunto abierto contenido en $A \cap B$, de donde se tiene que $\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) \subseteq \bigcup\{U \subseteq A \cap B : U \text{ es abierto}\} = \mathrm{int}(A \cap B)$. Por lo tanto, se sigue la igualdad.

$\square$

Dado un subconjunto $A \subseteq X$, la **frontera** de A, denotada por $\mathrm{Fr}(A)$ o por ∂A, se define como el conjunto

$$\partial A := \overline{A} - \mathrm{int}(A).$$

Tenga en cuenta que $\mathrm{int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

Ejemplo 2.6.2. Sea $A = [0, 1)$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual. Tenemos $\partial A = [0, 1] - (0, 1) = \{0, 1\}$.

2.7 Funciones continuas

Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Diremos que f es **continua** si para todo $U \in \tau_Y$ se tiene que $f^{-1}(U) \in \tau_X$, es decir, la imagen inversa de todo abierto en Y es un abierto en X.

Ejemplo 2.7.1.

(1) Si A es un subespacio de X (es decir que la topología de A es la topología relativa), entonces la inclusión $i_A : A \longrightarrow X$ es una función continua.

(2) Toda función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si X tiene la topología inicial inducida por f.

(3) Toda función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si Y tiene la topología final inducida por f.

(4) Sean (X_1, τ_1), $\ldots$, (X, τ_n) espacios topológicos y considere a $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ con la topología producto. Para cada $j = 1, \ldots, n$, la proyección $p_j : X \longrightarrow X_j$ dada por $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$ es una función continua. En efecto, sea $U \in \tau_j$. Tenemos

$$p_j^{-1}(U_j) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X \,:\, x_j \in U\} = X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times U \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n \in \tau_X.$$

(5) Si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son funciones continuas, entonces $g \circ f : X \longrightarrow Y$ es una función continua. En efecto, si $U \in \tau_Z$ entonces $g^{-1}(U) \in \tau_Y$, porque g es continua. Luego, $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau_X$, pues f es también continua. Por lo tanto, $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau_X$ y $g \circ f$ es continua.

Teorema 2.7.1. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es continua.

(2) La imagen inversa de cada cerrado en Y es cerrado en X.

(3) La imagen inversa de cada miembro de la bade de Y es abierto en X.

(4) Para todo $x \in X$ y para todo $V \in W(f(x))$, existe $U \in W(x)$ tal que $f(U) \subseteq V$.

(5) Para todo $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(6) Para todo $B \subseteq Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

Demostración: Supongamos (1), y sea $B \subseteq Y$ cerrado. Luego B^c es abierto. Como f es continua, se tiene $(f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c) \in \tau_X$. De donde $f^{-1}(B)$ es cerrado en X. La implicación (2) $\Longrightarrow$ (1) se prueba de manera similar. Tenemos (1) $\Longrightarrow$ (2).

La implicación (1) $\Longrightarrow$ (3) es inmediata. Ahora supongamos (3). Sea β_Y una base de Y y $V \in \tau_Y$. Luego $V = \bigcup\{V_\alpha \;/\; V_\alpha \in \beta_Y\}$. Se tiene $f^{-1}(V) = \bigcup\{f^{-1}(V_\alpha) \;/\; V_\alpha \in \beta_Y\} \in \tau_X$, porque cada $f^{-1}(V_\alpha) \in \tau_X$ y la unión de abiertos es un abierto. Entonces tenemos (1) $\Longrightarrow$ (3).

Ahora probemos que (1) es equivalente a (4). Si asumimos (1) y $V \in W(f(x))$ para $x \in X$, entonces $f^{-1}(V) \in \tau_X$. Sea $U = f^{-1}(V)$. Tenemos $U \in W(x)$ y $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$. Ahora supongamos (4). Sea $V \in \tau_Y$ y $x \in f^{-1}(V)$. Existe $U_x \in W(x)$ tal que $f(U_x) \subseteq V$. Entonces $U_x \subseteq f^{-1}(f(U_x)) \subseteq f^{-1}(V)$.

De esto se sigue que $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in X} U_x$, donde cada U_x es un abierto en X. Por lo tanto, $f^{-1}(V)$ es abierto en X. Tenemos (1) $\Longrightarrow$ (4).

Como (5) involucra conjuntos cerrados, probemos (2) $\Longrightarrow$ (5). Esta elección es más conveniente, y ya hemos probado que (2) equivale a (1), (3) y (4). Supongamos (2). Como $\overline{f(A)}$ es cerrado en Y, se tiene que $f^{-1}(\overline{f(A)})$ es cerrado en X. Además, $A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Se sigue que $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. De donde $f(\overline{A}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subseteq \overline{f(A)}$.

Ahora asumamos (5) y probemos (6). Sea $B \subseteq Y$. Por (5), tenemos $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}$. Luego, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

Finalmente, probemos (6) $\Longrightarrow$ (2). Sea $B \subseteq Y$ cerrado. Luego $B = \overline{B}$. Por (6), tenemos $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B)$. Como la otra contención también vale, nos queda $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$, es decir, $f^{-1}(B)$ es cerrado. Por lo tanto, tenemos que (2), (5) y (6) son equivalentes.

$\square$

Teorema 2.7.2. Sea (Z, τ) un espacio topológico y $f : Z \longrightarrow X = \prod_{j=1}^{n} X_j$ una función. Entonces f es continua si, y sólo si, $p_j \circ f : Z \longrightarrow X_j$ es continua, para cada $j = 1, \ldots, n$.

Demostración: Si f es continua entonces $p_j \circ f$ también lo es, por ser la composición de funciones continuas. Ahora supongamos que $p_j \circ f$ es continua, para cada $j = 1, \ldots, n$. Consideramos a X con la topología producto. Por el teorema anterior, se tiene que basta probar que $f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_n)$ es abierto, para cada abierto $U_1 \times \cdots \times U_n$ de la base de τ_X. Para cada j, tenemos que

$$\tau \ni (p_j \circ f)^{-1}(U_j) = f^{-1} \circ p_j^{-1}(U_j) = f^{-1}(X_1 \times \cdots \times U_j \times \cdots \times X_n).$$

De donde

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_n) &= f^{-1}((U_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \cap \cdots \cap (X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times U_n)) \\ &= f^{-1}(U_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \cap \cdots \cap f^{-1}(X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times U_n) \in \tau. \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es continua.

$\square$

Corolario 2.7.1. Toda función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ puede escribirse como

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

Entonces f es continua si, y sólo si, cada f_j es continua, con $1 \leq j \leq n$.

El teorema anterior caracteriza a la topología producto en el sentido de que X posee dicha topología si, y sólo si, $f : Z \longrightarrow X$ es continua.

Dados dos espacios topológicos X e Y, un homoemorfismo es una función continua y biyectiva $f : X \longrightarrow Y$ tal que su inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ es también continua.

Ejemplo 2.7.2. Sea X el disco unitario e Y el casquete superior de la espera unitaria:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 < 1\} \quad \text{y} \quad Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ y } z > 0\}.$$

Sea $f : X \longrightarrow Y$ la función dada por

$$f(x,y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

Tenemos que f es continua porque cada función componente lo es. Además, f es biyectiva y la proyección $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ restringida a Y es la inversa de f, que también es continua. Por lo tanto, f es un homeomorfismo.

Proposición 2.7.1. Sea $A \subseteq X$, $i_A : A \longrightarrow X$ la inclusión de A en X, y Z otro espacio topológico. Entonces $f : Z \longrightarrow A$ es continua si, y sólo si, $i_A \circ f : Z \longrightarrow X$ es continua.

Demostración: Si f es continua entonces $i_A \circ f$ también lo es por ser la composición de funciones continuas. Ahora supongamos que $i_A \circ f$ es continua. Sea $U \in \tau_A$. Luego existe $V \in \tau_X$ tal que $U = V \cap A$. Tenemos $(i_A \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(i_A^{-1}(V)) = f^{-1}(V \cap A) = f^{-1}(U)$, por lo que $f^{-1}(U)$ es abierto en Z. $\square$

Proposición 2.7.2. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. El gráfico de f se define como el conjunto

$$G(f) := \{(x,y) \ / \ y = f(x)\} \subseteq X \times Y.$$

Sea $\hat{f} : X \longrightarrow G(f)$ la función dada por $x \mapsto (x, f(x))$. Entonces, f es continua si, y sólo si, $\hat{f}$ es un homeomorfismo.

Demostración: Antes de demostrar esta equivalencia, note que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
X \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[urr, bend left, "1_X"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & G(f) \arrow[r, "i"] & X \times Y \arrow[u, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión de $G(f)$ en $X \times Y$, y p_X y p_Y son las proyecciones de $X \times Y$ en X e Y, respectivamente.

Supongamos que f es continua. Consideremos la composición $i \circ \hat{f}$. Como $p_X \circ (i \circ \hat{f}) = 1_X$ y $p_Y \circ (i \circ \hat{f}) = f$ son continuas, se tiene que $i \circ \hat{f}$ es continua. Por la proposición anterior, nos queda que $\hat{f}$ es continua. Ahora, consideremos la función continua $p_X \circ i$. Por un lado, tenemos $(p_X \circ i) \circ \hat{f} = 1_X$. Ahora, sea $(x, f(x)) \in G(f)$. Tenemos $\hat{f} \circ (p_X \circ i)(x, f(x)) = \hat{f}(x) = (x, f(x)) = 1_{G(f)}(x, f(x))$, por lo que $\hat{f} \circ (p_X \circ i) = 1_{G(f)}$. Por lo que $p_X \circ i$ es la inversa continua de $\hat{f}$. Por lo tanto, $\hat{f}$ es un homeomorfismo. $\square$

2.8 Ejercicios

2.8.1 Espacios topológicos

Ejercicio 2.8.1. Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X. Si $A \subseteq X$, probar que A es la unión de miembros de $\mathcal{F}$ si, y sólo si, para todo $x \in A$ existe $U \in \mathcal{F}$ tal que $x \in U \subseteq A$.

Ejercicio 2.8.2. Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X. Probar que la intersección finita de miembros de $\mathcal{F}$ es unión de miembros de $\mathcal{F}$ si, y sólo si, para cada $U, V \in \mathcal{F}$, y cada $x \in U \cap V$, existe $W \in \mathcal{F}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

Ejercicio 2.8.3. Dado el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$. Denotemos por τ_0 la topología indiscreta y por τ_8 la topología discreta. Construir un diagrama de topologías

$$\begin{tikzcd}
 & \tau_1 \arrow[r] & \tau_3 \arrow[dr] & & \tau_6 \arrow[dr] & \\
\tau_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \tau_5 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau_8 \\
 & \tau_2 \arrow[r] & \tau_4 \arrow[ur] & & \tau_7 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

2.8.2 Base de una topología

Ejercicio 2.8.4. En $X = \mathbb{R}^2$, verifique en cada caso que β es base de alguna topología en X:

(1) β es la familia contituída por $\{(0, 0)\}$ y todos los anillos abiertos con centro en $(0, 0)$.

(2) β es la familia constituída por X y todos los anillos abiertos con centro en $(0, 0)$.

(3) β es la familia constituída por $\{(0, 0)\}$ y todos los conos abiertos con centro en $(0, 0)$.

Ejercicio 2.8.5 (Topología producto)**.** Sea $\{(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)\}$ una familia finita de espacios topológicos. Sea $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Pruebe, sin usar inducción, que $\beta = \tau_1 \times \cdots \times \tau_n$ es base de alguna topología en X.

Ejercicio 2.8.6. Comparar τ_{d_2} con la topología producto de $\mathbb{R}^n$, donde la topología de $\mathbb{R}$ es la usual.

2.8.3 Topología relativa, inicial y final

Ejercicio 2.8.7. Pruebe que la topología relativa de A respecto a τ es precisamente la topología inicial de A inducida por la inclusión $i_A : A \longrightarrow X$.

Ejercicio 2.8.8. La circunferencia S^1 puede ser representada como el espacio cociente de $[0, 1]$ por la siguiente relación de equivalencia: sRt si, y sólo si, $s = t$ o $\{s, t\} = \{0, 1\}$, y puede ser presentado como el subconjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Damos en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^2$ las topologías usuales inducidas por la métrica euclídea, y damos a $[0, 1]$ la topología relativa de $\mathbb{R}$. Pruebe que la topología cociente de $S^1 = [0, 1]/R$

coincide con la topología relativa de S^1 como subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.8.9. La esfera S^2 puede ser presentada como el espacio cociente de $\overline{D}_1(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ por la relación de equivalencia sRt si, y sólo si, $s = t$ o $\{s,t\} \subseteq \partial\overline{D}_1(0,1)$, y puede ser representada como subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Damos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ las topologías usuales, y damos en $\overline{D}_1(0,1)$ la topología relativa de $\mathbb{R}^2$. Pruebe que la topología cociente de S^2 coincide con la topología relativa de S^2 como subespacio de $\mathbb{R}^3$.

2.8.4 Topología desde un punto de vista local

Ejercicio 2.8.10. Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, hallar una base de entornos de (x,y) para cada topología del Ejercicio 2.8.4.

2.8.5 Espacios métricos

Ejercicio 2.8.11. Pruebe que τ_d es una topología.

Ejercicio 2.8.12. Pruebe que toda bola abierta pertenece a τ_d.

Ejercicio 2.8.13. Pruebe que la intersección finita de bolas abiertas en unión de bolas abiertas.

Ejercicio 2.8.14. Pruebe que la métrica discreta es en efecto una métrica.

Ejercicio 2.8.15. En $\mathbb{R}^n$, verificar que cada una de las siguientes funciones definen una métrica:

(1) $d_1(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$.

(2) $d_2(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \ldots, n\}$.

(3) $d_3(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

Pruebe que $\tau_{d_1} = \tau_{d_2} = \tau_{d_3}$.

Ejercicio 2.8.16. Sea $C[0,1]$ el conjunto de las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$.

(1) Verificar que cada una de las siguientes funciones son métricas en $C[0,1]$:

  (a) $e_1(f,g) = \int_0^1 |f - g| dx$.

  (b) $e_1(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

(2) En cada caso graficar $B_f(r)$.

(3) Pruebe que $\tau_{e_1} \subseteq \tau_{e_2}$, pero que $\tau_{e_2} \not\subseteq \tau_{e_1}$.

La familia de abiertos dada por τ_{e_2} es conocida como la **topología de la convergencia uniforme en** $C[0,1]$.

Ejercicio 2.8.17. Sea $C[0,1]$ como en el Ejercicio 2.8.16. Para cada $f \in C[0,1]$, cada subconjunto finito $F \subseteq [0,1]$ y cada $\epsilon > 0$, definimos el conjunto

$$W(f, F, \epsilon) = \{g \in C[0,1] : \max_{x \in F} |g(x) - f(x)| < \epsilon\}.$$

Pruebe que $\beta = \{W(f, F, \epsilon)\}$ es base de una topología τ en $C[0,1]$. Esta topología es la **topología de la convergencia puntual**. Compare dicha topología con la topología del Ejercicio 2.8.16.

Ejercicio 2.8.18. Pruebe que todo espacio métrico satisface el primer axioma de numerabilidad.

2.8.6 Sucesiones, clausura, interior y frontera

En un espacio topológico X, una **sucesión** es una función $s : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Usualmente escribimos $s = \{x_n\}$ donde $x_n = s(n)$. Diremos que $\{x_n\}$ **converge** a $x \in X$ si para todo $U \in W(x)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies x_n \in U$. Esto es: cada entorno de x contiene todos los términos de la sucesión salvo prosiblemente un número finito de términos. Diremos que una sucesión es **constante** si todos sus términos son iguales salvo posiblemente en un número finito de términos.

Ejercicio 2.8.19. Pruebe que toda sucesión constante es convergente.

Ejercicio 2.8.20. Pruebe que en la topología discreta las únicas sucesiones convergentes son las constantes.

Ejercicio 2.8.21. Pruebe que en la topología indiscreta toda sucesión converge a cada punto.

Ejercicio 2.8.22. Sea X un espacio que satisface el primer axioma de numerabilidad y A un subconjunto de X. Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de A si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\}$ en A tal que $x_n \neq x$ y $\{x_n\}$ converge a x.

Ejercicio 2.8.23. Sea $X = \mathbb{R}^2$, damos a X la topología τ generada por la base

$$\beta = \{X\} \cup \{\text{conos abiertos con vértice en el origen}\}.$$

Probar:

(1) X satisface el primer axioma de numerabilidad.

(2) Hallar la clausura, el interior y la frontera de los siguientes conjuntos:

  (a) Una recta.
  (b) Un disco.
  (c) Una circunferencia.
  (d) Una franja.
  (e) El origen.

(3) Pruebe que toda sucesión en X converge al origen.

(4) Pruebe que si $\{x_n\}$ converge a x, también converge a λx, para todo $\lambda > 0$.

Ejercicio 2.8.24. Relacionar A, $\overline{\text{int}(A)}$ y $\text{int}(\overline{A})$.

Ejercicio 2.8.25. Ver cómo opera la frontera respecto a $\cup$ y $\cap$.

Ejercicio 2.8.26. Para todo $B \subseteq Y$, probar que $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ implica que para todo $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

2.8.7 Funciones continuas

Ejercicio 2.8.27. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Pruebe que si f es continua, entonces para cada sucesión $\{x_n\}$ en X, si $\{x_n\}$ converge a x entonces $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$. ¿Será cierto el recíproco?.

Ejercicio 2.8.28. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre espacio topológicos.

(1) Pruebe que si Y tiene la topología final, entonces para cada espacio topológico Z y cada función $g : Y \longrightarrow Z$, g es continua si, y sólo si, $g \circ f$ es continua.

(2) Pruebe que si X tiene la topología inicial de f, entonces para cada espacio topológico Z y cada función $g : Z \longrightarrow X$, g es continua si, y sólo si, $f \circ g$ es continua.

Ejercicio 2.8.29. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre espacios topológicos. Pruebe que si la topología de X es la discreta, entonces f es continua; o si la topología de Y es la indiscreta, entonces f es continua.

Ejercicio 2.8.30. Sean X e Y espacios topológicos, con τ_1 y τ_2 dos topologías en X, sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Pruebe que si f es continua respecto a τ_1 y $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces f es continua con respecto a τ_2.

Ejercicio 2.8.31. Sea $X = C[0, 1]$ el conjunto de las funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Sea $H : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $H(f) = f(1)$. Pruebe que H es continua para la topología de la convergencia uniforme y para la topología de la convergencia puntual.

CAPÍTULO 3

CONEXIDAD

3.1 Espacios conexos

Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que X es **conexo** si no se puede expresar como unión disjunta de abiertos no vaciós. Un subconjunto $A \subseteq X$ es **conexo** si es un espacio conexo cuando se considera con la topología relativa a X.

Proposición 3.1.1. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) X es conexo.

(2) Para todo par de abiertos $U, V \in \tau$, si $U \cup V = X$ y $U \cap V = \emptyset$, entonces $U = X$ o $U = \emptyset$.

(3) Los únicos subconjuntos de X que son al mismo tiempo cerrados y abiertos son X y $\emptyset$.

Demostración: Note que (1) $\Longrightarrow$ (2) es inmediato de la definición de espacio conexo. Probemos (2) $\Longrightarrow$ (3). Sea U un subconjunto de X que es abierto y cerrado a la vez. Entonces U^c también es abierto y cerrado a la vez. Ahora bien, note que $X = U \cup U^c$ y que $U \cap U^c = \emptyset$. Como (2) es cierta, tenemos que $U = X$ o $U = \emptyset$. Finalmente, probemos (3) $\Longrightarrow$ (1) suponiendo que (1) es falso. Entonces podemos expresar X como $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos disjuntos no vaciós. Se sigue que $U \neq \emptyset$ y $U^c = V \neq \emptyset$. De manera similar, se tiene que $U \neq X$. Por lo tanto, U es un conjunto que es abierto y cerrado a la vez, distinto de X y de $\emptyset$, obteniendo así una contradicción.

$\square$

Ejemplo 3.1.1. $\mathbb{Q}$ no es conexo si se considera con la topología relativa a $\mathbb{R}$, es decir que si U es un abierto en $\mathbb{Q}$ entonces $U = \mathbb{Q} \cap V$, donde V es un abierto de $\mathbb{R}$. En este caso podemos escribir

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})) \cup (\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty)),$$

que es una unión disjunta.

Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es un **intervalo** si para cada par $a, b \in A$ con $a < b$, se tiene $[a, b] \subseteq A$.

Teorema 3.1.1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces, A es conexo si, y sólo si A es un intervalo.

Demostración: Supongamos que A es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ y que no es un intervalo. Entonces existen a y b en A, con $a < b$, tales que $[a, b] \nsubseteq A$. Entonces, existe $a < c < b$ tal que $c \notin A$. Considere los siguientes subconjuntos abiertos de A, $U = A \cap (-\infty, c)$ y $V = A \cap (c, +\infty)$. Es claro que U y V son disjuntos y no vacíos, pues $a \in U$ y $b \in V$. Más aún,

$$U \cup V = (A \cap (-\infty, c)) \cup (A \cap (c, +\infty)) = A \cap [(-\infty, c) \cup (c, +\infty)] = A \cap [\mathbb{R} - \{c\}] = A, \text{ porque } A \subseteq \mathbb{R} - \{c\}.$$

Por lo tanto, A no es conexo.

Ahora probemos que si A es un intervalo, entonces A es conexo. Supongamos que A no es conexo. Entonces existen abiertos no vacíos $U, V \in \tau_A$ tales que $A = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$. Se sigue que existen $a \in U$ y $b \in V$ tales que $a < b$. Sea $c = \sup\{x \in U \ / \ x > a\}$. Note que $c \notin U$ porque U es abierto y c es un punto de acumulación de U. De manera análoga, tenemos que $c \notin V$. Por lo que $c \notin A$, pues $A = U \cup V$. Entonces A no es un intervalo, obteniendo así una contradiccón.

□

Observacicón 3.1.1. Un espacio topológico X es conexo si, y sólo si para todo cubirmiento abierto $\{U, V\}$ de X, si $U \cap V = \emptyset$ entonces $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$.

Proposición 3.1.2. Sea X un espacio topológico. Considere el conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ dotado con la topología discreta. Entonces X es conexo si, y sólo si toda función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ es constante.

Demostración: Para probar la primera implicación, supongamos que X es conexo y que existe una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ que no es constante. Entonces $U = f^{-1}(1)$ y $V = f^{-1}(0)$ son abiertos disjuntos no vaciós. Además, $X = U \cup V$. Por lo tanto, X no es conexo, obteniendo así una contradicción.

Para probar la otra implicación, supongamos que X no es conexo. Entonces existen dos abiertos no vacíos y disjuntos U y V tales que $X = U \cup V$. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{si } x \in V. \end{cases}$$

Note que f está bien definida porque U y V son disjuntos. Más aún, f es continua pues $f^{-1}(1) = U$ y $f^{-1}(0) = V$. Como U y V son no vacíos, se tiene que f no es constante. Hemos construído una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ no constante.

□

Corolario 3.1.1. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si A es un subconjunto conexo de X, entonces $f(A)$ es un subconjunto conexo de Y.

Demostración: Considere una función continua $g : f(A) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$. Como f es continua, se tiene que su restricción $f' = f|_A : A \longrightarrow f(A)$ tambíen lo es. Entonces la composición $g \circ f' : A \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ nos da una función continua. Como A es conexo, se tiene que $g \circ f'$ es constante. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $g \circ f' = 0$. Sea $y \in f(A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $y = f(a)$. De donde $g(y) = g(f(a)) = (g \circ f')(a) = 0$, para todo $y \in Y$. Por lo tanto, g es constante.

$\square$

Corolario 3.1.2 (Teorema de Bolzano)**.** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración: Como $[a, b]$ es conexo y f es continua, se tiene que $f([a, b])$ es conexo, es decir, $f([a, b])$ es un intervalo. Como $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, se tiene que $0 \in (f(a), f(b)) \subseteq f([a, b])$. Luego, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$. Note que $c \neq a$ y $c \neq b$. $\square$

Teorema 3.1.2. La unión de una familia de espacios conexos con un punto en común es un espacio conexo.

Demostración: Sea $f : \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ una función continua. Sea $x_0 \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Para todo α, consideremos la composición

$$X_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_2,$$

donde i_α es la inclusión de X_α en $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Como $f \circ i_\alpha$ es continua, se tiene que $f \circ i_\alpha$ es contante. Sean $x \in X_\alpha$ e $y \in X_\beta$. Veamos que $f(x) = f(y)$. Si $\alpha = \beta$, entonces $f \circ i_\alpha(x) = f \circ i_\beta(y)$ implica que $f(x) = f(y)$. Si $\alpha \neq \beta$, entonces

$$f(x) = f \circ i_\alpha(x) = f \circ i_\alpha(x_0) = f \circ i_\beta(x_0) = f \circ i_\beta(y) = f(y).$$

Por lo tanto f es contante y $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es conexo.

$\square$

Teorema 3.1.3. Si $X_1, \ldots, X_n$ son espacios conexos, entonces $\prod_{i=1}^n X_j$ es también un espacio conexo.

Demostración: Por el Principio de Inducción, sólo es necesario probar que $X \times Y$ es conexo. Fijemos un punto $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Primero probemos que $Z = (\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})$ es conexo. La función $f : Y \longrightarrow \{x_0\} \times Y$ dada por $y \mapsto (x_0, y)$ es continua y sobreyectiva. De donde $\{x_0\} \times Y = f(Y)$ es conexo porque Y es conexo. De manera similar, $X \times \{y_0\}$ es conexo. Luego, $Z = (\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})$ es la unión de dos conjuntos conexos con un punto en común, por lo que Z es conexo. Ahora, escribimos

$$X \times Y = \bigcup_{x\in X} [(\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})].$$

Entonces $X \times Y$ es conexo por ser la unión de conjuntos conexos con un punto en común, a saber (x_0, y_0).

$\square$

Ejemplo 3.1.2. La bola $B^1(0,1)$ es conexa por ser homeomorfa a $B^2(0,1)$. Dicho homeomorfismo viene dado por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{||(x,y)||_2}{||(x,y)||_1} \cdot (x,y) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Proposición 3.1.3. Si A es conexo y $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ entonces B es conexo.

Demostración: Sean U y V dos abiertos en B tales que $B = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Veamos que $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$. Sabemos que existen abiertos U_0 y V_0 en X tales que $U = U_0 \cap B$ y $V = V_0 \cap B$. Como $A \subseteq B$, tenemos

$$\begin{aligned} A &= A \cap B \\ &= A \cap [(U_0 \cap B) \cup (V_0 \cap B)] \\ &= [A \cap U_0 \cap B] \cup [A \cap V_0 \cap B] \\ &= [A \cap U_0] \cup [A \cap V_0]. \end{aligned}$$

Como A es conexo, se tiene $U_0 \cap A = \emptyset$ o $A \cap V_0 = \emptyset$. Supongamos que $U_0 \cap A = \emptyset$. Tenemos

$$\emptyset = U_0 \cap A \subseteq U_0 \cap B \subseteq U_0 \cap \overline{A} = U_0 \cap (A \cup A') = (U_0 \cap A) \cup (U_0 \cap A') = U_0 \cap A'.$$

Probemos que $U_0 \cap A' = \emptyset$. Si $U_0 \cap A' \neq \emptyset$, entonces existe $x \in U_0$ tal que x es un punto de acumulación de A. Luego, $U_0 \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$, obteniendo así una contradicción. De donde $U = U_0 \cap B = \emptyset$.

$\square$

3.2 Espacios conexos por arcos

Un espacio topológico (X, τ) se dice **conexo por arcos** si para cada par de puntos $p, q \in X$, existe una función continua $\sigma : [0,1] \longrightarrow X$, llamada **arco**, tal que $\sigma(0) = p$ y $\sigma(1) = q$.

Diremos que (X, τ) es **localmente conexo por arcos** si para cada $p \in X$ existe un entorno $U \in W(p)$ tal que U es conexo por arcos.

Sea (X, τ) un espacio topológico y $p \in X$. La **componente conexa de** p es la unión de todos los subconjuntos conexos que contienen a p. La **componente conexa por arcos de** p es la unión de todos los subconjuntos conexos por arcos que contiene a p.

Proposición 3.2.1. La componente conexa de p es el mayor conexo que contiene a p.

Demostración: Sea $C(p) = \bigcup\{U \subseteq X \ / \ U \text{ es conexo y } p \in U\}$ la componente conexa de p. Note que $C(p)$ es conexo por ser la unión de conjuntos conexos con un punto en común, en este caso p. Sea V un subconjunto conexo que contiene a p. Luego,

$$V \subseteq \bigcup\{U \subseteq X \ / \ U \text{ es conexo y } p \in U\} = C(p).$$

Por lo tanto, $C(p)$ es el mayor subconjunto conexo que contiene a p.

$\square$

Proposición 3.2.2. La componente conexa por arcos de p es el mayor conjunto conexo por arcos que contiene a p.

Demostración: Sea $C_{\text{arc}}(p) = \bigcup\{U \subseteq X \ / \ U \text{ es conexo por arcos y } p \in U\}$. Primero veamos que $C_{\text{arc}}(p)$ es conexo por arcos. Sean $x, y \in C_{\text{arc}}(p)$. Existen conjuntos conexos por arcos U y V tales que $x \in U$ y $y \in V$. Además, $p \in U \cap V$. Tenemos que existes arcos $\sigma_1 : [0,1] \longrightarrow U$ y $\sigma_2 : [0,1] \longrightarrow V$ tales que $\sigma_1(0) = x$, $\sigma_1(1) = p$, $\sigma_2(0) = p$ y $\sigma_2(1) = y$. Sea $\sigma_1 \cup \sigma_2 : [0,1] \longrightarrow U \cup V$ el arco definido por

$$\sigma_1 \cup \sigma_2(t) = \begin{cases} \sigma_1(t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ \sigma_2(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Tenemos que $\sigma_1 \cup \sigma_2$ es continua porque σ_1 y σ_2 lo son y coinciden en $t = 1/2$. Además, $\sigma_1 \cup \sigma_2(0) = x$, $\sigma \cup \sigma_2(1) = y$ y $\sigma_1 \cup \sigma_2 \subseteq C_{\text{arc}}(p)$. La prueba de que $C_{\text{arc}}(p)$ es el mayor subconjunto conexo por arcos que contiene a p se hace de la misma manera que en la proposición anterior.

$\square$

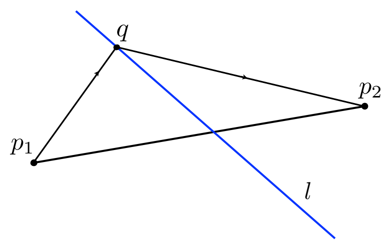
Proposición 3.2.3. Sea $p \in X$. La componente conexa de p, $C(p)$, es cerrada.

Demostración: Sabemos que $\overline{C(p)}$ es cerrado y conexo, con $p \in \overline{C(p)}$. Como $C(p)$ es el mayor conjunto conexo que contiene a p, tenemos $\overline{C(p)} \subseteq C(p)$. Por otro lado, $C(p) \subseteq \overline{C(p)}$. Por lo tanto, $C(p) = \overline{C(p)}$ y $C(p)$ es cerrada.

$\square$

Teorema 3.2.1. Sea Y un subconjunto numerable de $\mathbb{R}^n$, donde $n > 1$. Entonces $X = \mathbb{R}^n - Y$ es conexo por arcos.

Demostración: Sean $p_1, p_2 \in X$. Sea l una recta que corta al segmento $[p_1, p_2]$ tal que $p_1, p_2 \notin l$. Definamos $\sigma(q) = [p_0, q] \cup [q, p_1]$. Tenemos que σ es un arco que une a p_0 y a p_1.



Note que $\sigma(q_1)$ y $\sigma(q_2)$ tiene a p_0 y a p_1 como puntos comunes, cualesquiera q_1 y q_2. Afirmamos que existe $q \in l$ tal que $\sigma(q) \subseteq X$. Supongamos lo contrario. Sea $f : l \longrightarrow Y$ la aplicación $q \mapsto f(q) \in \sigma(q) \cap Y$. Si $q_1 \neq q_2$ entonces

$$(\sigma(q_1) \cap Y) \cap (\sigma(q_2) \cap Y) = \sigma(q_1) \cap \sigma(q_2) \cap Y = \{p_0, p_1\} \cap Y = \emptyset,$$

porque $p_0, p_1 \notin Y$. Entonces, f es inyectiva. Luego, l está en biyección con $f(l)$, que es un subconjunto de Y, por lo que $f(l)$ es finito o numerable. Obteniendo así una contradicción, pues l es no numerable. Por lo tanto, existe $q \in l$ tal que $\sigma(q) \subseteq X$. Por lo tanto, X es conexo por arcos.

$\square$

Corolario 3.2.1. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos si $n > 1$.

Demostración: Supongamos que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ son homeomorfos. Entonces existe una aplicación continua y biyectiva $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya inversa es continua. Sea $p \in \mathbb{R}^n$. La aplicación $\hat{f} : \mathbb{R}^n - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{f(p)\}$ dada por $q \mapsto f(q)$ es también un homeomorfismo. Luego, $\mathbb{R} - \{f(p)\} = \hat{f}(\mathbb{R}^n - \{p\})$ es conexo, porque $\mathbb{R}^n - \{p\}$ es conexo por el teorema anterior, y $\hat{f}$ es continua. Por otro lado, $\mathbb{R} - \{f(p)\}$ no es un intervalo, por lo que no es conexo, obteniendo así una contradicción.

$\square$

3.3 Ejercicios

3.3.1 Teoremas del Valor Medio y del Punto Medio

Ejercicio 3.3.1. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y sean x_0 y x_1 puntos de X tales que $f(x_0) < f(x_1)$. Pruebe que si X es conexo, para cada $t \in (f(x_0), f(x_1))$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = t$.

Ejercicio 3.3.2. Pruebe que toda función continua y sobreyectiva del intervalo $[0, 1]$ en sí mismo tiene un punto fijo.

3.3.2 Relación entre espacios conexos, funciones continuas y espacios producto

Ejercicio 3.3.3. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Probar que:

(1) Si X es conexo, entonces $G(f)$ (gráfico de f) es conexo en $X \times Y$.

(2) $A = \{(x, \sin(1/x)) \ / \ x \in (0, 1)\}$ es un subespacio conexo de $\mathbb{R}^2$.

(3) Si B es un subconjunto del intervalo $\{(0, y) \ / \ y \in [0, 1]\}$, entonces $A \cup U$ es conexo.

Ejercicio 3.3.4. Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios topológicos. Pruebe que $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ es conexo si, y sólo si, cada X_j, $j = 1, \ldots, n$, es conexo.

3.3.3 Espacios conexos por arcos

Ejercicio 3.3.5. Demuestre que:

(1) Todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es conexo por arcos.

(2) La unión de una familia de subespacios conexos por arcos que tienen un punto en común es también conexo por arcos.

(3) Todo espacio conexo por arcos es conexo.

(4) La imagen por una función continua de un espacio conexo por arcos es conexo por arcos.

Un espacio X es **localmente conexo por arcos** si cada punto posee un entorno conexo por arcos. Dado un espacio topológico X y p un punto de X, la **componente conexa por arcos de** p es la unión de todos los subconjuntos conexos por arcos que contiene a p.

Ejercicio 3.3.6. Pruebe que si X es localmente conexo por arcos, entonces:

(1) La componente conexa por arcos de p es el mayor conjunto conexo por arcos que contiene a p.

(2) La componente conexa por arcos es abierta y cerrada.

Deducir que si X es conexo y localmente conexo por arcos entonces X es conexo por arcos.

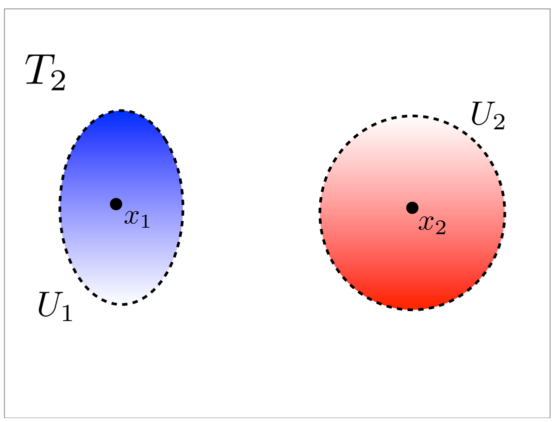
Ejercicio 3.3.7. Probar que $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ no son homeomorfos.

CAPÍTULO 4

AXIOMAS DE SEPARACIÓN

4.1 Espacios de Hausdorff

Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que X es un **espacio de Hausdorff** (o T_2) si para todo par $x_1, x_2 \in X$, con $x_1 \neq x_2$, existen $U_1 \in W(x_1)$ y $U_2 \in W(x_2)$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.



Ejemplo 4.1.1. Los siguientes espacios no son de Hausdorff:

(1) (X, τ) con la topología $\tau = \{\emptyset, X\}$.

(2) $(\mathbb{R}^2, \tau)$, con τ la topología de las franjas abiertas verticales. Dos puntos sobre el eje Y no pueden ser separados por abiertos disjuntos.

(3) $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{conos}})$ y $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{anillos}})$.

Ejemplo 4.1.2. Los siguientes son espacios de Hausdorff:

(1) $(X, \tau_{\text{discreta}})$. Si $x_1 \neq x_2$ entonces $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$.

(2) Sea X un espacio métrico con métrica d, se tiene que X con la topología métrica τ_d es un espacio de Hausdorff. Sean $x_1, x_2 \in X$ puntos distintos. Basta tomar $U_1 = B(x_1, d(x_1, x_2)/2)$ y $U_2 = B(x_2, d(x_1, x_2)/2)$ para obtener $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Proposición 4.1.1. Si X_i son espacios de Hausdorff, con $i = 1, \ldots, n$, entonces $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es un espacio de Hausdorff.

Demostración: Basta probar el caso $n = 2$. El resultado se sigue por el Principio de Inducción. Sean X e Y dos espacios de Hausdorff. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ puntos distintos. Tenemos que $x_1 \neq x_2$ o $y_1 \neq y_2$. Analicemos los tres casos posibles:

(1) $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2$: Como X es un espacio de Hausdorff, tenemos que existen abiertos $U_1 \in W(x_1)$ y $U_2 \in W(x_2)$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Así tenemos

$$\emptyset = (U_1 \cap U_2) \times Y = (U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y).$$

Además, $U_1 \times Y \in W(x_1, y_1)$ y $U_2 \times Y \in W(x_2, y_2)$.

(2) El caso $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$ es análogo al anterior.

(3) $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$: Como X es un espacio de Hausdorff, existen $U_1 \in W(x_1)$ y $U_2 \in W(x_2)$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. De manera similar, existen abiertos $V_1 \in W(y_1)$ y $V_2 \in W(y_2)$ tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Tomamos $A_1 = U_1 \times V_1 \in W(x_1, y_1)$ y $A_2 = U_2 \times V_2 \in W(x_2, y_2)$. Tenemos

$$A_1 \cap A_2 = (U_1 \times V_2) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) = \emptyset.$$

Por lo tanto, $X \times Y$ es un espacio de Hausdorff.

$\square$

El recípoco del Teorema anterio no es cierto, en general.

Dada una función continua $f : X \longrightarrow Y$, si X es un espacio de Hausdorff, no necesariamente lo es $f(X)$.

Teorema 4.1.1. Sea $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo. Entonces X es un espacio de Hausdorff si, y sólo si, $Y = f(X)$ lo es.

Demostración: Supongamos que X es un espacio de Hausdorff. Sean $y_1, y_2 \in Y$ puntos distintos. Existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $y_1 = f(x_1)$ e $y = f(x_2)$, donde $x_1 \neq x_2$. Como X es de Hausdorff, existen $U_1 \in W(x_1)$ y $U_2 \in W(x_2)$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Consideremos $V_1 = f(U_1) \in W_1(y_1)$ y $V_2 = f(U_2) \in W(y_2)$, pues f es un homeomorfismo. Tenemos

$$V_1 \cap V_2 = f(U_1) \cap f(U_2) = f(U_1 \cap U_2) = f(\emptyset) = \emptyset,$$

porque f es inyectiva. Por lo tanto, $Y = f(X)$ es un espacio de Hausdorff.

Ahora supongamos que Y es un espacio de Hausdorff. Sean $x_1, x_2 \in X$ puntos distintos. Como f es inyectiva, tenemos que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$ son puntos distintos. Como Y es un espacio de Hausdorff, tenemos que existen $V_1 \in W(y_2)$ y $V_2 \in W(y_2)$ tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Luego,

$$\emptyset = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2).$$

Tomamos $U_1 = f^{-1}(V_1)$ y $U_2 = f^{-1}(V_2)$. Tenemos que $U_1 \in W(x_1)$ y $U_2 \in W(x_2)$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. □

Teorema 4.1.2. Considere el siguiente diagrama conmutativo

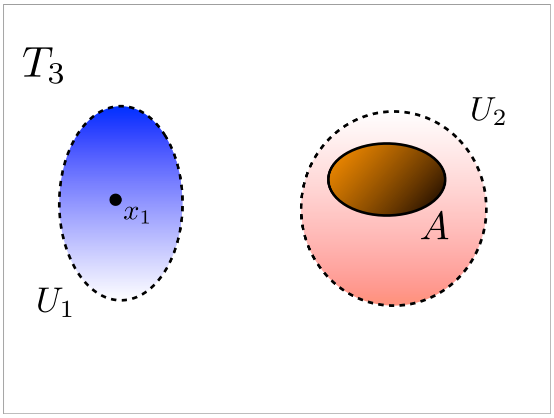
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

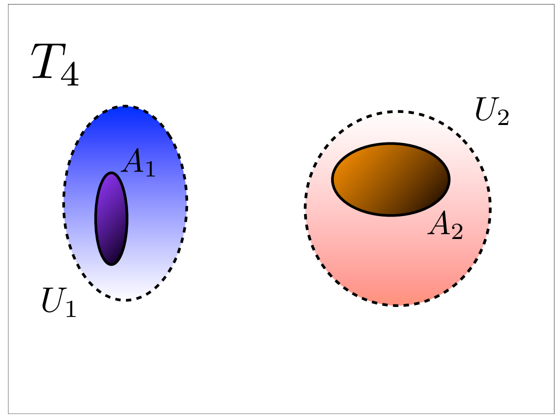
donde f y g son funciones continuas. Si Y es un espacio de Hausdorff entonces X también lo es.

Demostración: La prueba es análoga al recíproco del teorema anterior. □

4.2 Espacios normales

Un espacio topológico X se dice **regular** (o T_3) si para todo conjunto cerrado $A \subseteq X$ y para todo $p \in X - A$ existen abiertos U_1 y U_2 tales que $p \in U_1$, $A \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Diremos que X es **normal** (o T_4) si para todo par de subconjuntos cerrados disjuntos A_1 y A_2 existen abiertos U_1 y U_2 tales que $A_1 \subseteq U_1$, $A_2 \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.





Teorema 4.2.1. Un espacio topológico X es normal si, y sólo si, para cada cerrado B y cada abierto U con $B \subseteq U$, existe un abierto V tal que $B \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Demostración: Supongamos que X es un espacio normal. Sea B un conjunto cerrado y U un conjunto abierto que contiene a B. Tenemos que $B \cap U^c = \emptyset$ y U^c es cerrado. Como X es normal, existen abiertos disjuntos U_0 y U_1 tales que $B \subseteq U_0$ y $U^c \subseteq U_1$. Elegimos $V = U_0$. Tenemos $U_0 \subseteq U_1^c \subseteq U$. Luego, $V \subseteq U$. Por otro lado, U_1^c es un cerrado que contiene a V y $\overline{V}$ es el menor cerrado que contiene a V, de donde $\overline{V} \subseteq U_1^c$. Por lo tanto, $B \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Ahora supongamos que para todo cerrado B y para todo abierto U que contenga a B, existe un abierto V tal que $B \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Sean A_0 y A_1 cerrados disjuntos. Luego $A_0 \subseteq A_1^c$, donde A_1^c es abierto. Luego, existe un abierto V tal que $A_0 \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq A_1^c$. Como $\overline{V}$ es cerrado, tenemos que $\overline{V}^c$ es abierto. Como $\overline{V} \subseteq A_1^c$, se tiene $A_1 \subseteq \overline{V}^c$. Entonces, $A_0 \subseteq V$ y $A_1 \subseteq \overline{V}^c$, donde V y $\overline{V}^c$ son abiertos disjuntos. $\square$

Proposición 4.2.1. Todo espacio métrico es normal.

Demostración: Sea X un espacio métrico con métrica d. Sean A_0 y A_1 dos cerrados disjuntos. Como d es continua, tenemos

$$\epsilon = d(A_0, A_1) = \inf\{d(x, y) : x \in A_0,\ y \in A_1\} > 0.$$

En efecto, si $\epsilon = 0$, existe una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 1} \subseteq A_0 \times A_1$ tal que $d(x_n, y_n) > 0$ y $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Sea x un punto de acumulación de $\{x_n\}$ e y un punto de acumulación de

$\{y_n\}$. Luego, $d(x,y) = 0$ y $x = y$. Entonces $x = y \in A_0 \cap A_1$, obteniendo una contradicción. Ahora tomemos

$$U_0 = \{x \in X : d(x, A_0) < \epsilon/4\} \quad \text{y} \quad U_1 = \{x \in X : d(x, A_1) < \epsilon/4\}.$$

Tenemos que $A_0 \subseteq U_0$, ya que si $x \in A_0$ entonces $d(x, A_0) = 0 < \epsilon/4$ y por tanto $x \in U_0$. De manera similar, $A_1 \subseteq U_1$. Veamos que U_0 y U_1 son disjuntos, suponiendo lo contrario. Luego existe $x \in X$ tal que $d(x, A_0) < \epsilon/4$ y $d(x, A_1) < \epsilon/4$, lo cual no es posible por la definición de ϵ. Es fácil ver que U_0 y U_1 son además abiertos.

□

Ejemplo 4.2.1.

(1) $\mathbb{R}$ con la topología métrica es un espacio normal.

(2) Consideremos en $\mathbb{R}$ la familia $\beta = \{[a,b) \ / \ a < b\}$. Note que $\mathbb{R} = \bigcup_{a<b}[a,b)$ y que

$$[a,b) \cap [c,d) = \begin{cases} \emptyset, \\ [a,b) \text{ o } [c,d), \\ [x,y), \text{ donde } x = \max\{a,c\} \text{ o } y = \min\{b,d\}. \end{cases}$$

Se sigue que β es base de una topología τ. Veamos que $(\mathbb{R}, \tau)$ es un espacio normal. Recuerde que τ viene dada por $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} \ / \ A = \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U, \ \mathcal{F} \subseteq \beta\}$. Sea B un conjunto cerrado y U un conjunto abierto que contiene a B. Todo $x \in B$ está en U, y como U es abierto existen a_x y b_x tales que $x \in [a_x, b_x) \subseteq U$. Sea $V = \bigcup_{x \in B} \left[a_x, \frac{x+b_x}{2}\right)$. Tenemos que

$$\overline{V} = \overline{\bigcup_{x \in B} \left[a_x, \frac{x+b_x}{2}\right)} = \bigcup_{x \in B} \overline{\left[a_x, \frac{x+b_x}{2}\right)} = \bigcup_{x \in B} \left[a_x, \frac{x+b_x}{2}\right).$$

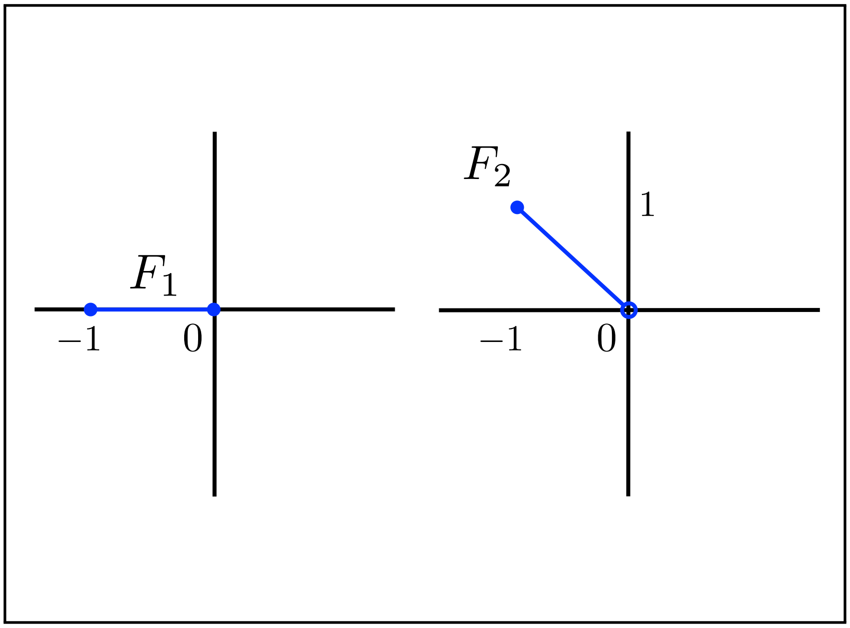
De donde $B \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(3) Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la siguiente familia de conjuntos: $\beta = \{[a,b) \times [c,d) \subseteq \mathbb{R}^2\}$. Veamos primero que β es base de alguna topología τ. Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Luego, $(x,y) \in [x-1, x+1) \times [y-1, y+1)$. De donde β es un cubrimiento de $\mathbb{R}^2$. Ahora considere los siguientes elementos de β: $A = [a,b) \times [c,d)$ y $B = [a',b') \times [c',d')$. Tenemos

$$A \cap B = \begin{cases} \emptyset \\ A \\ B \\ [\max\{a,a'\}), \min\{c,c'\} \times [\max\{b,b'\}, \min\{d,d'\}) \end{cases}$$

Se sigue que $A \cap B$ es la unión de miembros de β, pues es un miembro de β. Por lo tanto, β es base de la topología $\tau = \{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \beta\}$. Ahora veamos que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ no es un espacio normal. Considere los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$: $F_1 = [-1, 0] \times \{0\}$ y $F_2 = \{(x, -x) \ / \ x \in [-1, 0)\}$.

Note que F_1 y F_2 son cerrados, porque sus complementos son abiertos. Además, F_1 y F_2 no pueden ser separados por abiertos disjuntos, ya que todo rectángulo que contenga al origen contiene tambiíen puntos de F_2.


F_1
-1
0
F_2
1
-1
0

4.3 Lemma de Urysohn

Recordemos la reprsentación p-ádica de los números reales. Para todo $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$, y para todo $x > 0$, existe una serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ tal que $a_n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n < p$, y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} \longrightarrow x$.

Lema 4.3.1 (Urysohn)**.** Un espacio topológico X es normal si, y sólo si, para cada par de cerrados disjuntos A_0 y A_1 existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f|_{A_0} \equiv 0$ y $f|_{A_1} \equiv 1$.

Demostración: Supongamos que X es un espacio normal. Como A_0 y A_1 son cerrados disjuntos, se tiene que $A_0 \subseteq A_1^c$. Como X es normal, existe un abierto V tal que $A_0 \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq A_1^c$. Llamamos $V = V_{1/2}$. Tenemos $A_0 \subseteq V_{1/2} \subseteq \overline{V_{1/2}} \subseteq A_1^c$. Nuevamente, como X es normal, existen abiertos $V_{1/4}$ y $V_{3/4}$ tales que

$$A_0 \subseteq V_{1/4} \subseteq \overline{V_{1/4}} \subseteq V_{2/4} \subseteq \overline{V_{2/4}} \subseteq V_{3/4} \subseteq \overline{V_{3/4}} \subseteq A_1^c.$$

De manera similar, existen abiertos $V_{1/8}$, $V_{3/8}$, $V_{5/8}$ y $V_{7/8}$ tales que

$$\begin{aligned} A_0 &\subseteq V_{1/8} \subseteq \overline{V_{1/8}} \subseteq V_{2/8} \subseteq \overline{V_{2/8}} \subseteq V_{3/8} \subseteq \overline{V_{3/8}} \subseteq V_{4/8} \\ &\subseteq \overline{V_{4/8}} \subseteq V_{5/8} \subseteq \overline{V_{5/8}} \subseteq V_{6/8} \subseteq \overline{V_{6/8}} \subseteq V_{7/8} \subseteq \overline{V_{7/8}} \\ &\subseteq A_1^c. \end{aligned}$$

Continuamos con este procedimiento de manera indefinida. Entonces, para todo n y m naturales, con $0 \leq m < 2^n$, tenemos abiertos $V_{m/2^n}$ tales que

$$A_0 \subseteq V_{1/2^n} \subseteq \overline{V_{1/2^n}} \subseteq \cdots \subseteq V_{m/2^n} \subseteq \overline{V_{m/2^n}} \subseteq \cdots \subseteq V_{2^n-1/2^n} \subseteq \overline{V_{2^n-1/2^n}} \subseteq A_1^c.$$

Definimos $f : X \longrightarrow [0,1]$ como

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{t \ / \ x \in V_t\} & \text{si } x \notin A_1, \\ 1 & \text{si } x \in A_1. \end{cases}$$

Tenemos que $f(A_0) = 0$ y $f(A_1) = 1$. Los abiertos básicos de $[0,1]$ son del tipo $[0,a)$, $(b,1]$, (a,b). Sólo hay que probar que $f^{-1}([0,a))$ y $f^{-1}((b,1])$ son abiertos para ver que f es continua. Tenemos

$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup_{t<a} V_t \text{ es abierto en } X,$$
$$f^{-1}((b,1]) = \bigcup_{t>b} \overline{V_t}^c \text{ es abierto en } X.$$

Probemos esto último. Sea $x \in f^{-1}([0,a))$. Luego, $f(x) \in [0,a)$. Note que $0 \leq \inf\{t \ / \ x \in V_t\} < a$. Luego, existen $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m/2^n \in \{t \ / \ x \in V_t\}$. Además, $\inf\{t \ / \ x \in V_t\} \leq m/2^n < a$. Entonces $x \in V_{m/2^n} \subseteq \bigcup_{t<a} V_t$. Ahora sea $x \in \bigcup_{t<a} V_t$. Luego existe $0 \leq \lambda < a$ tal que $x \in V_\lambda$. Como $\inf\{t \ / \ x \in V_t\} \in [0,a)$, se tiene que $f(x) \in [0,a)$. Falta probar la segunda igualdad. Sea $x \in f^{-1}((b,1])$. Luego, $f(x) \in (b,1]$. Si $f(x) = 1$ entonces $x \in A_1$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < (2^n-1)/2^n \leq 1$. Como $\overline{V_{(2^n-1)/2^n}} \subseteq A_1^c$, nos queda $x \in A_1 \subseteq \overline{V_{(2^n-1)/2^n}}^c \subseteq \bigcup_{t>b} \overline{V_t}^c$. Si por el contrario $f(x) < 1$, tenemos que $b < \inf\{t \ / \ x \in V_t\} < 1$. Veamos que existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $b < \inf\{t \ / \ x \in V_t\} \leq m/2^n < 1$ con $x \in \overline{V_{m/2^n}}^c$. Supongamos lo contrario, es decir que para todo $r \in (b,1]$ se tiene $x \in \overline{V_r}$. Entonces $x \in \overline{V_r}$, para todo $r \in (b, f(x)]$. Por definición de ínfimo, $x \notin V_r$ para algún $r \in (b, f(x))$. Para tal r, existe $p \in (b,r)$ tal que $x \in \overline{V_p}$. Por construcción, $\overline{V_p} \subseteq V_r$. Luego, $x \in \overline{V_p} \subseteq V_r$, obteniendo una contradicción.

Por lo tanto, existen $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $b < f(x) \leq m/2^n < 1$ y $x \in \overline{V_{m/2^n}}^c$. De donde $x \in \bigcup_{t>b} \overline{V_t}^c$. Ahora, sea $x \in \bigcup_{t>b} \overline{V_t}^c$. Luego, existe $t_0 > b$ tal que $x \in \overline{V_{t_0}}^c$, es decir $x \notin \overline{V_{t_0}}$. Si $f(x) = 1$ no hay nada que probar. Asumamos que $f(x) < 1$. Veamos que existe $\lambda \in (t_0, 1)$ tal que $x \in V_\lambda$. Supongamos lo contrario, luego $x \notin V_\lambda$ para todo $\lambda \in (t_0, 1)$. Por otro lado, $x \notin \overline{V_{t_0}}$ implica que $x \notin V_\alpha$ para todo $\alpha \leq t_0$. Tenemos que $x \notin V_t$ para todo $t \in [0, 1]$. Como $f(x) \neq 1$, se sigue que $f(x) > 1$, obteniendo una contradicción. Entonces, $x \in V_\lambda$, para algún $\lambda \in (t_0, 1)$. De donde $\inf\{t \ / \ x \in V_t\} \leq \lambda$. Por lo tanto, $f(x) \in (b, 1]$.

Ahora supongamos que para cada par de cerrados disjuntos A_0 y A_1, existe una función $f : X \longrightarrow [0, 1]$ continua tal que $f|_{A_0} \equiv 0$ y $f|_{A_1} \equiv 1$. Demos a $[0, 1]$ la topología relativa. Consideremos los abiertos $[0, 1/4)$ y $(3/4, 1]$. Como f es continua, tenemos que $f^{-1}([0, 1/4))$ y $f^{-1}((3/4, 1])$ son abiertos en X. Además, $A_0 \subseteq f^{-1}([0, 1/4))$ y $A_1 \subseteq f^{-1}((3/4, 1])$. Finalmente, es claro que estos abiertos son disjuntos. Por lo tanto, X es un espacio normal.

□

Corolario 4.3.1. Un espacio topológico X es normal si, y sólo si, para todo par de cerrados disjuntos A_0 y A_1 existe una función continua $f : X \longrightarrow [a, b]$ tal que $f|_{A_0} \equiv a$ y $f|_{A_1} \equiv b$.

Demostración: Basta notar que la función $h : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$ dada por $h(t) = (b - a)t + a$ es un homeomorfismo. □

4.4 Teorema de Extensión de Tietze

Teorema 4.4.1 (Tietze)**.** Un espacio topológico X es normal si, y sólo si, para todo cerrado A en X y toda funcuón continua $f : A \longrightarrow [-1,1]$, existe una extensión continua $g : X \longrightarrow [-1,1]$.

Demostración: Supongamos que para todo subconjunto cerrado A en X y para toda función continua $f : A \longrightarrow [-1,1]$ existe una extensión continua $g : X \longrightarrow [-1.1]$. Sean A_0 y A_1 cerrados disjuntos en X. Sea $A = A_0 \cup A_1$ y $f : A \longrightarrow [-1,1]$ la función dada por $f(a) = -1$ si $a \in A_0$ y $f(a) = 1$ si $a \in A_1$. Note que f es continua. Por hipótesis, existe una extensión continua $g : X \longrightarrow [-1,1]$ de f. Tenemos que $g|_{A_0} \equiv -1$ y $g|_{A_1} \equiv 1$. Por el corolario anterior, tenemos que X es normal.

Ahora supongamos que X es un espacio normal. Sea A un subconjunto cerrado en X y $f : A \longrightarrow [-1,1]$ una función continua. Llamemos $A_0 = f^{-1}[-1,-1/3]$ y $A_1 = f^{-1}[1/3,1]$. Tenemos que A_0 y A_1 son subconjuntos disjuntos cerrados en X. Dado que A tiene la topología relativa de X, tanto A_0 como A_1 son cerrados en X. Por el Lema de Urysohn, existe una función continua $g_1 : X \longrightarrow [-1/3,1/3]$ tal que $g_1|_{A_0} \equiv -1/3$ y $g_1|_{A_1} \equiv 1/3$. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |(f-g_1)(x)| &= |f(x)-g_1(x)| = |f(x)+1/3| \leq 2/3, \text{ para todo } x \in A_0. \\ |g_1(x)| &< 1/3, \text{ para todo } x \in A. \\ |(f-g_1)(x)| &< 2/3, \text{ para todo } x \in A. \end{aligned}$$

Tenemos una función continua $f - g_1 : A \longrightarrow [-2/3, 2/3]$. Ahora llamemos

$$A_0 = (f-g_1)^{-1}([-2/3,-2/3^2]) \quad \text{y} \quad A_1 = (f-g_1)^{-1}([2/3^2,2/3]).$$

Tenemos que A_0 y A_1 son cerrados disjuntos en X. De donde existe una función $g_2 : X \longrightarrow [-2/3^2, 2/3^2]$ continua tal que $g_2|_{A_0} \equiv -2/3^2$ y $g_2|_{A_1} \equiv 2/3^2$. En este paso tenemos

$$|(f-g_1-g_2)(x)| \leq 4/9 = 2^2/3^2.$$

Continuando de esta manera, en el n-ésimo paso obtenemos una función $g_n : X \longrightarrow [-2^{n-1}/3^n, 2^{n-1}/3^n]$ continua tal que $g_n|_{A_0} \equiv -2^{n-1}/3^n$ y $g_n|_{A_1} \equiv 2^{n-1}/3^n$. Además,

$$|(f-g_1-g_2-\cdots-g_n)(x)| < 2^n/3^n.$$

Sea $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. En este punto recordemos el siguiente resultado:

Teorema de Weirstrass: Sea $f_n : X \longrightarrow [a,b]$ una sucesión de funciones continuas. Si para todo n existe $a_n \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| < a_n$ para todo $x \in X$ y si $\sum a_n$ converge, entonces $\sum f_n$ converge a una función continua.

En nuestro caso, $|g_n(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$, donde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge a $\frac{1}{2}\cdot\frac{2/3}{1-2/3} = 1$. Tenemos que g es por tanto una función continua y además

$$|g(x)| \leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$

$\square$

4.5 Ejercicios

4.5.1 Espacios primer numerables

Dado un espacio topológico X y un punto $p \in X$, diremos que una familia $\mathcal{F}(p)$ de entornos de p es una **base de entornos de** p si para cada entorno U de p, existe $V \in \mathcal{F}(p)$ tal que $p \in V \subseteq U$. Diremos que X es **primer numerable** (o que satisface el **primer axioma de numerabilidad**) si cada punto de X tiene una base de entornos numerable.

Ejercicio 4.5.1. Sea X un espacio primer numerable. Para cada par de puntos p y q, podemos elegir bases $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de entornos encajados de p y q, respectivamente. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $U_n \cap V_n \neq \emptyset$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos $x_n \in U_n \cap V_n$. Pruebe que $\{x_n\}$ converge tanto a p como a q.

Ejercicio 4.5.2. Sea X un espacio primer numerable. Pruebe que si cada sucesión convergente converge a un único punto, entonces X es un espacio de Hausdorff.

4.5.2 Espacios de Hausdorff

Ejercicio 4.5.3. Pruebe que en un espacio de Hausdorff todo subconjunto finito es cerrado.

Ejercicio 4.5.4. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Pruebe que si Y es un espacio de Hausdorff, entonces el gráfico de f, $G(f) \subseteq X \times Y$, es cerrado.

Ejercicio 4.5.5. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos funciones continuas. Pruebe que si Y es un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto $\{x \in X \ / \ f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

Ejercicio 4.5.6. Dado el siguiente diagrama conmutativo de funciones continuas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Pruebe que si Y es un espacio de Hausdorff, entonces X es de Hausdorff y $f(X)$ es cerrado en Y.

4.5.3 Espacios normales

Ejercicio 4.5.7. Sea R una relación de equivalencia en un espacio topológico X, y $p : X \longrightarrow X/R$ la proyección canónica. Pruebe que si p es una aplicación abierta y cerrada entonces: X normal $\Longrightarrow X/R$ normal.

Ejercicio 4.5.8. Sea X un espacio normal y $F_1, \ldots, F_n$ cerrados disjuntos. Pruebe que existen abiertos $V_i \supseteq F_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$, tales que $\bigcap \overline{V_i} = \emptyset$.

Ejercicio 4.5.9. Sea X un espacio normal y A un subconjunto cerrado en X. Demuestre que A es normal.

Ejercicio 4.5.10. Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios topológicos. Si $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es normal, demuestre que cada X_i también lo es.

Ejercicio 4.5.11. Probar que si X es un espacio normal y A es un subconjunto cerrado de X, entonces X/A es tambíen normal.

CAPÍTULO 5

COMPACIDAD

5.1 Espacios paracompactos

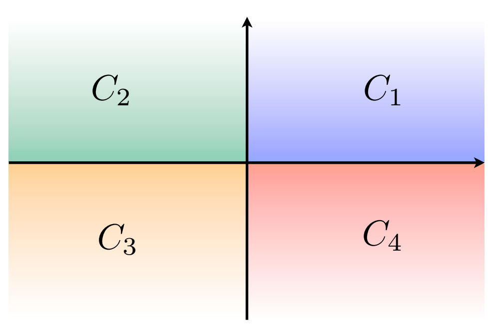
Sea X un espacio topológico, Γ un cubrimiento de X, es decir $X = \bigcup_{U \in \Gamma} U$. Un cubrimiento Γ' de X es un **refinamiento** de Γ si para todo $U \in \Gamma'$, existe $V \in \Gamma$ tal que $U \subseteq V$. Es otras palabras, todo elemento de Γ' está contenido en algún elemento de Γ. Si $\Gamma' \subseteq \Gamma$, diremos que Γ' es un **subcubrimiento** de Γ.

Un cubrimiento Γ es **localmente finito** si para cada $x \in X$, existe sólo un número finito de elementos de Γ que contienen a x.

Ejemplo 5.1.1.

(1) Sea $X = \mathbb{R}$ y $\Gamma = \{(a, b) : a < b\}$ es un cubrimiento de $\mathbb{R}$ que no es localmente finito. Por otro lado, $\Gamma' = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{N}\}$ sí es un cubrimiento de $\mathbb{R}$ localmente finito.

(2) Sea $X = \mathbb{R}^2$ y $\Gamma = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, donde C_i es el i-ésimo cuadrante de $\mathbb{R}^2$. Tenemos que Γ es un cubrimiento de $\mathbb{R}^2$ que es localmente finito, por ser finito.



La familia $\Gamma = \{(n, n+2) \times \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ también es un cubrimiento de $\mathbb{R}^2$ localmente finito.

Un espacio de Hausdorff X se dice **paracompacto** si todo subconjunto abierto de Γ posee un refinamiento abierto localmente finito.

Proposición 5.1.1. Todo espacio paracompacto es normal.

Demostración: Sea X un espacio paracompacto. Probaremos primero que X es regular. Sea A un subconjunto cerrado de X y $y \in A^c$. Como X es un espacio de Hausdroff, para cada $x \in A$ existen abiertos disjuntos U_x y V_x tales que $y \in U_x$ y $y \in V_x$. Considere el cubrimiento de X formado formado por A^c y todos los V_x con $x \in A$. Por paracompacidad, existe un refinamiento abierto localmente finito $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de este cubrimiento. Sea V la unión de todos los V_α que intersectan a A. Se tiene que V es un abierto que contiene a A. Al ser $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ localmente finito, existe un abierto W en X tal que $y \in W$ y W intersecta sólo a un número finito de $V_1, \ldots, V_n$ de elementos de $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$. Al ser $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ un refinamiento, si $V_i \cap A \neq \emptyset$, entonces $V_i \subseteq V_{x_i}$ para algún $x_i \in A$. Tomamos ahora la intersección $W \cap (\bigcap_{i=1}^n U_{x_i}) = U$. Tenemos que U es un conjunto abierto por ser la intersección finita de abiertos, y que $y \in W$ y $y \in U_{x_i}$ para todo $i \in [n]$. De donde $U \in W(y)$. Además, $W \cap V_\alpha = \emptyset$ si $\alpha \neq i$ y $U_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset$, por lo tanto $U \cap V = \emptyset$. Entonces, X es regular.

Ahora probaremos que X es normal. Supongamos que tenemos dos conjuntos cerrados A y B que son disjuntos. Para cada $x \in A$, la regularidad de X proporciona abiertos disjuntos U_x y V_x con $x \in U_x$ y $B \subseteq V_x$. Consideremos el cubrimiento abierto $\Gamma = \{U_x \ / \ x \in A\} \cup \{A^c\}$. Como X es paracompacto, existe un refinamiento abierto localmente finito $\{U_\alpha\}$ de Γ. Sea U la unión de los miembros de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ que intersectan a A. Luego, tenemos que U es un abierto que contiene a A. Entonces, para cada $y \in B$ existe un abierto W_y que intersecta sólo a un número finito $U_{1y}, \ldots, U_{ny}$ de elementos de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$. Note que $U_{iy} \subseteq U_{x_i}$, para algún x_i en A, porque $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es un refinamiento abierto de Γ. Sea $X_y = W_y \cap (\bigcap_{i=1}^n V_{x_i})$. Tenemos que X_y es un abierto que contiene a y y no intersecta a U. Tomando $V = \bigcup_{y\in B} X_y$, tenemos que V es un abierto que no intersecta a U_y y que contiene a B. Por lo tanto, X es normal porque existen U y V abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. $\square$

Dado un espacio topopógico X y una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, se define el **soporte** de f como el conjunto

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

Sean X es un espacio topológico y $\{\mu_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$. Dado un cubrimiento abierto Γ de X, diremos que la familia $\{\mu_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha\in\Delta}$ es **subordinada** a Γ si para todo $\alpha \in \Delta$, existe $U \in \Gamma$ tal que $\mathrm{Supp}(\mu_\alpha) \subseteq U$.

Dada una familia de funciones $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ y un cubrimiento Γ como en el párrafo anterior, diremos que $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es una **partición de la unidad de X subordinada a** Γ si:

(1) $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es subordinada a Γ.

(2) $\{\mathrm{Supp}(\mu_\alpha)\}_{\alpha\in\Delta}$ es localmente finito.

(3) $\sum_{\alpha\in\Delta} \mu_\alpha(x) = 1$.

Teorema 5.1.1. Si X es un espacio paracompacto, entonces para todo cubrimiento abierto Γ de X, existe una partición de la unidad subordinada a Γ.

Demostración: Sea Γ un cubrimiento abierto de X. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ un refinamiento abierto de Γ localmente finito. Luego, para todo $\alpha \in \Delta$, existe $U_\alpha \in \Gamma$ tal que $V_\alpha \subseteq U_\alpha$. Recuerde que X es un espacio normal, por lo que cada punto de $x \in X$ es cerrado. Entonces podemos encontrar un refinamiento $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ tal que

$$V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq W_\alpha \subseteq \overline{W_\alpha} \subseteq U_\alpha.$$

Tenemos $\overline{W_\alpha} \cap V_\alpha^c = \emptyset$ y que cada V_α^c es cerrado. Por el Lema de Urysohn, existe para cada α una función continua $f_\alpha : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f_\alpha|_{\overline{W_\alpha}} = 1$ y $f_\alpha|_{V_\alpha^c} = 0$. Ahora definamos

$$\mu_\alpha := \frac{f_\alpha}{\sum_{\alpha\in\Delta} f_\alpha}, \text{ para cada } \alpha \in \Delta.$$

Note que $\sum_{\alpha\in\Delta} f_\alpha$ es siempre finito, por lo que μ_α está bien definida. Es fácil ver que $\sum_{\alpha\in\Delta} \mu_\alpha = 1$. Además $\mu_\alpha \neq 0$ en W_α, y

$$\overline{\{x \;/\; \mu_\alpha(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{W_\alpha} \subseteq U_\alpha.$$

Sabemos que $f_\alpha(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Luego, $\sum_{\alpha\in\Delta} f_\alpha(x) = 0$ si, y sólo si $f_\alpha(x) = 0$ para todo $\alpha \in \Delta$. Esto equivale a que $x \in V_\alpha^c$ para todo $\alpha \in \Delta$, que a su vez equivale a que $x \notin \bigcup_{\alpha\in\Delta} V_\alpha = X$. Vemos que no es posible que $\sum_{\alpha\in\Delta} f_\alpha(x) = 0$ para algún $x \in X$. De donde $\sum_{\alpha\in\Delta} f_\alpha(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Entonces μ_α está bien definida. Como f_α es continua, tenemos que $\sum_{\alpha\in\Delta} f_\alpha$ por ser la suma de funciones continuas. Se sigue que μ_α es continua, por ser el cociente de funciones continuas y $\sum_{\alpha\in\Delta} f_\alpha \not\equiv 0$.

□

Proposición 5.1.2. Si X paracompacto y A cerrado entonces X/A es paracompacto.

Demostración: Como X es paracompacto, se tiene que X es regular. Y como A es cerrado, se tiene que X/A es Hausdorff. Ahora, sea $\Gamma = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ un cubrimiento abierto de X/A. Consideremos la proyección $p : X \longrightarrow X/A$ y damos a X/A la topología final inducida por p. Luego cada $p^{-1}(U_\alpha)$ es un abierto de X porque p es continua. De donde $\Gamma_X = \{p^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in\Delta}$ es un cubrimiento abierto de X, porque

$$X = p^{-1}(X/A) = p^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Delta} p^{-1}(U_\alpha).$$

Como X es paracompacto, existe un refinamiento Γ'_X de Γ localmente finito. Podemos suponer que $\Gamma'_X = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ con $V_\alpha \subseteq p^{-1}(U_\alpha)$. Consideremos los V_α tales que $V_\alpha \cap A \neq \emptyset$. Luego, $V = \bigcup\{V_\alpha \;/\; V_\alpha \cap A \neq \emptyset\}$ es un abierto que contiene a A. Reescribimos $\Gamma'_X = \{V_\alpha \;/\; V_\alpha \cap A = \emptyset\} \cap \{V\}$. Ahora, sea $\Gamma' = \{p(V_\alpha) \;/\; V_\alpha \cap A \neq \emptyset\} \cup \{p(V)\}$. Sean $B_\alpha = p(V_\alpha)$ y $B = p(V)$. Luego, $V_\alpha = p^{-1}(B_\alpha)$ porque $V_\alpha \cap A = \emptyset$. De donde $p^{-1}(B_\alpha)$ es un abierto de X. Similarmente, $V = p^{-1}(B)$ porque $A \subseteq V$, de donde $p^{-1}(B)$ es también un abierto de X. Si $V_\alpha \cap A = \emptyset$ entonces $[a] \notin B_\alpha$, para todo $a \in A$. Consideremos $U = \bigcup\{U_\alpha \;/\; [a] \in U_\alpha\}$. Tenemos que U es un abierto que contiene a $[a]$. Luego, podemos escribir $\Gamma = \{U_\alpha \;/\; [a] \notin U_\alpha\} \cup \{U\}$. Veamos que $\Gamma' = \{B_\alpha\} \cup \{B\}$ es un refinamiento abierto de Γ localmente finito. En el caso $A \cap V_\alpha = \emptyset$, $[a] \notin U_\alpha$, se tiene que

$$V_\alpha \subseteq p^{-1}(U_\alpha) \implies B_\alpha = p(V_\alpha) \subseteq p(p^{-1}(U_\alpha)) = U_\alpha.$$

En el caso $A \cap V_\alpha \neq \emptyset$, $[a] \in U_\alpha$, se tiene que

$$V_\alpha \subseteq p^{-1}(U_\alpha) \implies B_\alpha \subseteq U_\alpha, \text{ de donde } [a] \in B_\alpha.$$

Luego

$$B = \bigcup \{B_\alpha \ / \ [a] \in B_\alpha\} \subseteq \bigcup \{U_\alpha \ / \ [a] \in U_\alpha\} = U.$$

De donde Γ' es un refinamiento abierto de Γ. Ahora, sea $[x] \in X/A$. Si $x = a$ para algún $a \in A$, el único elemento de Γ' que contiene a $[x]$ es B. Si $x \neq a$ para todo $a \in A$, denotamos $C_{[x]} = \{B_\alpha \ / \ [x] \in B_\alpha\}$. Luego $p^{-1}([x]) = x$ porque $x \neq a$. De donde $x \in p^{-1}(B_\alpha) = V_\alpha$. Como Γ'_X es localmente finito, sólo un número finito de V_α contiene a x, digamos $x \in V_{\alpha_i}$ donde $i \in [n]$. Así, $[x] \in p(V_{\alpha_i}) = B_{\alpha_i}$. Luego, todo $C_{[x]}$ posee un número finito de elementos. Tenemos que Γ' es un refinamiento de Γ localmente finito. Por lo tanto, X/A es paracompacto.

$\square$

5.2 Espacios compactos

Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff. Diremos que X es **compacto** si de cada cubrimiento abierto Γ podemos extraer un subcubrimiento finito $\Gamma' \subseteq \Gamma$.

Proposición 5.2.1 (Teorema de Heine-Borel)**.** Todo intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ es compacto.

Demostración: Consideremos un intervalo cerrado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Sea Γ un cubrimiento abierto de $[a, b]$ y $A = \{x \in [a, b] \ / \ [a, x]$ puede ser cubierto por un número finito de miembros de $\Gamma\}$. Tenemos que $A \neq \emptyset$ pues $a \in A$. Tenemos además $A \subseteq [a, b]$. Por el Axioma de Completitud, existe $c \in [a, b]$ tal que $c = \sup(A)$. Note que $[a, c]$ es cubierto por un número finito de miembros de Γ, porque todo $x \in A$ con $x < c$ cumple que $[a, x]$ está cubierto por un número finito de miembros de Γ. Falta ver que $c = b$. Si $c < b$, entonces sea U un abierto de Γ que contiene a c. Luego existe $x \in U$ tal que $c < x < b$. Sabemos que $[a, c]$ es cubierto por un número finito de elementos de Γ, digamos $U_1, \ldots, U_n$. Por otro lado, $[a, x]$ está cubierto por un número finito de abiertos $U_1, \ldots, U_n$ y U de Γ. Luego, $x \in A$, de donde $c < x$, obteniendo así una contradicción.

$\square$

Ejemplo 5.2.1. El intervalo abierto (a, b) no es compacto. Para ver esto considere el siguiente cubrimiento abierto, $\Gamma = \{(a + 1/n, b - 1/n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Supongamos que podemos extraer un subcubrimiento finito $\Gamma' = \{(a + 1/i, b - 1/i)\}_{i=k}^{p}$. Luego,

$$\bigcup_{i=k}^{p} \left(a + \frac{1}{i}, b - \frac{1}{i}\right) = \left(a + \frac{1}{k}, b - \frac{1}{k}\right) \neq (a, b).$$

Por lo tanto, (a, b) no es compacto.

Proposición 5.2.2. Si X es un espacio compacto y A es cerrado en X, entonces A es compacto.

Demostración: Sea $\Gamma = \{U_\alpha \cap A \ / \ U \in \tau_X\}_{\alpha \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de A. Tenemos que la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \cup \{A^c\}$ es un cubrimiento abierto de X. Como X es compacto, existe un subcubrimiento finito $\{U_1, \ldots, U_n\} \cup \{A^c\}$ de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \cup \{A^c\}$ para X. Tenemos

$$A = A \cap X = A \cap \left(A^c \cup \bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) = (A \cap A^c) \cup \bigcup_{i=1}^{n} A \cap U_i = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap U_i.$$

Por lo que $\{U_i \cap A\}_{i=1}^{n}$ es un subcubrimiento finito para A.

$\square$

Proposición 5.2.3. La unión finita de conjuntos compactos es compacto.

Demostración: Sean $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos compactos de un espacio X. Sea Γ un cubrimiento abierto de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Para cada i, tenemos que $\{A_i \cap U \ / \ U \in \Gamma\}$ es un cubrimiento abierto de A_i. Como cada A_i es compacto, existe un subcubrimiento finito de $\{A_i \cap U \ / \ U \in \Gamma\}$ para A_i, digamos $\{A_i \cap U_{ij}\}_{ij=1}^{m_i}$. Tenemos

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{1j=1}^{m_1} A_1 \cap U_{1j}\right) \cup \cdots \cup \left(\bigcup_{nj=1}^{m_n} A_n \cap U_{nj}\right) = \bigcup_{i=1,\ldots,n,\ j=m_1,\ldots,m_n} U_{ij}.$$

Entonces $\{U_{ij}\}$ es un subcubrimiento finito para $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

□

Proposición 5.2.4. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si X es compacto entonces $f(X)$ también lo es.

Demostración: Sea $\Gamma = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de $f(X)$, de donde $f(X) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$. Tenemos $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(U_\alpha)$. Como f es continua, tenemos que $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un cubrimiento abierto de X. Como X es compacto, podemos extraer un subcubrimiento finito de $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ para X, digamos $\{f^{-1}(U_i)\}_{i=1}^{n}$. Veamos que $f(X) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Si $f(x) \in f(X)$ entonces existe i tal que $x \in f^{-1}(U_i)$, es decir $f(x) \in U_i$. De donde $f(X) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \cap f(X)$. Entonces,

$$f(X) = \bigcup_{i=1}^{n} f(X) \cap U_i = f(X) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Por lo tanto, $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ es un subcubrimiento finito de Γ para $f(X)$.

□

Ejemplo 5.2.2. Si R es una relación de equivalencia en un espacio compacto X, entonces X/R es también compacto.

Proposición 5.2.5. Sea X un espacio de Hausdorff y A un subespacio de X. Si A es compacto entonces A es cerrado.

Demostración: Sea $x \in A$ y $y \in A^c$. Como X es un espacio de Hausdorff, existen $U_x \in W(x)$ y $V_x \in W(y)$ tales que $U_x \cap V_x = \emptyset$. Luego, $\{U_x\}_{x \in A}$ es un cubrimiento abierto de A. Como A es compacto, podemos extraer un subcubrimiento finito para A, digamos $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{n}$. Sea $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Tenemos que $V \in W(y)$. Por otro lado, sea $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Es fácil ver que $U \cap V = \emptyset$. Como $A \subseteq U$, se sigue que $y \in V \subseteq A^c$. Por lo tanto, A^c es abierto.

□

Lema 5.2.1. Sea (Z, τ) un espacio topológico y Γ un cubrimiento de Z. Si Γ' es un refinamiento de Γ y Γ' tiene un subcubrimiento finito entonces Γ tiene un subcubrimiento finito.

Demostración: Por ser Γ' un refinamiento de Γ, se tiene que para todo $U \in \Gamma'$ existe $V \in \Gamma$ tal que $U \subseteq V$. Si $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es un subcubrimiento finito de Γ', entonces podemos elegir $V_1, \ldots, V_n$ en Γ tales que $U_i \subseteq V_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Luego, $Z = \bigcup_{j=1}^{n} U_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_j \subseteq Z$. Por lo tanto, $\{V_1, \ldots, V_n\}$ es un subcubrimiento finito de Γ para Z.

$\square$

Lema 5.2.2. Sean X e Y espacios topológicos. Para cada $x \in X$, consideremos $\{x\} \times Y \subseteq X \times Y$. Entonces $\{x\} \times Y$ es homeomorfo a Y.

Demostración: Un homeomorfismo $h : \{x\} \times Y \longrightarrow Y$ viene dado por $h(x, y) = y$.

$\square$

Teorema 5.2.1. Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios compactos. Entonces $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es compacto.

Demostración: Basta probar que si X e Y son espacios compactos, entonces $X \times Y$ también lo es. Sea $\Gamma = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de $X \times Y$. Damos a $X \times Y$ la topología producto. Sea Γ un cubrimiento abierto de $X \times Y$. Todo elemento de Γ es unión de elementos de $\tau_X \times \tau_Y$. A partir de Γ obtenemos un refinamiento $\Gamma' = \{U \times V \in \tau_X \times \tau_Y : \text{existe } A \in \Gamma \text{ tal que } U \times V \subseteq A\}$. Fijamos $x_0 \in X$. Note que $\{x_0\} \times Y \cong Y$. Para todo $(x_0, y) \in \{x_0\} \times Y$ existe $U_{x_0} \times V_y$ tal que $(x_0, y) \in U_{x_0} \times V_y$. Así tenemos que Γ' es un cubrimiento abierto de $\{x_0\} \times Y$. Por ser $\{x_0\} \times Y$ compacto, existe un subcubrimiento finito de Γ' para $\{x_0\} \times Y$, digamos $\Gamma'_{x_0} = \{U_{x_0}^j \times V_j : j = 1, \ldots, n\} \subseteq \Gamma'$. Sea $U_{x_0} = \bigcap_{j=1}^{n} U_{x_0}^j$. Tenemos que $U_{x_0} \in W(x_0)$ y que Γ'_{x_0} cubre a $U_{x_0} \times Y$. Ahora, $\{U_x\}_{x \in X}$ es un cubrimiento abierto de X. Por ser X compacto, existe un subcubrimiento finito $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ de X. Para cada U_{x_j} existe un subcubrimiento finito $\Gamma'_{x_j} = \{U_{x_j}^i \times V_i : i = 1, \ldots, m_j\}$ de $U_{x_j} \times Y$. Tenemos que $\hat{\Gamma} = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma'_{x_j}$ es un subcubrimiento finito de Γ'. En efecto, sea $(x, y) \in X \times Y$. Luego, existe U_{x_j} tal que $x \in U_{x_j}$. Así, $(x, y) \in U_{x_j} \times Y$, y luego existe $U_{x_j}^i \times V_i \in \Gamma'_{x_j}$ tal que $(x, y) \in U_{x_j}^i \times V_i$. Entonces, $\hat{\Gamma}$ cubre a $X \times Y$. Ahora, como Γ' tiene un subcubrimiento finito de $X \times Y$ y Γ' es un refinamiento de Γ, se tiene que Γ posee un subcubrimiento finito de $X \times Y$. Por lo tanto, $X \times Y$ es compacto.

$\square$

Corolario 5.2.1. Para cada n, sean a_i y b_i números reales con $a_i < b_i$ y $i = 1, \ldots, n$. Entonces $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.2.2. $B \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto si, y sólo si, B es cerrado y acotado.

Demostración: Supongamos que B es compacto. Como $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hausdorff, se tiene que B es cerrado. Ahora, sea $x_0 \in B$ y $\Gamma = \{B(x_0, r) : r > 0\}$. Tenemos que Γ es un cubrimiento abierto de B. Como B es compacto, existe un subcubrimiento finito de Γ para B, digamos $\{B(x_0, r_i)\}_{i=1}^n$. Luego, $B \subseteq B(x_0, \max\{r_i\}_{i=1}^n)$. Por lo tanto, B es acotado.

Ahora supongamos que B es cerrado y acotado. Luego existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tal que $B \subseteq B(x_0, r)$. Escribamos $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Tenemos $B \subseteq B(x_0, r) \subseteq \prod_{i=1}^n [x_0^i - r, x_0^i + r] =: P$. Note que P es compacto por ser un producto finito de compactos. Como $B \subseteq P$, B es cerrado en P (por ser cerrado en $\mathbb{R}^n$ y ser P cerrado en $\mathbb{R}^n$) y P es compacto, se tiene que B es un subconjunto compacto de P. Por lo tanto, B es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Definición 5.2.1. Un espacio topológico X se dice:

(1) **Secuencialmente compacto** si toda sucesión en X tiene al menos una subsucesión convergente.

(2) **Numerablemente compacto** si todo subconjunto infinito de X tiene al menos un punto de acumulación.

Teorema 5.2.3.

(1) Todo espacio secuencialmente compacto es numerablemente compacto.

(2) Todo espacio compacto es secuencialmente compacto.

Demostración:

(1) Sea $A \subseteq X$ un subconjunto infinito de un espacio secuencialmente compacto X. Escojamos una sucesión $x_1 \in A$, $x_2 \in A - \{x_1\}$, $x_3 \in A - \{x_1, x_2\}$, $\ldots$, $x_{n+1} \in A - \{x_1, \ldots, x_n\}$, lo cual se puede hacer porque A es infinito. Así obtenemos una sucesión de elementos distintos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. Como X es secuencialmente compacto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Sea $p = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Luego para todo $W \in W(p)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica que $x_n \in W$. Es decir, todo entorno de p contiene infinitos puntos de $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y por tanto infinitos puntos de A. Entonces, p es un punto de acumulación de A. Por lo tanto, X es numerablemente compacto.

(2) Sea X un espacio compacto y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no posee una subsucesión convergente. Luego, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no posee puntos de acumulación. Entonces para cada $x \in X$ existe un abierto $U_x \in W(x)$ tal que U_x sólo contiene un número finito de puntos de $\{X_n\}$. La familia $\{U_x\}_{x\in X}$ es un cubrimiento abierto de X. Como X es compacto, $\{U_x\}_{x\in X}$ posee un subcubrimiento finito $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$. Cada U_{x_i} contiene sólo un número finito de puntos de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{i=1}^n X_i$. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finita y por lo tanto existe un x_k que se repite infinitas veces (de donde se obtiene una subsucesión convergente), obteniendo así una contradicción.

$\square$

Lema 5.2.3 (Número de Lebesgue de un cubrimiento)**.** Dado X un espacio métrico secuencialmente compacto. Para cada cubrimiento abierto $\Gamma = \{U_s \ / \ s \in S\}$, existe un entero positivo n (a $1/n$ se le llama **número de Lebesgue de** Γ) tal que para cada $x \in X$ existe $U_s \in \Gamma$ tal que $B(x, 1/n) \subseteq U_s$.

Demostración: Supongamos que para todo entero positivo n existe un punto $x_n \in X$ tal que $B(x_n, 1/n) \nsubseteq U_s$, para todo $s \in S$. Como X es secuencialmente compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente y por lo tanto un punto de acumulación $x \in X$. Tenemos que $x \in U_s$, para algún $s \in S$. Como U_s es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq U_s$. Como x es un punto de acumulación de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe $n > 2/\delta$ tal que $x_n \in B(x, \delta/2)$. Además, $B(x_n, 1/n) \subseteq B(x, \delta)$. En efecto, si $y \in B(x_n, 1/n)$ entonces $d(y, x_n) < 1/n < \delta/2$, y como $x_n \in B(x, \delta/2)$ se tiene $d(x, x_n) < \delta/2$. Se sigue

$$d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Entonces $B(x_n, 1/n) \subseteq B(x, \delta) \subseteq U_s$. Pero por otro lado, $B(x_n, 1/n) \nsubseteq U_s$, obteniendo una contradicción.

□

Un espacio métrico X es **totalmente acotado** si para cada $\epsilon > 0$ existe una colección finita $\{B(x_i, \epsilon)\}_{i=1}^n$ de bolas abiertas que cubre a X.

Lema 5.2.4. Todo espacio métrico secuencialmente compacto es totalmente acotado.

Demostración: Sea X un espacio secuencialmente compacto. Supongamos que X no es totalmente acotado, esto es, existe $\epsilon > 0$ tal que para cualquier familia finita $\{B(x_i, \epsilon)\}_{i=1}^n$ se tiene que $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon) \subsetneqq X$. Entonces para cada colección finita $\{x_i : i = 1, \ldots, n\}$ existe un punto $x \in X$ tal que $d(x, x_i) \geq \epsilon$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Podemos escoger una sucesión $\{y_n\}$ tal que $d(y_n, y_m) \geq \epsilon$ si $n \neq m$. En efecto, sea $y_1 \in X$. Luego existe $y_2 \in X - B(y_1, \epsilon)$. De manera similar, existe $y_3 \in X - (B(y_1, \epsilon) \cup B(y_2, \epsilon))$. Procediendo de esta manera, obtenemos tal sucesión $\{y_n\}$. Ahora veamos que $\{y_n\}$ no tiene una subsucesión convergente. Supongamos lo contrario. Luego existe una subsucesión convergente $\{y_{n_k}\} \subseteq \{y_n\}$. En particular, $\{y_{n_k}\}$ es una sucesión de Cauchy, de donde para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $i, j > N$ implica que $d(y_{n_i}, y_{n_j}) < \epsilon$. Esto contradice el hecho de que $d(y_n, y_m) \geq \epsilon$ si $n \neq m$. Por lo tanto, $\{y_n\}$ no tiene una subsucesión convergente, lo cual es una contradicción porque X es secuencialmente compacto.

□

Teorema 5.2.4. Si X es un espacio métrico entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) X es secuencialmente compacto.

(2) X es numerablemente compacto.

(3) X es compacto.

Demostración: Probemos (1) $\Longrightarrow$ (3). Sea X un espacio métrico secuencialmente compacto y sea $\{U_s \ / \ s \in S\}$ un cubrimiento abierto de X con número de Lebesgue δ. Como X es totalmente acotado por el lema anterior, existe una colección finita $\{B(x_i, \delta) \ / \ i = 1, \ldots, n\}$ que cubre a X. Para cada $i = 1, \ldots, n$, existe $s_i \in S$ tal que $B(x_i, \delta) \subseteq U_{s_i}$. Entonces $\{U_{s_i} \ / \ i = 1, \ldots, n\}$ es un subcubrimiento finito de $\{U_s \ / \ s \in S\}$ para X. Por lo tanto, X es compacto.

Ahora probemos (3) $\Longrightarrow$ (2). Supongamos que X es un espacio métrico compacto. Sea A un subconjunto infinito de X. Supongamos que A no posee un punto de acumulación. Luego, para cada $x \in X$ existe $U_x \in W(x)$ tal que $A \cap (U_x - \{x\}) = \emptyset$. Tenemos que $\Gamma = \{U_x \ / \ x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X. Como X es compacto, existe un subcubrimiento finito $\Gamma' = \{U_{x_i} \ / \ i = 1, \ldots, n\}$ de Γ para X. Sea $x \in A$. Luego, $x \in U_{x_i}$ para algún $i = 1, \ldots, n$. Si $x \neq x_i$ entonces $x \in A \cap (U_{x_i} - \{x_i\})$, lo cual no es posible. Entonces se tiene que $x = x_i$. Por lo tanto, A es finito, obteniendo una contradicción.

Finalmente, probemos que (2) $\Longrightarrow$ (1). Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico X numerablemente compacto. Veamos que $\{x_n\}$ posee una subsucesión convergente. Si $\{x_n\}$ tiene un término infinitamente repetido entonces no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que $\{x_n\}$ no posee términos infinitamente repetidos, de donde $\{x_n\}$ es un subconjunto infinito de X. Como X es numerablemente compacto, $\{x_n\}$ posee un punto de acumulación, digamos $x \in X$. Como X es un espacio métrico, x posee una base numerable de entornos, a saber $\beta = \{B(x, 1/n) \ / \ n \in \mathbb{N}\}$. Luego para todo $k \in \mathbb{N}$ existe x_{n_k} tal que $x_{n_k} \in B(x, 1/k) - \{x\}$. En particular, para $k = 1$ existe x_{n_1} tal que $x_{n_1} \in B(x, 1) - \{x\}$. Sea $d_1 = d(x_{n_1}, x)$. Sea $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $1/k_2 < d_1$, y sea $x_{n_2} \in B(x, 1/k_2) - \{x\}$. Tomamos ahora $d_2 = d(x_{n_2}, x)$. Hallamos k_3 y x_{n_3} de manera similar usando d_2, y seguimos repitiendo este procedimiento de manera indefinida. Así obtenemos una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ tal que $\{x_{n_k}\} \longrightarrow x$. Por lo tanto, X es secuencialmente compacto.

$\square$

5.3 Espacios de funciones

Sea X un espacio métrico compacto, denotamos

$$C(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \text{ es continua}\}.$$

Toda función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, con X compacto, es acotada. Luego, $\sup_{x\in X} |f(x)|$ existe, por lo que tiene sentido definir la norma de f en $C(X)$ por

$$||f|| := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Tenemos que $(C(X), || \ ||)$ es un espacio métrico, con la métrica $[\ ,\ ] : C(X) \times C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$[f, g] := \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Una función $f \in C(X)$ se dice **uniformemente continua en** X si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x') < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \epsilon, \text{ para todo par } x, x' \in X.$$

Teorema 5.3.1. Sea $f : (X, d_1) \longrightarrow (Y, d_2)$ una función continua entre espacios métricos. Si (X, d_1) es compacto, entonces f es uniformemente continua.

Demostración: Dado $\epsilon > 0$. Para cada $x \in X$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta_x)) \subseteq B(f(x), \epsilon/2)$. La familia $\{B(x, \delta_x) : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X. Como X es compacto, $\{B(x, \delta_x)\}$ posee un número de Lebesgue δ. Ahora sean $x, y \in X$ tales que $d_1(x, y) < \delta$. Luego existe $z \in X$ tal que $B(x, \delta) \subseteq B(z, \delta_z)$, o también $\{x, y\} \subseteq B(z, \delta_z)$. Entonces, $d_1(x, z) < \delta_z$ y $d_1(y, z) < \delta_z$. De donde

$$\begin{aligned} d_1(x, z) < \delta_z &\Longrightarrow d_2(f(x), f(z)) < \epsilon/2 \text{ y} \\ d_1(y, z) < \delta_z &\Longrightarrow d_2(f(y), f(z)) < \epsilon/2 \end{aligned}$$

implican que $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$. Por lo tanto, f es uniformemente continua.

$\square$

Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico X se dice **de Cauchy** si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > N \implies d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Un espacio métrico X se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto de X.

Proposición 5.3.1. Sea X un espacio métrico. Entonces X es compacto si, y sólo si, X es completo y totalmente acotado.

Demostración: Supongamos que X es compacto. Entonces X es totalmente acotado por el Lema 5.2.4 y el Teorema 5.2.4. Ahora supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X. Entonces $\{x_n\}$ tiene un punto de acumulación $x \in X$. Sea $\epsilon > 0$, como $\{x_n\}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon/2$. Sea x_{n_k} una subsucesión convergente de $\{x_n\}$, tal que $x_{n_k} \longrightarrow x$. Luego, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n_k > M$ entonces $d(x_{n_k}, x) < \epsilon/2$. Sea x_{n_k} tal que $x_{n_k} > N, M$. Supongamos que $n > N$. Entonces, $d(x_n, x_{n_k}) < \epsilon/2$. Además, $d(x_{n_k}, x) < \epsilon/2$. Luego

$$d(x_n, x) \le d(x, x_{n_k}) + d(x_n, x_{n_k}) < \epsilon.$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica que $d(x_n, x) < \epsilon$. Es decir, $\{x_n\}$ converge a x.

Ahora supongamos que X es completo y totalmente acotado. Por el Teorema 5.2.4, basta probar que X es secuencialmente compacto. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X. Al ser X completo, para demostrar que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente es suficiente probar que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión de Cauchy. Como X es totalmente acotado, existe una colección finita $\{B(a_j^1, 1) : j = 1, \dots, k_1\}$ que cubre a X. Al menos una de estas bolas, digamos B_1, contiene una subsucesión $\{x_n^1\}$ de $\{x_n\}$. Existe otra colección finita, $\{B(a_j^2, 1/2) : j = 1, \dots, k_2\}$ que cubre a X. Al menos una de estas bolas, digamos B_2, contiene una subsucesión $\{x_n^2\}$ de $\{x_n^1\}$. Siguiendo este proceso recursivamente, obtenemos una subsucesión $\{x_n^k\}$ de $\{x_n^{k-1}\}$ contenida en una bola B_k de radio $1/k$. A partir de las sucesiones $\{x_n^1\}$, $\{x_n^2\}$, $\dots$, tomamos la sucesión diagonal $\{x_n^n\}$, la cual es una subsucesión de Cauchy de $\{x_n\}$. En efecto, sea $\epsilon > 0$, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \epsilon$. Si $n, m > 2N$ entonces $x_m^m, x_n^n \in B_{2N}$ de radio $1/2N$. De donde $d(x_n^n, x_m^m) \le 1/2N + 1/2N < \epsilon$.

□

Proposición 5.3.2. Si X es compacto entonces $C(X)$ es completo.

Demostración: Sea $\{f_n\} \subseteq C(X)$ una sucesión de Cauchy. Luego, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > N$ implica $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X$ (1). Así tenemos que $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, se tiene que $\{f_n(x)\}$ converge. Denotamos $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ (tomamos el límite cuando $m \longrightarrow \infty$ en (1)). Luego para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, para todo $x \in X$. Sólo falta probar que $f \in C(X)$. Sea $x \in X$. Veamos que f es continua en x. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_N(x) - f(x)| < \epsilon/3$ porque $\{f_n\}$ converge uniformemente a f. Así tenemos

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x')| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x') + f_N(x') - f(x')| \\
&\le |f(x') - f_N(x')| + |f_N(x') - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + |f_N(x') - f_N(x)| + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \frac{2\epsilon}{3} + |f_N(x') - f_N(x)|, \text{ para todo } x' \in X.
\end{aligned}$$

Como f_N es continua en x, existe $\delta > 0$ tal que $d(x', x) < \delta$ implica que $|f_N(x') - f_N(x)| < \frac{\epsilon}{3}$. Luego, si $d(x', x) < \delta$ entonces $|f(x) - f(x')| < \epsilon$. Por lo tanto, $f \in C(X)$.

□

Proposición 5.3.3. Todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es completo.

Demostración: Sea $E \subseteq X$ un subconjunto cerrado de X, donde X es un espacio métrico completo. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ una sucesión de Cauchy. Como X es completo, existe $x \in X$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Dicho x resulta ser un punto de acumulación de E, y como E es cerrado, se tiene $x \in E$. Por lo tanto, E es completo.

□

Una sucesión $(f_n) \subseteq C(X)$ **converge puntualmente a** f si cada cada $x \in X$ y $\epsilon > 0$ existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_x \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Diremos que (f_n) **converge uniformemente a** f si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \text{ para todo } x \in X.$$

Teorema 5.3.2 (Dini)**.** Sea $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas sobre un espacio compacto X. Si $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ y si $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in X$, donde f es una función continua, entonces la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f de manera uniforme.

Demostración: Considere la sucesión en $C(X)$ dada por $g_n = f - f_n$. Si $n > m$ entonces $f_n > f_m$, de donde $g_n < g_m$. Por lo que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente. Es claro que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a 0. Ahora, dado $\epsilon > 0$, sea $D_n = g_n^{-1}(-\infty, \epsilon)$. Tenemos que D_n es abierto porque g_n es continua y $(-\infty, \epsilon)$ es abierto en $\mathbb{R}$. Note que $\{D_n\}_{n\geq 1}$ es creciente porque $\{g_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente. Por la convergencia puntual, si $x \in X$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica que $g_n(x) < \epsilon$. Es decir, $x \in D_n$ si $n \geq n_0$. Entonces $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Como X es compacto, $\Gamma = \{D_n\}_{n\geq 1}$ posee un subcubrimiento finito $\Gamma' = \{D_n\}_{n=1}^{N}$. Se tiene $X = \bigcup_{n=1}^{N} D_n$. Como $\{D_n\}_{n\geq 1}$ es creciente, se tiene $X = D_N$. Luego, para todo $x \in X$, $g_N(x) < \epsilon$. Como $\{g_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente entonces para todo $x \in X$, $g_n(x) < \epsilon$ si $n \geq N$. Note que N no depende de x. Hemos probado que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$, para todo $x \in X$. Por lo tanto, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f.

□

Ejemplo 5.3.1. Consideremos el espacio compacto $X = \{1, \ldots, n\}$. En este caso, $C(X) = \mathbb{R}^n$. Toda función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dada por una n-tupla $(f(1), \ldots, f(n))$. Los espacios $C(X)$ y $\mathbb{R}^n$ son topológicamente equivalentes, es decir, $C(X)$ con la topoloía de la norma es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ con la topología usual.

Un subespacio $F \subseteq C(X)$ es **equicontinuo en** $x \in X$ si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_x > 0$ tal que

$$d(x, x') < \delta_x \implies |f(x) - f(x')| < \epsilon, \text{ para todo } f \in F.$$

Diremos que F es **equicontinuo en** X si es equicontinuo en cada punto de X. Se dice que F es **equiacotado** si existe una constante $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $f \in F$ y todo $x \in X$.

Teorema 5.3.3 (Arzela-Ascoli)**.** En $C(X)$, todo conjunto cerrado E es compacto si, y sólo si, E es equicontinuo y equiacotado.

Demostración: Supongamos que E es compacto. Sea $f \in E$ y considere el cubrimiento abierto $\Gamma = \{B(f,r) : r > 0\}$ de E. Como E es compacto, existe un subcubrimiento finito $\Gamma' = \{B(f,r_i) : i = 1,\ldots,n\} \subseteq \Gamma$. De donde $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f,r_i) \subseteq B(f, \max\{r_i : i = 1,\ldots,n\})$. Por lo que E es acotado. Por otro lado, como E es un subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff, tenemos que E es cerrado. Ahora sea $\epsilon > 0$ y considere el cubrimiento abierto $\Gamma = \{B(f,\epsilon/3) : f \in E\}$ de E. Como E es compacto, existe un subcubrimiento finito $\Gamma' = \{B(f_i,\epsilon/3) : i = 1,\ldots,n\} \subseteq \Gamma$. Luego $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i,\epsilon/3)$. Sea $j \in \{1,\ldots,n\}$. Como f_j es continua en X y X es compacto, se tiene que f_j es uniformemente continua en X. Luego, existe $\delta_j > 0$ tal que $d(x,x') < \delta_j$ implica que $|f_j(x) - f_j(x')| < \epsilon/3$. Sea $\delta = \min\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}$. Sea $f \in E$. Luego existe $k \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $f \in B(f_k,\epsilon/3)$. Es decir, $|f(x) - f_k(x)| < \epsilon/3$, para todo $x \in X$. Si $d(x,x') < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x')| + |f_k(x') - f(x')| < \epsilon.$$

Por lo tanto, f es uniformemente continua en X, para doto $f \in E$. Es decir, f es equicontinuo.

Ahora sea $E \subseteq C(X)$ un subconjunto cerrado, acotado y equicontinuo. Como $C(X)$ es completo y E es cerrado tenemos que E es completo. Entonces, E es compacto si es totalmente acotado. Como E es acotado o equiacotado en $C(X)$ existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y para todo $f \in C(X)$. Como E es equicontinuo, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon/4$ siempre que $x_1, x_2 \in X$ sean tales que $d(x_1,x_2) < \delta$ y $f \in E$. Como X es compacto, es totalmente acotado y, por ende, existe una colección finita $\{B(x_i,\delta) : i = 1,\ldots,p\}$ que cubre a X. Sea $P = \{y_0,\ldots,y_q\}$ una partición de $[-M,M]$ en subintervalos de longitud menor que $\epsilon/4$. Sea $\mathcal{P}$ es conjunto de todas las p-tuplas $(y_{k_1},\ldots,y_{k_p})$ de puntos de P. Note que $\mathcal{P}$ es finito. Para cada $g \in E$, existe una p-tupla en $\mathcal{P}$ tal que $|g(x_i) - y_{k_i}| < \epsilon/4$, $i = 1,\ldots,p$ $(*)$. Sea $\mathcal{P}'$ el subconjunto de $\mathcal{P}$ que consiste en todas aquellas p-tuplas para las cuales existe al menos una función $g \in E$ que satisface $(*)$. Ahora, a cada p-tupla de $\mathcal{P}'$ le asociamos una sola función $g \in E$ que satisface $(*)$, y formamos el conjunto F de tales g seleccionadas. Tenemos que F es finito. Para casa $f \in E$ existe una p-tupla $(y_{k_1},\ldots,y_{k_p}) \in \mathcal{P}'$ tal que $|f(x_i) - y_{k_i}| < \epsilon/4$, donde $i = 1,\ldots,p$. Sea $g \in F$ que corresponde a $(y_{k_1},\ldots,y_{k_p})$ (1). Entonces para cada $x \in X$ existe x_i tal que $x \in B(x_i,\delta)$. Por la continuidad uniforme de f y g, tenemos que si $d(x,x_i) < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_i)| < \epsilon/4$ y $|g(x_i) - g(x)| < \epsilon/4$ (2). Note que $\{B(g,\epsilon)\}$ cubre a E. En efecto, por (1) y (2), tenemos

$$\begin{aligned}
|f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - y_{k_i}| + |y_{k_i} - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| \\
&< \frac{\epsilon}{4} + |f(x_i) - y_{k_i}| + |y_{k_i} - g(x_i)| + \frac{\epsilon}{4} \\
&< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Luego, $f \in B(g,\epsilon)$. Se sigue que E es totalmente acotado.

□

Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Diremos que A es **nunca denso** si $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$. Un espacio es de **primera categoría** o **magro** cuando puede expresarse como la unión numerable de subconjuntos nuca densos. Un espacio es de **segunda categoría** cuando no es de primera categoría.

Teorema 5.3.4 (Teorema de Intersección de Cantor)**.** Sea (X,d) un espacio métrico completo y $\{F_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de subconjuntos no vaciós y cerrados de X tales que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ es exactamente un punto.

Demostración: Para empezar, tenemos la cadena de inclusiones $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X tal que $x_n \in F_n$ para cada $n \geq 1$. Veamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Note que $\{\text{diam}(F_n)\}$ es una sucesión que tiene a 0. Luego, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $\text{diam}(F_n) < \epsilon$. Como la sucesión de cerrados es decreciente, tenemos que $n, m > n_0$ con $m > n$ y $x_n, x_m \in F_n$ implica $d(x_n, x_m) < \text{diam}(F_n) < \epsilon$. De donde $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Como X es completo, $\{x_n\}$ es convergente a un punto $x \in X$.

Veamos ahora que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Supongamos lo contrario, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin F_k$ y como F_k es cerrado, tenemos que $r = d(x, F_k) > 0$, con lo que la bola $B(x, r/2)$ y F_k no tienen puntos comunes, pero si $n > k$ entonces $x_n \in F_k$ (pues la sucesión de cerrados es decreciente), lo que implica que $x_n \notin B(x, r/2)$, lo cual es imposible pues porque $x_n \longrightarrow x$.

Ahora veamos que x es el único punto en la intersección. Supongamos que existe $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Entonces $d(x, y) \leq \text{diam}(F_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y como $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(F_n) = 0$, se tiene que $d(x, y) = 0$. Se sigue que $x = y$, pues d es una métrica.

□

Proposición 5.3.4. Sea N un subconjunto nunca denso de un espacio X. Entonces $\overline{N}^c$ es denso en X.

Demostración: Supongamos que $\overline{N}^c$ no es denso en X. Luego $\overline{\overline{N}^c} \neq X$. De donde existe $p \in X$ y un abierto $A \in W(p)$ tal que $A \cap \overline{N}^c = \emptyset$. Entonces, $p \in A \subseteq \overline{N}$ y, por consecuente, $p \in \text{int}(\overline{N})$. Tenemos que $\text{int}(\overline{N}) \neq \emptyset$, obteniendo así una contradicción, pues N es nunca denso en X. □

Proposición 5.3.5. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto abierto, donde X es un espacio métrico. Sea N un conjunto nunca denso en X. Entonces, existen $p \in X$ y $\epsilon > 0$ tales que $B(p, \delta) \subseteq A$ y $B(p, \delta) \cap N = \emptyset$.

Demostración: Sea $H = A \cap \overline{N}^c$. Entonces $H \subseteq A$ y $H \cap \overline{N} = \emptyset$ (o $H \cap N = \emptyset$). Además, H no es vacío porque A es abierto y $\overline{N}^c$ es denso en X. Note que H es abierto porque A y $\overline{N}^c$ lo son. Luego, existe $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subseteq H$, para algún $p \in H$. En consecuencia, $B(p, \delta) \subseteq A$ y $B(p, \delta) \cap N = \emptyset$.

□

Teorema 5.3.5 (Teorema de Categoría de Baire)**.** Todo espacio métrico completo es de segunda categoría. Es decir, dado un espacio métrico completo X y $\{A_n\}$ una sucesión de conjuntos nunca densos, entonces existe $x \in X$ tal que $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Demostración: Sea $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Tenemos que M es un espacio de primera categoría. Como A_1 es nunca denso en X, existe $a_1 \in X$ y $\delta_1 > 0$ tales que $B(a_1, \delta_1) \cap A_1 = \emptyset$. Sea $\epsilon_1 = \delta_1/2$. Entonces, $\overline{B(a_1, \epsilon_1)} \cap A_1 = \emptyset$. Ahora bien, $B(a_1, \epsilon_1)$ es abierta y A_2 es nunca denso en X, por consecuente existe

$a_2 \in X$ y $\delta_2 > 0$ tales que $B(a_2, \epsilon_2) \subseteq B(a_1, \epsilon_1) \subseteq \overline{B(a_1, \epsilon_1)}$ y $B(a_2, \delta_2) \cap A_2 = \emptyset$. Sea $\epsilon_2 = \delta_2/2 \leq \epsilon_1/2 = \delta_1/4$. Entonces, $\overline{B(a_2, \epsilon_2)} \subseteq \overline{B(a_1, \epsilon_1)}$ y $\overline{B(a_2, \epsilon_2)} \cap A_2 = \emptyset$. Repitiendo este procedimiento infinitas veces, se puede obtener una sucesión en encaje de conjuntos cerrados $\overline{B(a_1, \epsilon_1)} \supseteq \overline{B(a_2, \epsilon_2)} \supseteq \overline{B(a_3, \epsilon_3)} \supseteq \cdots$ tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\overline{B(a_n, \epsilon_n)} \cap A_n = \emptyset$ y $\epsilon_n \leq \delta_1/2^n$. Así, $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ y, por el Teorema de Intersección de Cantor, existe $p \in X$ tal que $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(a_n, \epsilon_n)}$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$, $p \notin A_n$ y por tanto $p \notin M$.

$\square$

5.4 Ejercicios

5.4.1 Espacios paracompactos y compactos

Ejercicio 5.4.1. Verifique que $\Gamma = \{(1/n, 1] : n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento abierto de $(0, 1]$. Pruebe además que no se puede extraer de Γ un subcubrimiento finito.

Ejercicio 5.4.2. Pruebe que todo espacio con la topología indiscreta es compacto. Además, un espacio con la topología discreta es compacto si, y sólo si, es finito.

Ejercicio 5.4.3. Pruebe que la imagen de un espacio compacto a través de una función continua es también compacta.

Ejercicio 5.4.4. Verifique que $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ es compacto.

Ejercicio 5.4.5. Pruebe que todo espacio compacto y de Hausdorff es paracompacto.

Ejercicio 5.4.6. Pruebe que todo espacio compacto de Hausdorff es normal.

Ejercicio 5.4.7. Pruebe el Teorema de Bolzano-Weierstrass en $\mathbb{R}$. Esto es, si A es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ entonces todo subconjunto infinito de A contiene al menos un punto de acumulación.

Ejercicio 5.4.8. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en un conjunto X. Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$, compare compacidad, conexidad, normalidad y paracompacidad de tales topologías.

Ejercicio 5.4.9. Pruebe que $\mathbb{R}^2$ con la topología generada por la base

$$\beta = \{\text{conos abiertos con vértice en el origen}\} \cup \{\mathbb{R}^2\}$$

es compacto y conexo.

5.4.2 Espacios de funciones

Ejercicio 5.4.10. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y X es compacto y conexo, entonces $f(X)$ es un intervalo cerrado.

Ejercicio 5.4.11. Sea $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ una familia de funciones continuas $X \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

(1) Para todo $f, g \in \mathcal{F}$, $f \cdot g \in \mathcal{F}$.

(2) Para todo $x \in X$ existe $U \in W(x)$ y $f \in \mathcal{F}$ tal que $f|_U \equiv 0$.

Pruebe que $\mathcal{F}$ contiene a la función 0.

Ejercicio 5.4.12. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y X es un espacio compacto, pruebe que f alcanza su máximo y su mínimo, esto es, que existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = \sup\{f(x) : x \in X\}$ y $f(x_2) = \inf\{f(x) : x \in X\}$.

Ejercicio 5.4.13. Pruebe que $\mathbb{R}^2$ con la topología de las franjas abiertas paralelas al eje Y no es compacto. ¿Será conexo?.

BIBLIOGRAFÍA

[1] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, Inc. Boston. (1966).

[2] John Kelly. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 27. Springer Verlag. New York. (1955).

[3] James Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River. (2000).