Pares balanceados, triples de cotorsión y representaciones de carcajes

Marco Antonio Pérez
IMERL - Universidad de la República
(colaboradores: Sergio Estrada y Haiyan Zhu)

Seminario de Álgebra del IMERL

25 de Mayo de 2018

organización

1. pares balanceados y triples de cotorsión
2. triples de cotorsión y pares balanceados en representaciones de carcajes
3. balanceo con objetos planos

Definición (X.-W. Chen, 2010)

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{L}$ dos clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Diremos que

$$\mathfrak{PB} = (\mathcal{F}, \mathcal{L})$$

es un **par balanceado** en $\mathcal{C}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{F}$ es pre-cubriente y $\mathcal{L}$ es pre-envolvente.
2. Para cada objeto $M \in \mathcal{C}$, existe una $\mathcal{F}$-resolución (no necesariamente exacta)
$$\mathbb{F}_\bullet \to M\colon \ \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$
con $F_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \geq 0$, que es $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{L})$-acíclica.
3. Para cada objeto $N \in \mathcal{C}$, existe una $\mathcal{L}$-coresolución
$$N \to \mathbb{L}^\bullet : 0 \to N \to L^0 \to L^1 \to \cdots$$
con $L^i \in \mathcal{L}$ para todo $i \geq 0$, que es $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}, -)$-acíclica.

¿de dónde obtener pares balanceados?

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
 & \boxed{\mathcal{F} \text{ pre-cubriente}} \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{par balanceado}\\ \mathfrak{PB}=(\mathcal{F},\mathcal{L})\end{array}} \arrow[ur, leftrightarrow, dotted] \arrow[r, leftrightarrow, dotted] \arrow[dr, leftrightarrow, dotted] & \boxed{\mathcal{L} \text{ pre-envolvente}} \\
 & \boxed{\mathcal{F}^{\perp_1} = {}^{\perp_1}\mathcal{L}}
\end{tikzcd}$$

¿de dónde obtener pares balanceados?

Definición (Beligiannis - Reiten, 2007)

Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{L}$ tres clases de objetos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Diremos que

$$\mathfrak{T}\mathfrak{C} = (\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{L})$$

es un **triple de cotorsión** en $\mathcal{C}$ si $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ y $(\mathcal{G}, \mathcal{L})$ son pares de cotorsión en $\mathcal{C}$. Más aún, un triple de cotorsión $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{L})$ en $\mathcal{C}$ es:

1. **complejo** si $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ y $(\mathcal{G}, \mathcal{L})$ son pares de cotorsión completos.
2. **hereditario** si $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ y $(\mathcal{G}, \mathcal{L})$ son pares de cotorsión hereditarios.

En siguiente resultado es enunciado y probado por primera vez en 1998 en las notas *Torsion Theory Relative to Ext* por Enochs, Jenda, Torrecillas y Xu.

Proposición (Chen, 2010)

Si $\mathfrak{T}\mathfrak{C} = (\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{L})$ es un triple de cotorsión completo y hereditario en una categoría $\mathcal{C}$ con suficientes proyectivos e inyectivos, entonces $(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ es un par balanceado en $\mathcal{C}$.

ejemplos

1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Entonces,

$$\mathfrak{T}\mathfrak{C} = (\mathrm{Proj}(\mathcal{C}), \mathcal{C}, \mathrm{Inj}(\mathcal{C}))$$

es un triple de cotorsión completo si, y sólo si, $\mathcal{C}$ tiene suficientes proyectivos e inyectivos.

2. Sea R un asociativo con identidad. Entonces, R es quasi-Frobenius si, y sólo si,

$$\mathfrak{T}\mathfrak{C} = (\mathrm{Mod}(R), \mathrm{Proj}(R), \mathrm{Mod}(R))$$

es un triple de cotorsión completo.

3. [Beligiannis - Reiten, 2007]: Sea Λ un álgebra de Artin y $\mathrm{mod}(\Lambda)$ la categoría de Λ-módulos finitamente generados. Denotamos:

$$\mathrm{CM}(\Lambda) = \text{objetos Cohen-Macaulay maximales sobre } \Lambda,$$

$$\mathrm{proj}_{\infty}(\Lambda) = \Lambda\text{-módulos f.g. con dimensión proyectiva finita.}$$

Si Λ es un álgebra Gorenstein, entonces

$$\mathfrak{T}\mathfrak{C} = (\mathrm{CM}(\Lambda), \mathrm{proj}_{\infty}(\Lambda), \mathrm{CoCM}(E(\Lambda)))$$

es un triple de cotorsión completo y hereditario en $\mathrm{mod}(\Lambda)$.

$\boxed{4}$ [Hovey, 2002]: Denotamos:

$$\mathrm{GProj}(R) = R\text{-módulos Gorenstein proyectivos,}$$
$$\mathrm{GInj}(R) = R\text{-módulos Gorenstein inyectivos.}$$

Recordemos que $M \in \mathrm{Mod}(R)$ es **Gorenstein proyectivo** si $M \simeq Z_0(\mathbb{P})$, donde $\mathbb{P}$ es un complejos exact de proyectivos tal que $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P}, Q)$ es un complejo exacto de grupos abelianos, para todo $Q \in \mathrm{Proj}(R)$.

Si R es un anillo **Iwanaga-Gorenstein**, es decir, R es Noetheriano a ambos lados y $\mathrm{id}(R_R) = \mathrm{id}({}_R R) < \infty$, entonces

$$\mathfrak{TC} = (\mathrm{GProj}(R), \mathrm{Proj}_{\infty}(R), \mathrm{GInj}(R))$$

es un triple de cotorsión.

En cada uno de los ejemplos anteriores de triples de cotorsión $\mathfrak{TC} = (\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{L})$, se puede notar que

$$\boxed{\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathrm{Proj}(\mathcal{C})} \text{ y } \boxed{\mathcal{G} \cap \mathcal{L} = \mathrm{Inj}(\mathcal{C})}$$

Proposición

Sean $(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ y $(\mathcal{G}, \mathcal{L})$ pares de cotorsión en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ tal que $(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ es un par balanceado. Entonces, $\mathcal{F} \cap \mathcal{H} = \mathrm{Proj}(R)$ y $\mathcal{G} \cap \mathcal{L} = \mathrm{Inj}(\mathcal{C})$.

Proposición

Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{L})$ un triple de cotorsión completo y hereditario en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Entonces, $(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ es un par balanceado **admisible** en $\mathcal{C}$.

Teorema

Las siguientes condiciones son equivalentes para toda categoría abeliana $\mathcal{C}$:

a. $\mathcal{C}$ posee suficientes proyectivos e inyectivos.

b. Existe un triple de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{L})$ en $\mathcal{C}$.

En 1998, en sus notas "*Torsion theory relative to Ext*", Enochs, Jenda, Torrecillas y Xu plantean la siguiente pregunta:

> ***¿Qué condiciones debe cumplir un par balanceado*** $(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ ***para inducir un triple de cotorsión completo y hereditario*** $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{L})$***?***

Damos **condiciones suficientes** sobre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{L}$ para construir $\mathcal{G}$ de manera que $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{L})$ sea tal triple de cotorsión.

Proposición

Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos e inyectivos. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{L}$ dos clases de objetos en $\mathcal{C}$ cerradas por sumandos directos, tales que:

1. $\mathcal{F}$ es resolvente y pre-cubriente **especial**, y $\mathcal{L}$ es corresolvente y pre-envolvente especial.
2. $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}^{\perp_1} \subseteq {}^{\perp_1}\mathcal{L}$ y ${}^{\perp_1}\mathcal{L} \cap \mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}^{\perp_1}$.
3. $(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ es un par balanceado en $\mathcal{C}$.

Entonces, existe un triple de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{L})$ en $\mathcal{C}$.

Recordemos que un anillo R es **virtualmente Gorenstein** [Beligiannis - Reiten, 2007] si

$$\mathrm{GProj}(R)^{\perp_1} = {}^{\perp_1}\mathrm{GInj}(R).$$

Proposición (Zareh Khoshchehreh - Asgharzadeh - Divaani Aazar, 2014)

Sea R un anillo Noetheriano conmutativo y de dimensión de Krull finita. Entonces, R es virtualmente Gorenstein si, y sólo si, $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{GInj}(R))$ es un par balanceado en $\mathrm{Mod}(R)$.

Corolario

Sea R un anillo Noetheriano conmutativo y de dimensión de Krull finita. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

a. R es virtualmente Gorenstein.

b. $(\mathrm{GProj}(R), \mathrm{GInj}(R))$ es un par balanceado en $\mathrm{Mod}(R)$.

c. Existe un triple de cotorsión completo y hereditario $(\mathrm{GProj}(R), \mathcal{G}, \mathrm{GInj}(R))$ en $\mathrm{Mod}(R)$.

1. pares balanceados y triples de cotorsión
2. **triples de cotorsión y pares balanceados en representaciones de carcajes**
3. balanceo con objetos planos

El objetivo es probar el siguiente resultado.

Teorema

Si $(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ y $(\mathcal{G}, \mathcal{L})$ son pares de cotorsión completos y hereditarios en $\mathsf{Mod}(R)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a $\mathcal{H} = \mathcal{G}$.

b $(\Phi(\mathcal{F}), \Psi(\mathcal{L}))$ es un par balanceado en $\mathrm{Rep}(Q, \mathsf{Mod}(R))$.

Pero hace falta explicar varias cosas.

Definición

Un **carcaj** $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ es un grafo dirigido donde:

$$Q_0 = \text{conjunto de vértices},$$
$$Q_1 = \text{conjunto de flechas},$$
$$s, t \colon Q_1 \to Q_0 \text{ donde } s(\alpha) \text{ es el punto inicial de } \alpha, \text{ y } t(\alpha) \text{ su punto final.}$$

Dada una categoría abeliana $\mathcal{C}$, una **representación** $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_\alpha)$ de Q sobre $\mathcal{C}$ se define por las siguientes condiciones:

1. A cada vértice $i \in Q_0$ se le asigna un objeto $\mathbb{X}_i \in \mathcal{C}$.
2. A cada flecha $\alpha \in Q_1$ se le asigna un morfismo $\mathbb{X}_\alpha : \mathbb{X}_i \to \mathbb{X}_j$ en $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X}_{s(\alpha)} \arrow[r, tail] \arrow[dr, "\mathbb{X}_\alpha"'] & \bigoplus\limits_{t(\alpha)=i} \mathbb{X}_{s(\alpha)} \arrow[d, dotted, "\exists!"', "\varphi_{\mathbb{X}_i}"] \\
& \mathbb{X}_i
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\prod\limits_{s(\alpha)=i} \mathbb{X}_{t(\alpha)} \arrow[r, two heads] & \mathbb{X}_{t(\alpha)} \\
\mathbb{X}_i \arrow[u, dotted, "\psi_{\mathbb{X}_i}", "\exists!"'] \arrow[ur, "\mathbb{X}_\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Denotamos

$$c_i(\mathbb{X}) := \mathrm{CoKer}(\varphi_{\mathbb{X}_i}) \text{ y } k_i(\mathbb{X}) := \mathrm{Ker}(\psi_{\mathbb{X}_i}).$$

Definición (Holm - Jørgensen, 2018)

Sea $\mathcal{L}$ una clase de objetos en $\mathcal{C}$.

$$\mathrm{Rep}(Q,\mathcal{L}) := \{\mathbb{X} \in \mathrm{Rep}(Q,\mathcal{C}) : \mathbb{X}_i \in \mathcal{L} \text{ para todo } i \in Q_0\},$$

$$\Phi(\mathcal{L}) := \{\mathbb{X} \in \mathrm{Rep}(Q,\mathcal{L}) : \varphi_{\mathbb{X}_i} \text{ es inyectivo y } c_i(\mathbb{X}) \in \mathcal{L} \text{ para todo } i \in Q_0\},$$

$$\Psi(\mathcal{L}) := \{\mathbb{X} \in \mathrm{Rep}(Q,\mathcal{L}) : \psi_{\mathbb{X}_i} \text{ es sobreyectivo y } k_i(\mathbb{X}) \in \mathcal{L} \text{ para todo } i \in Q_0\}.$$

Proposición

Sea Q un carcaj **no-discreto** y sin ciclos orientados. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{L}$ dos clases de objetos en $\mathcal{C}$ tales que $(\Phi(\mathcal{F}), \Psi(\mathcal{L}))$ es un par balanceado en $\mathrm{Rep}(Q, \mathcal{C})$. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $(\mathcal{F}, \mathcal{L})$ es un par balanceado en $\mathcal{C}$.
2. Si $\mathcal{F}$ es resolvente, entonces ${}^{\perp_1}\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}^{\perp_1}$.
3. Si $\mathcal{L}$ es corresolvente, entonces $\mathcal{F}^{\perp_1} \subseteq {}^{\perp_1}\mathcal{L}$.

Un carcaj Q es **enraizado a izquierda** si no contiene caminos de la forma $\cdots \to \bullet \to \bullet \to \bullet$.

Corolario

Si $(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ y $(\mathcal{G}, \mathcal{L})$ son pares de cotorsión completos y hereditarios en $\mathrm{Mod}(R)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a. $\mathcal{H} = \mathcal{G}$.
b. $(\Phi(\mathcal{F}), \Psi(\mathcal{L}))$ es un par balanceado para algún carcaj no-discreto Q enraizado a izquierda y derecha.

Corolario

Un anillo R es quasi-Frobenius si, y solo si, $(\Phi(\mathsf{Mod}(R)), \Psi(\mathsf{Mod}(R)))$ es un par balanceado para un carcaj no-discreto Q enraizado a izquierda y a derecha. En este caso, tenemos en $\mathrm{Rep}(Q, \mathsf{Mod}(R))$ un triple de cotorsión completo y hereditario

$$\mathfrak{T}\mathfrak{C} = (\Phi(\mathsf{Mod}(R)), \mathrm{Rep}(Q, \mathsf{Proj}(R)), \Psi(\mathsf{Mod}(R))).$$

Corolario

Sea R un anillo n-perfecto a izquierda y coherente a derecha. Entonces, las siguientes condiciones son equivalences:

a) R es virtualmente Gorenstein.

b) $(\mathsf{GProj}(R), \mathsf{GInj}(R))$ es un par balanceado en $\mathsf{Mod}(R)$.

c) $(\Phi(\mathsf{GProj}(R)), \Psi(\mathsf{GInj}(R)))$ es un par balanceado en $\mathrm{Rep}(Q, \mathsf{Mod}(R))$ para algún carcaj no-discreto Q enraizado a izquierda y derecha.

¿Se puede calcular $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$ ***usando otro tipo de resoluciones o correso-luciones que no sean proyectivas o inyectivas?***

Consideramos el par de cotorsión (completo y hereditario) de Enochs

$$\mathfrak{PC} = (\mathrm{Flat}(R), \mathrm{Cot}(R)),$$

junto con $\mathbb{F}_\bullet \twoheadrightarrow M$ y $N \rightarrowtail \mathbb{C}^\bullet$.

Entonces:

$$\boxed{\mathrm{Ext}^i_R(M,N) \cong \mathrm{Ch}(R)(\mathbb{F}_\bullet, \mathbb{C}^\bullet[i])/\sim}$$

Teorema (Enochs, 2015)

Sea R un anillo Noetheriano a izquierda. Entonces, $\mathrm{Flat}(R)$ es la parte izquierda de un par balanceado en $\mathrm{Mod}(R)$ si, y sólo si, R es perfecto a izquierda.

¿Y qué pasa si trabajamos en una categoría sin suficientes proyectivos?

Por ejemplo:

$\mathfrak{Qcoh}(X) =$ *categoría de haces quasi-coherentes sobre un esquema X.*

Proposición

Sea X un esquema Noetheriano y semi-separado, con un cubrimiento afín semi-separador $\mathfrak{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$. Asumamos que $\mathcal{O}_X(U_i)$ es un anillo Noetheriano pero no Artiniano, para algún $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, $\mathfrak{Flat}(X)$ no es la parte izquierda de un par balanceado en $\mathfrak{Qcoh}(X)$.

¡gracias por su atención!

Esta presentación + preprint

(incluyendo detalles omitidos aquí)

disponibles en:

`arxiv:1802.09989`

`maperez.net`

`fing.edu.uy/imerl/grupos/gia`