

CURSO ESPECIALIZADO DE ÁLGEBRA: MÉTODOS HOMOLÓGICOS EN CATEGORÍAS DE MODELOS

PROFESOR: DR. MARCO ANTONIO PÉREZ BULLONES

PROPÓSITO DEL CURSO

Este curso es una continuación del curso titulado *Álgebra Homológica vs. Álgebra Homotópica*. La primera parte del curso consiste en hallar estructuras de modelos asociadas a diferentes dimensiones homológicas clásicas y de Gorenstein. En la segunda parte, se estudia la categoría estable de un anillo como la categoría de homotopía de ciertas estructuras de modelos asociadas a módulos Gorenstein-inyectivos y Gorenstein-proyectivos absolutamente limpios. La última parte de este curso está basada en estudiar estructuras de modelos en álgebra homológica relativa, revisando varias técnicas desarrolladas por J. Daniel Christensen y Mark Hovey.

CONTENIDO DEL CURSO

1. Módulos sobre multi-anillos.

- 1.1 Multi-anillos (anillos con muchos objetos):
 - Definición y ejemplos.
- 1.2 La categoría $\text{Mod}(\mathfrak{A})$ de módulos sobre un multi-anillo \mathfrak{A} :
 - Definición, propiedades y ejemplos (módulos y complejos de cadena sobre un anillo asociativo).
- 1.3 Módulos libres sobre un multi-anillo:
 - El concepto de base y el Truco de Eilenberg.
- 1.4 Dimensiones proyectivas de módulos sobre un multi-anillo:
 - Pares de cotorsión.
 - Una generalización del Argumento Zig-Zag.
- 1.5 Aplicaciones:
 - Dimensiones proyectivas.
 - Pares de cotorsión asociados en la categoría $\text{Ch}(R)$ de complejos de cadenas sobre un anillo asociativo R .
 - Repaso de la Correspondencia de Hovey y estructuras de modelos n -proyectivas sobre $\text{Ch}(R)$.

2. Estructuras de modelos de tipo diferencialmente graduado a partir de dimensiones homológicas.

- 2.1 Estructuras n -proyectivas:
 - Triples de Hovey y su correspondencia con estructuras de modelos abelianas.
- 2.2 Estructuras n -inyectivas sobre complejos de cadenas sobre una categoría de Grothendieck:
 - El triple de cotorsión de García Rozas (o de Dold).

2.3 Estructuras n -planas:

- La estructura plana de Gillespie y una generalización de la Conjetura de la Cubierta Plana.
- La clase de complejos planos y la completitud de su par de cotorsión asociado.
- Métodos de Gillespie, García Rozas, y Aldrich.
- La clase de módulos n -planos, su descripción, y la completitud de su par de cotorsión asociado.
- Submódulos puros y sus aplicaciones por medio del Argumento Zig-Zag.
- Complejos n -planos y su descripción por medio del producto tensorial barra.
- Completitud del par de cotorsión de complejos n -planos.
- Una extensión de la Conjetura de la Cubierta Plana en $\text{Ch}(R)$.

3. Estructuras de modelos de tipo grado-a-grado a partir de dimensiones homológicas.

3.1 Introducción y propiedades de clases inducidas de tipo grado-a-grado (dw):

- Pares de cotorsión asociados.

3.2 Dimensiones inyectivas y estructuras de tipo dw.

3.3 Dimensiones proyectivas y estructuras de tipo dw:

- Motivación: la estructura de modelos dw-proyectiva.
- Tres tipos de filtraciones de la clase de módulos n -proyectivos.

3.4 Dimensiones planas y estructuras de tipo dw.

4. Revisitando estructuras de modelos *à la Gorenstein*.

4.1 Dimensiones homológicas Gorenstein-proyectivas, Gorenstein-inyectivas, y estructuras de modelos:

- Repaso de objetos G -proyectivos y G -inyectivos.
- Syzygias y cosyzygias.
- Propiedades de la dimensión G -proyectiva y G -inyectiva.
- Pares de cotorsión asociados a objetos (G,n) -proyectivos y (G,n) -inyectivos.
- Cogeneradores para pares de cotorsión (G,n) -inyectivos.
- Categorías localmente noetherianas y el Teorema de Matlis.
- Caracterización de complejos de cadenas (G,n) -inyectivos y (G,n) -proyectivos.
- Estructuras de modelos.

4.2 Dimensiones homológicas Gorenstein-planas y estructuras de modelos:

- Repaso de módulos y complejos G -planos.
- Propiedades de la dimensión G -plana.
- Cogeneradores para pares de cotorsión asociados a la dimensión G -plana.
- Estructuras de modelos (G,n) -planas sobre módulos graduados y su conexión con la estructura n -plana sobre $\text{Ch}(R)$.

5. La categoría estable plana de módulos sobre un anillo coherente.

- 5.1 Motivación y repaso de categorías estables.
- 5.2 La estructura de modelos Gorenstein-plana sobre un anillo coherente.
- 5.3 La categoría de homotopía de la estructura Gorenstein-plana.
- 5.4 El método de Gillespie para construir triples de Hovey.

6. La categoría estable de módulos sobre un anillo arbitrario.

- 6.1 Motivación y repaso de categorías estables.
- 6.2 Módulos de tipo FP-infinito.
- 6.3 Módulos absolutamente limpios y módulos de nivel.
- 6.4 Estructuras de tipo inyectivo:
 - La estructura de modelos inyectiva A -acíclica.
 - La estructura de modelos inyectiva **Inj**.
 - La estructura de modelos inyectiva exacta.
 - Las estructuras de modelos **Inj**-acíclica e inyectiva totalmente acíclica.
 - Las estructuras de modelos AC-acíclica y exacta AC-acíclica.
- 6.5 La estructura de modelos Gorenstein-inyectiva AC:
 - Módulos Gorenstein-inyectivos absolutamente limpios.
 - Estructura de modelos asociada.
 - La categoría de homotopía de la estructura Gorenstein-inyectiva AC.
 - Relación con la estructura AC-acíclica exacta.
- 6.6 La estructura de modelos Gorenstein-proyectiva AC:
 - Módulos Gorenstein-proyectivos absolutamente limpios.
 - Propiedades de los módulos Gorenstein-proyectivos AC.
 - Estructura de modelos asociada.
- 6.7 Estructuras de modelos de tipo proyectivo:
 - La estructura proyectiva A -acíclica.
 - La estructura proyectiva **Proj**.
 - La estructura proyectiva exacta.
 - Pares de dualidad.
 - Las estructuras firmemente acíclica y exacta firmemente acíclica.
- 6.8 Equivalencias de Quillen:
 - Definición de equivalencias de Quillen.
 - La estructura Gorenstein-inyectiva AC vs. la estructura exacta AC-acíclica.
 - La estructura Gorenstein-proyectiva AC vs. la estructura exacta firmemente acíclica.
 - La estructura Gorenstein-inyectiva AC vs. la estructura Gorenstein-proyectiva AC.

7. Complejos absolutamente limpios, de nivel, y Gorenstein-inyectivos AC.

- 7.1 Complejos de tipo FP-infinito.
- 7.2 Complejos absolutamente limpios y propiedades.
- 7.3 Complejos Gorenstein-inyectivos absolutamente limpios:
 - Caracterizaciones y estructuras de modelos asociadas.
- 7.4 Complejos de nivel:
 - Propiedades del producto tensorial barra.
- 7.5 Caracterizaciones de complejos Gorenstein-proyectivos AC.

8. Estructuras de modelos en álgebra homológica relativa.

- 8.1 Motivación.
- 8.2 Definición y ejemplos de clases proyectivas.
- 8.3 \mathbf{P} -cofibraciones, \mathbf{P} -fibraciones, y \mathbf{P} -equivalencias.
- 8.4 La estructura de modelos relativa.
- 8.5 Caracterización y propiedades de las \mathbf{P} -cofibraciones, \mathbf{P} -fibraciones, y \mathbf{P} -equivalencias.
- 8.6 El axioma de factorización y la existencia de reemplazos cofibrantes.
- 8.7 La categoría de homotopía de la estructura relativa.
- 8.8 Estructuras relativas monoidales.

REFERENCIAS

- [1] S. T. Aldrich, E. E. Enochs, J. R. García Rozas y L. Oyonarte. (2001). *Covers and Envelopes in Grothendieck Categories: Flat Covers of Complexes with Applications*. Journal of Algebra.
- [2] S. T. Aldrich, E. E. Enochs, O. M. G. Jenda y L. Oyonarte. (2001). *Envelopes and Covers by Modules of Finite Injective and Projective Dimensions*. Journal of Algebra.
- [3] M. Anel. (2010). *Introduction aux catégories triangulées*. Notas disponibles en: thales.math.uqam.ca/~anelm/mat/categoriesderivees/categoriesderivees_tout.pdf.
- [4] D. Bravo y J. Gillespie. (2016). *Absolutely Clean, Level, and Gorenstein AC-Injective Complexes*. Communications in Algebra.
- [5] D. Bravo, J. Gillespie y M. Hovey. (2012). *The stable module category of a general ring*. Preprint disponible en ArXiv: arxiv.org/abs/1405.5768.
- [6] D. Bravo, E. E. Enochs, A. C. Jacob, O. M. G. Jenda y J. Rada. (2012). *Cotorsion pairs in $C(R\text{-Mod})$* . Rocky Mountain Journal of Mathematics.
- [7] K. S. Brown. (1975). *Homological Criteria for Finiteness*. Commentarii Mathematici Helvetici.
- [8] J. D. Christensen y M. Hovey. (2002). *Quillen model structures for relative homological algebra*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.
- [9] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda. (2000). *Relative Homological Algebra. Vol. 1*. De Gruyter Expositions in Mathematics.
- [10] J. R. García Rozas. (1999). *Covers and Envelopes in the Category of Complexes of Modules*. Taylor and Francis. CRC Press Research Notes in Mathematics.
- [11] J. Gillespie. (2014). *How to construct a Hovey triple from two cotorsion pairs*. Preprint disponible en ArXiv: arxiv.org/abs/1406.2619.
- [12] J. Gillespie. (2014). *The flat stable module category of a coherent ring*. Preprint disponible en ArXiv: arxiv.org/abs/1412.4085.
- [13] J. Gillespie. (2013). *Exact Model Structures and Recollements*. Preprint disponible en ArXiv: arxiv.org/abs/1310.7530.
- [14] J. Gillespie. (2011). *Model structures on exact categories*. Journal of Pure and Applied Algebra.
- [15] J. Gillespie. (2007). *Cotorsion pairs and degreewise homological model structures*. Homology, Homotopy, and Applications.
- [16] J. Gillespie. (2004). *The flat model structure on $\text{Ch}(R)$* . Transactions of the American Mathematical Society.
- [17] P. A. Grillet. (2007). *Abstract Algebra*. Springer Graduate Texts in Mathematics.
- [18] M. Hovey. (1999). *Model Categories*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society.
- [19] D. Murfet y S. Salarian. (2011). *Totally acyclic complexes over Noetherian schemes*. Advances in Mathematics.
- [20] M. A. Pérez. (2016). *Introduction to Abelian Model Structures and Gorenstein Homological Dimensions*. Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press. Taylor and Francis Group.
- [21] J. J. Rotman. (2009). *An Introduction to Homological Algebra*. Springer Universitext.

Certifico que el curso especializado “Métodos Homológicos en Categorías de Modelos” fue impartido por el Dr. Marco Antonio Pérez Bullones, dentro del marco de nuestro Seminario de Representaciones de Álgebras. Dicho curso fué impartido del 06 de Febrero al 24 de Junio de 2016, con una duración total de 36 horas.

Dr. Octavio Mendoza Hernández:
Investigador Titular B,
Organizador del Seminario de Representaciones de álgebras,
Instituto de Matemáticas, UNAM.
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria, C.P. 04510, México, D.F. MEXICO.
omendoza@matem.unam.mx