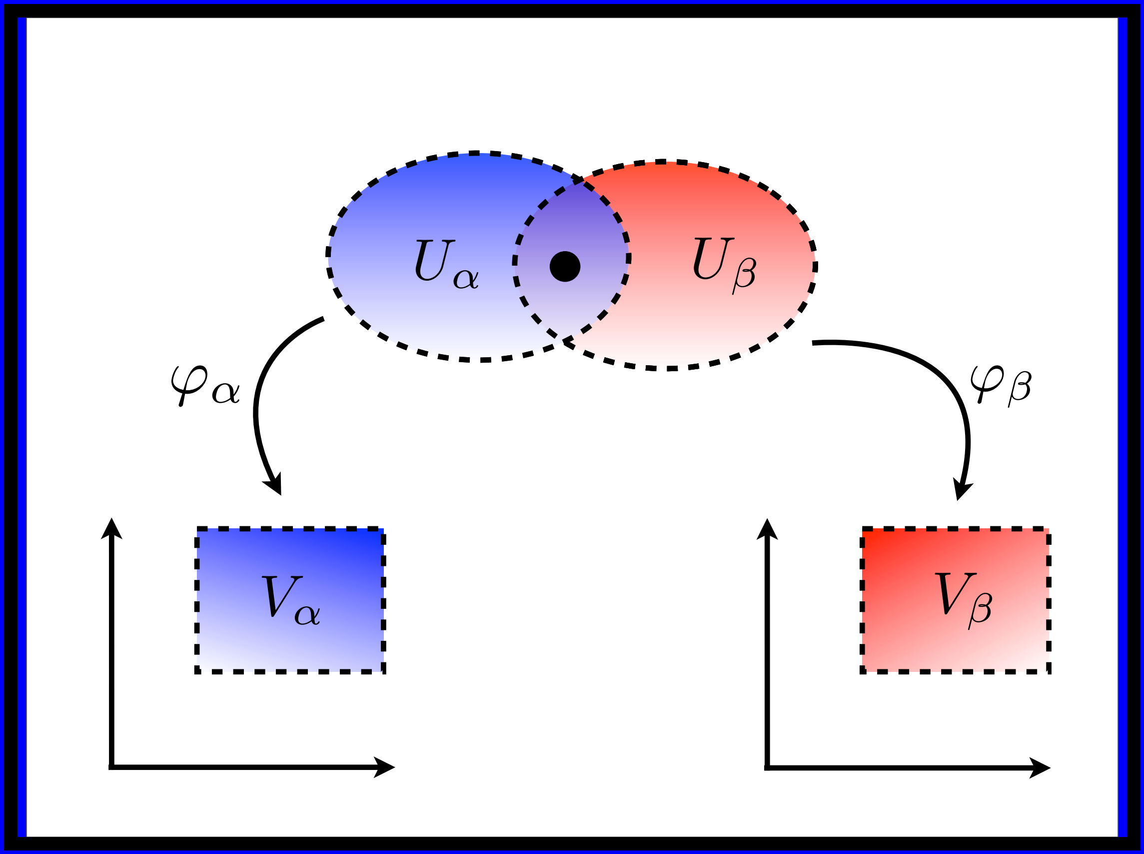
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL.
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Notes de cours



MARCO A. PÉREZ B.
Août, 2012.

Ces notes sont basées sur un cours donné par **Vestislav Apostolov** à l'Université du Québec à Montréal à l'automne 2010. Toute erreur ou omission sont la resposabilité de l'auteur.

TABLE DES MATIÉRES

CHAPITRE 1

VARIÉTÉS LISSES

1.1 Définition de variété

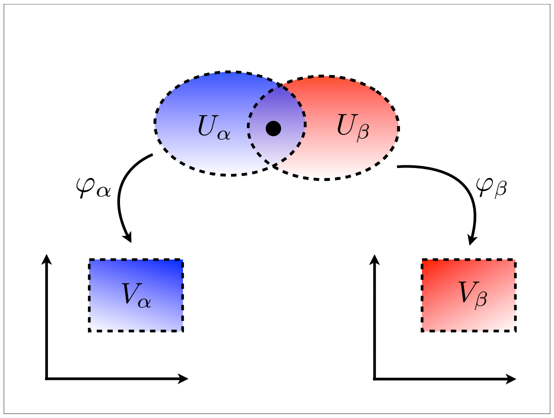
Définition 1.1.1. Soit X un ensemble. Une **carte** sur X est une paire (U, φ) d'une sous-ensemble $U \subseteq X$, et une bijection $\varphi : U \longrightarrow V = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ telle que V est un ouvert de R^n. Pour chaque $x \in U$, nous notons $x \mapsto \varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.2. Un **atlas (lisse)** de X est un recouvrement de X avec des cartes $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ tels que si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ alors la composition

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : R^{n_\alpha} \supseteq \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^{n_\beta}$$

est une application de classe C^∞ (ou lisse). Notez que

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^{n_\alpha}, \\ \varphi_\beta &: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq V_\beta \subseteq \mathbb{R}^{n_\beta}. \end{aligned}$$



Rappelons que une application $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est de classe C^∞ si toute derivée partielle de tout ordre existent et sont continue.

Remarque 1.1.1. Le deux $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ et $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ son inverses et C^∞. Alors $n_\alpha = n_\beta$, en raison de l'exercice suivant.

Exercice 1.1.1. Si $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une bijection C^∞ d'un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, alors montrer $n = m$.

Exemple 1.1.1.

(1) Pour $X = \mathbb{R}^n$, (X, Id_X) est un atlas lisse.

(2) Soit $\mathcal{A} = \{$ toutes droites affines de $\mathbb{R}^2\} = \{\ Ax + By + C = 0 :\ (A, B) \neq (0, 0)\}/\sim$, où

$$\{Ax + By + C = 0\} \sim \{A'x + B'y + C' = 0\}$$

si il existe $\lambda \neq 0$ tel que $(A, B, C) = \lambda(A', B', C')$. Nous définissons l'atlas lisse suivant sur $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_y &= \{ \text{ droites non verticales } \} = \{\ y = mx + n\ \}, \\
\mathcal{U}_x &= \{ \text{ droites non horizontales } \} = \{\ x = ly + p\ \}, \\
\varphi_y &: \mathcal{U}_y \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ donnée par } \{\ y = mx + n\ \} \mapsto (m, n), \\
\varphi_x &: \mathcal{U}_x \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ donnée par } \{\ x = ly + p\ \} \mapsto (l, p).
\end{aligned}$$

Nous avons que

$$\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \{ \text{ droites ni horizontales ni verticales } \}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\varphi_x &: \mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y \longrightarrow \{(l, p) :\ l \neq 0\} = \mathcal{V}_x \subseteq \mathbb{R}^2, \\
\varphi_y &: \mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y \longrightarrow \{(m, n) :\ m \neq 0\} = \mathcal{V}_y \subseteq \mathbb{R}^2, \\
\varphi_y \circ \varphi_x^{-1} &: \mathcal{V}_x \longrightarrow \mathcal{V}_y \\
&\quad (l, p) \mapsto \left(\frac{1}{l}, -\frac{p}{l}\right), \\
\varphi_x \circ \varphi_y^{-1} &: \mathcal{V}_y \longrightarrow \mathcal{V}_x \\
&\quad (m, n) \mapsto \left(\frac{1}{m}, -\frac{n}{m}\right).
\end{aligned}$$

(3) Soit $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cap \{\infty\}$. Soient $\mathcal{U}_0 = (\mathbb{C}\backslash\{0\}) \cup \{\infty\}$ et $\mathcal{U}_\infty = \mathbb{C}$. Soient $\varphi_\infty = \mathrm{Id}_\mathbb{C}$ et $\varphi_0 : \mathcal{U}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$\varphi_0(z) = \begin{cases} 1/z & \text{si } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \\ 0 & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Notez que $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_\infty = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\varphi_\infty \circ \varphi_0^{-1} &: (x, y) \mapsto \frac{1}{x + iy} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right), \\
\varphi_0 \circ \varphi_\infty^{-1} &: (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right).
\end{aligned}$$

(4) Soit $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Considérons la projection $p : \mathbb{R} \longrightarrow X$ ($x \mapsto [x]$). Soient $\mathcal{U}_0 = p(0, 1)$ et $\mathcal{U}_1 = p(-1/2, 1/2)$. Notez que $p|_{(0,1)}$ et $p|_{(-1/2,1/2)}$ sont bijections. Soient $\varphi_0 = (p|_{(0,1)})^{-1}$ et $\varphi_1 = (p|_{(-1/2,1/2)})^{-1}$. Notons que $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(x) = x - 1$ et $\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}(x) = x$. Nous avons que $\{(\mathcal{U}_0, \varphi_0), (\mathcal{U}_1, \varphi_1)\}$ est un atlas C^∞ sur X.

Définition 1.1.3. Deux atlas C^∞, $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ et $\mathcal{A}' = \{\mathcal{U}_i, \varphi_i : i \in I\}$ sont **équivalents** si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est un atlas C^∞, c'est-à-dire que $\varphi_\alpha \circ \varphi_i^{-1}$ et $\varphi_i \circ \varphi_\alpha^{-1}$ sont C^∞.

Exercice 1.1.2. Soit $\sim$ la relation donnée par $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont équivalents. Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Définition 1.1.4. Une **structure différentiable (lisse)** sur X est une classe d'équivalence d'atlas lisses. On peut choisir "le plus grand atlas que content un atlas $\mathcal{A}_0$", qui est donné par la réunion de tout $\mathcal{A} \in [\mathcal{A}_0]$.

RAPPEL 1.1.1 (Espace topologique)**.** Un **espace topologique** est donné par un ensemble X et une famille τ de sous-ensembles de X tels que :

(1) $\emptyset \in \tau$ et $X \in \tau$.

(2) Si $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \tau$ alors $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \tau$.

(3) Si $\mathcal{U}_\alpha \in \tau$ pour tout $\alpha \in A$ alors $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha \in \tau$.

Chaque élément $\mathcal{U} \in \tau$ est appelé un **ensemble ouvert** de X. La famille τ est une **topologie** sur X.

Une topologie par une structure différentiable sur X est donnée par la définition suivante :

$\mathcal{U} \subseteq X$ est un **ouvert** sii par tout $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}_{\max}$, l'image $\varphi_\alpha(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_\alpha)$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1.1.3. Vérifier que la définition précédente introduit une topologie sur X.

Définition 1.1.5. Un ensemble X est dit une **variété différentiable lisse (de dimension** n**)** s'il est munie d'une structure topologique induite par l'atlas maximal $\mathcal{A}_{\max}$ est :

(1) séparé,

(2) connexe, et si

(3) il existe une base topologique dénombrable (séparable).

Remarque 1.1.2.

(1) Si X est une variété différentiable de regularité C^k $(k = 1, \ldots, \infty, \omega)$ alors comme espace topologique il est paracompact (à partir de tout recouvrement ouvert il existe un sous-recouvrement localement fini), et donc il est métrisable.

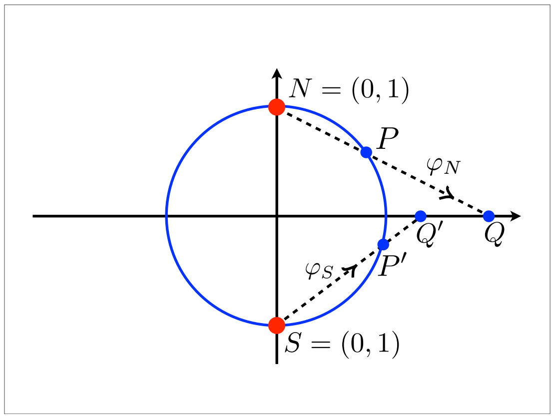
(2) **Whitney (1934) :** Si X est une variété différentiable de classe C^k, $k = 1, 2, \ldots$, alors il existe une unique structure de variété C^∞ sur X, compatible avec la structure de part.

(3) **Thèoréme :** Une variété C^0 de dimension 1, 2 ou 3 posséde une unique structure C^∞ compatible.

(4) Il existe variétés C^2 de dimension 4 qui no sont pas lisses.

(5) **Donaldson (1980's) :** Il ya d'innombrables structures lisses sur $\mathbb{R}^4$ non-équivalents.

Exemple 1.1.2. La sphère $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ est une variété lisse. Pour le case $n = 1$, on considère $\mathcal{U}_N = S^1 - N$ et $\mathcal{U}_S = S^1 - S$, où $N = (0, 1)$ et $S = (0, -1)$, avec les applications $\varphi_N : \mathcal{U}_N \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi_S : \mathcal{U}_S \longrightarrow \mathbb{R}$ données par les projections stéréographiques. Alors $\{(\mathcal{U}_N, \varphi_N), (\mathcal{U}_S, \varphi_S)\}$ est un atlas sur S^1.



Exercice 1.1.4. Vérifier directement que les projections stéréographiques définissent une structure de variété lisse sur S^n.

RAPPEL 1.1.2. Soit $F : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application C^1, le différentiel de F à x_0 est une application linéaire $(DF)_{x_0} : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

$$\lim_{h \to 0} \frac{||F(x_0 + h) - F(x_0) - (DF)_{x_0}(h)||_{\mathbb{R}^m}}{||h||_{\mathbb{R}^l}} = 0.$$

Si F est C^1 alors $\mathrm{Jac}(F) = (DF)_{x_0}$.

Théorème 1.1.1 (Théorème d'inversion locale)**.** Soit $G : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^l$ une application C^∞. Supposons que $(DG)_{x_0} : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^l$ est inversible, c'est-à-dire que $\det(DG)_{x_0} \neq 0$, alors il existent ouverts $\mathcal{U} \ni x_0$ et $\mathcal{V} \ni G(x_0)$ dans $\mathbb{R}^l$ tels que $G|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ est bijective et $(G|_{\mathcal{U}})^{-1} \in C^\infty$.

Théorème 1.1.2. Soit $F : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application lisse. Soit $c \in \mathbb{R}^m$,

$$X_c = \{(x_1, \ldots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m} : F(x_1, \ldots, x_{n+m}) = c\}.$$

Supposons que $(DF)_{x_0} : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est surjective, pour tout $x_0 \in X_c$. Alos chaque composante connexe de X_c est une variété lisse dont la topologie induite est la topologie de sous-espace sur $X_c \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

Démonstration : Considérons $x_0 \in X_c$ et le différentiel surjective $(DF)_{x_0} : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, donc $\mathrm{rang}(DF)_{x_0} = m$. Sans perte, on peut assumer que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

est inversible. Alors, l'application $G : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ donnée par $G(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = (F_1(x), \dots, F_m(x), x_{m+1}, \dots, x_{m+n})$ est localement inversible, car $(DG)_{x_0}$ est invesible, pour chaque $x_0 \in X_c$. Considérons un difféomorphisme locale $G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ avec $x_0 \in \mathcal{U}$ et $G(x_0) \in \mathcal{V}$. La restriction $\varphi_{\mathcal{U}} := G|_{\mathcal{U} \cap X_c}$ donnée par $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{n+m}) \mapsto (c_1, \dots, c_m, x_{m+1}, \dots, x_{n+m})$ définit une carte sur X_c, et la collection de toutes $\varphi_{\mathcal{U}}$ un atlas sur X_c.

$\square$

Remarque 1.1.3. La sphère S^1 est une variété lisse, car $S^1 = F^{-1}(1)$, où $F(x,y) = x^2 + y^2$. Dans ce cas, le différentiel est donné par $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ pour tout $(x,y) \in S^1$. Alors on peut, localement, exprimer $x = x(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

Exemple 1.1.3. Soit $X = O(n) = \{A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) : A^t \cdot A = \mathrm{Id}\}$. On va voir que X a une structure de variété lisse. Considérons l'application $F : \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{sym}(n, \mathbb{R})$ donnée par $A \mapsto A^t \cdot A$, où $\mathrm{sym}(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques. On a que $O(n) = F^{-1}(\mathrm{Id})$. Suffit de vérifier les hypothèses du Théorème 1.1.2: le différentiel $(DF)_A : \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{sym}(n, \mathbb{R})$ est donné par

$$B \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (F(A(t))) = B^t \cdot A + A^t \cdot B, \text{ où } B = \left.\tfrac{d}{dt}\right|_{t=0} A(t).$$

À vérifier que pour tout $A \in O(n)$, l'application $B \mapsto B^t \cdot A + A^t \cdot B$ est surjective dans l'ensemble des matrices simétriques. Soit $C \in \mathrm{sym}(n, \mathbb{R})$ et $B := \frac{A \cdot C}{2}$. On a

$$DF_A(B) = \frac{C \cdot A^t \cdot A}{2} + \frac{A^t \cdot A \cdot C}{2} = \frac{2B}{2} = B.$$

1.2 Fonctions lisses entre variétés (Fonction de plateau)

Soient X et Y des variétés lisses. Une application $F : X \longrightarrow Y$ est dit **lisse** (où C^∞) si :

(1) F est continue.

(2) Pour tout $x \in X$, pour toute carte $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ qui contient x, et pour toute carte $(\mathcal{V}_j, \psi_j)$ qui contient $F(x)$, on a que l'application $\psi_j \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est C^∞.

Exercice 1.2.1. Soit $F : X \longrightarrow Y$ une application :

(a) F est continue ssi $F^{-1}(\mathcal{V}_j)$ est ouvert dans X, pour toute carte $\mathcal{V}_j$ de Y.

(b) F satisfait (2) ssi $\psi_j \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est lisse pour un seul choix des atlas $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ et $(\mathcal{V}_j, \psi_j)$.

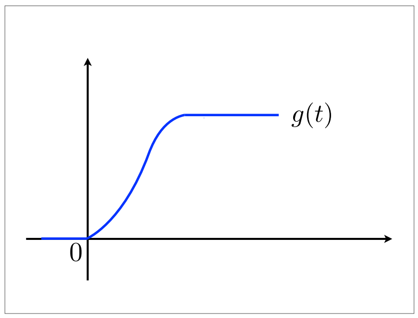
Exemple 1.2.1. Pour $Y = \mathbb{R}$, l'ensemble $C^{\infty}(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \text{ est } C^{\infty}\}$ est un espace de Frechét de dimension ∞ (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).

Proposition 1.2.1. $C^{\infty}(X)$ est de dimension ∞.

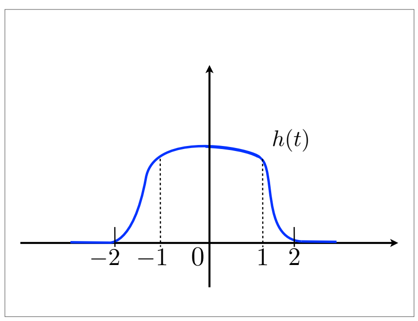
Pour prouver cette proposition, nous allons construire des fonctions de plateau.

(1) **Fait 1 :** La fonction $f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$ est C^{∞}.

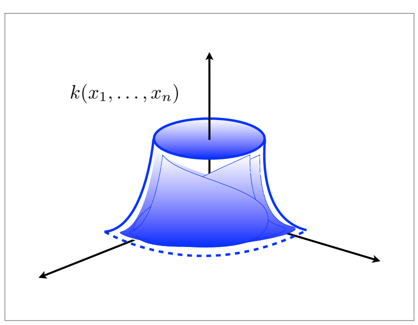
(2) **Fait 2 :** La fonction $g(t) = \frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}$ est C^{∞}.



(3) **Fait 3 :** La fonction $h(t) = g(t+2) + g(2-t)$ est C^{∞}.



(4) **Fait 4 :** La fonction $k(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1) \cdots h(x_n)$, applelé **fonction de plateau**, est C^{∞}. On a $k(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $k(x) = 0$ si $|x| \geq 2$. Le support de k, $\text{supp}(k) = \{x \in \mathbb{R}^n : k(x) \neq 0\} = \{|x| \leq 2\}$ est compact.



Démonstration de la Proposition 1.2.1 : Soit $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ une carte sur X et soit $\mathcal{U} = \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$. Sans perte, supposons que $0 \in \mathcal{U}$. Soit $l(x) = k(\epsilon^{-1}x)$. Si $|x| > 2\epsilon$ alors $l \equiv 0$. Nous définissons $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ comme

$$f(x) = \begin{cases} (l \circ \varphi_\alpha)(x) & \text{si } x \in \mathcal{U}_\alpha, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{U}_\alpha. \end{cases}$$

C'est évident que f est une fonction lisse. De plus, pour toute $\Phi \in C^\infty(\mathcal{U})$, nous définissons

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} (\Phi \cdot l) \circ \varphi_\alpha(x) & \text{si } x \in \mathcal{U}_\alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $\tilde{\Phi} = \Phi$ sur un voisinage de $\varphi_\alpha^{-1}(0)$. Nous avons que $\{\Phi_\alpha\}$ définit une base pour $C^\infty(X)$.

$\square$

Définition 1.2.1. Un difféomorphisme $F : X \longrightarrow Y$ est une application lisse et bijective telle que F^{-1} est aussi lisse. On dit que $X \cong_{\text{diff}} Y$ s'il existe un difféomorphisme.

Exercice 1.2.2.

(1) Si $X \cong_{\text{diff}} Y$ alors $\dim(X) = \dim(Y)$.

(2) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong_{\text{diff}} S^1$. Un difféomorphisme est donné par $F : x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$.

RAPPEL 1.2.1.

(1) Un **variété lisse** est un ensemble X avec une famille de sous-ensembles $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ appelé **atlas** C^∞, telle que chaque **carte** $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ fournit une bijection $\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \cong \mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$, où $n = \dim(X)$.

(2) Une application $F : X \longrightarrow Y$ est dit **lisse (où C^∞)** si étant donné deux atlas $\mathcal{A}_X = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ et $\mathcal{A}_Y = \{\mathcal{V}_i, \psi_i\}$ tels que :

  (a) $F^{-1}(V_i)$ est un ouvert de X pour chaque i.

  (b) $\psi_i \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est une application C^∞ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, pour chaque α et i.

(3) Une application $F : X^n \longrightarrow Y^m$ est un difféomorphisme si F est lisse, bijective et F^{-1} est aussi lisse (d'ici $n = m$).

(4) $C^\infty(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f \text{ est } C^\infty\}$ est un espace vectoriel de dimension infinie sur $\mathbb{R}$. E. g. les fonctions de plateau $\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ avec $\tilde{\mathcal{U}_\alpha} = \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ donnent lieu à une base, il existe

$$f_\alpha = \begin{cases} f_\alpha \equiv 1 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n, \ ||x|| \leq \epsilon, \\ f_\alpha \equiv 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n, \ ||x|| \geq 2\epsilon. \end{cases}$$

On pose $\Phi_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi_\alpha = \begin{cases} f_\alpha \circ \varphi_\alpha & \text{sur } \mathcal{U}_\alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

CHAPITRE 2

ESPACE (CO)TANGENT

2.1 Vecteurs tangents

RAPPEL 2.1.1. Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. La différentielle en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est une application linéaire $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

$$\frac{||F(x_0 + h) - F(x_0) - A(h)||_{\mathbb{R}^m}}{||h||_{\mathbb{R}^n}} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } h \longrightarrow 0.$$

Théorème 2.1.1. Si $F \in C^1$ alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la différentielle existe et $A = (DF)_{x_0}$ est representée par $\mathrm{Jac}(F)$, où

$$\mathrm{Jac}(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Définition 2.1.1. Considérons l'espace $C^\infty(X)$ et $a \in X$. On dit que $(DF)_a = 0$ si pour toute carte $(\mathcal{U}, \varphi)$ telle que $a \in \mathcal{U}$, la différentielle $D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(a)}$ est zéro.

Si $(\mathcal{U}_\alpha)$ et $(\mathcal{U}_\beta, \varphi_\beta)$ sont deux cartes que contiennent a, alors pour $g := f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ et $h := f \circ \varphi_\beta^{-1}$ nous avons $g = f \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = h \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$. Donc

$$\mathrm{Jac}(g)|_{\varphi_\alpha(a)} = \mathrm{Jac}(h)|_{\varphi_\beta(a)} \circ (\mathrm{Jac}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}))_{\varphi_\alpha(a)}.$$

Ensuit, $\mathrm{Jac}(g) = 0$ ssi $\mathrm{Jac}(h) = 0$, car $\mathrm{Jac}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$ est non-dégénerée.

Soit $Z_a := \{f \in C^\infty(X) : (Df)_a = 0\}$. Notez que Z_a est un sous-espace vectoriel réel de $C^\infty(X)$. L'espace quotient $T_a^*(X) := C^\infty(X)/Z_a$ s'appelle **l'espace cotangent de X à a.**

Remarque 2.1.1. Z_a est définie à partir des fonctions locales autour de a.

Proposition 2.1.1.

(1) $T_a^*(X)$ est une espace vectoriel dont $\dim(T_a^*(X)) = \dim(X)$.

(2) Si $(\mathcal{U}, \varphi)$ est une carte autour de $a \in X$ avec coordonées $(x_1, \ldots, x_n)$ $(x_i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R})$, alors $\{(dx_1)_a, (dx_2)_a, \ldots, (dx_n)_a\}$, où $(dx_i)_a$ est la classe de x_i, forment une base de $T_a^*(X)$.

(3) Si $f \in C^\infty(X)$ et $\Phi := f \circ \varphi^{-1}$, alos

$$(df)_a = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)(\varphi(a)) \cdot (dx_i)_a := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) \cdot (dx_i)_a.$$

Démonstration : Nous considérons la fonction lisse $f - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)(\varphi(a)) \cdot x_i$ défini sur $\mathcal{U}$ (en utilisant une fonction de plateau sur $C^\infty(X)$). À vérifier que $D\left(f - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)(\varphi(a)) \cdot x_i\right) = 0$:

$$\begin{aligned}\left(f - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)(\varphi(a)) \cdot x_i\right) \circ \varphi^{-1} &= f \circ \varphi^{-1} - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)(\varphi(a)) \cdot x_i \circ \varphi^{-1} \\ &= \Phi(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\varphi(a)) \cdot x_i.\end{aligned}$$

Alors $\mathrm{Jac}\left(\Phi - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\varphi(a)) \cdot x_i\right) = 0$. Donc

$$(Df)_a \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(\varphi(a)) \cdot (dx_i)_a =_{\text{classe}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot (dx_i)_a.$$

De plus $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot (dx_i)_a = 0$ ssi $\mathrm{Jac}(\sum \lambda_i x_i) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$.

$\square$

Remarque 2.1.2. Si $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha = (x_1, \ldots, x_n))$ et $(\mathcal{U}_\beta, \varphi_\beta = (y_1, \ldots, y_n))$ sont deux cartes avec $a \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, alors

$$(df)_a = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) \cdot (dx_i)_a = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)(a) \cdot (dx_i)_a.$$

On regarde $y_j = y_j(x_1, \ldots, x_n)$. On a

$$(df)_a = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(dx_i)_a, \text{ où } \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j} \frac{\partial f}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

Le formalisme permet de faire de calculs.

Définition 2.1.2. Soit $f \in C^\infty(X)$, la classe $[f] \in C^\infty(X)/Z_a$ s'appelle la **différentielle** de f en a $((Df)_a = (df)_a)$.

Définition 2.1.3. **L'espace tangent** de X en $a \in X$ est défini par $T_a(X) := (T_a^*(X))^*$.

RAPPEL 2.1.2. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. L'ensemble

$$V^* := \{l : V \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ l \text{ est linéaire}\}$$

est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de V, alors $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$, où $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$, est une base de V^*, et elle s'appelle **base duale** de V^*. Il existe un isomorphisme canonique $(V^*)^* \cong V$ donné par une application linéaire $\epsilon : V \longrightarrow (V^*)^*$ définie comme $v \mapsto (l \mapsto l(v))$.

Définition 2.1.4. Soit X une variété lisse. Un **vecteur tangent** à $a \in X$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathcal{X}_a : C^\infty(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{X}_a(f \cdot g) = f(a) \cdot \mathcal{X}_a(g) + g(a) \cdot \mathcal{X}_a(f).$$

Remarque 2.1.3. L'ensemble des vecteurs tangents et un espace vectoriel et nous allons montrer que

$$T_a(X) \cong \{ \text{ vecteurs tangents } \}.$$

Exemple 2.1.1. Soit $X = \mathbb{R}^n$. Nous considérons un vecteur $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Soit

$$L_v = v_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Alors $\mathcal{X}_v : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\mathcal{X}_v(f) := L_v(f)|_{x=0}$ définit un vecteur tangent en $0 \in \mathbb{R}^n$. Notez que $X_v(f) = \frac{d}{dt} f(tv)$.

Soit $\zeta \in (T_a^*(X))^*$ et $\mathcal{X}_\zeta : f \mapsto \zeta((df)_a) \in \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{X}_\zeta : C^\infty(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_\zeta(f \cdot g) &= \zeta((d(f \cdot f))_a), \\
d(f \cdot g)_a &= \sum_i \frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_i}(a) \cdot dx_i = g(a) \cdot (df)_a + \cdots + f(a) \cdot (dg)_a.
\end{aligned}$$

Alors $X_\zeta(f \cdot g) = f(a) \cdot \mathcal{X}_\zeta(g) + g(a) \cdot \mathcal{X}_\zeta(f)$. Nous avons une application $(T_a^*(X))^* \ni \zeta \mapsto \mathcal{X}_\zeta \in \{ \text{ vecteurs tangents } \}$. Pour construire l'application inverse, il nous faut :

Lemme 2.1.1. Soit $\mathcal{X}_a$ un vecteur tangent et $f \in C^\infty(X)$ avec $(df)_a = 0$, alors $\mathcal{X}_a(f) = 0$.

Démonstration : Soit $(\mathcal{U}, \varphi)$ une carte avec coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, i.e. $f(x_1, \ldots, x_n) = f \circ \varphi^{-1}$ (abuse de notation). On a

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 \frac{df}{dt}(a + t(x-1))dt = \sum_i (x_i - a_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x_i - a_i))dt.$$

Si $g_i = x_i - a_i$ et $h_i = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x_i - a_i))dt$ alors $g_i(a) = h_i(a) = 0$. Nous avons

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \cdot h_i(x), \text{ où } g_i(a) = h_i(a) = 0.$$

De plus, $\mathcal{X}_a(1) = \mathcal{X}_a(1 \cdot 1) = 1 \cdot \mathcal{X}_a(1) + 1 \cdot \mathcal{X}_a(1)$. Donc $\mathcal{X}_a(1) = 0$. Ensuit $\mathcal{X}_a(\text{const.}) = 0$. Par conséquent

$$\mathcal{X}_a(f) = \mathcal{X}_a(f(a)) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_a(g_i \cdot h_i) = 0 + 0 = 0.$$

$\square$

Conclusion : $T_a(X) \cong (T_a^*(X))^* = \{$ vecteurs tangents en $a \in X$ $\}$.

Si $(\mathcal{U}, \varphi)$ est une carte avec $a \in \mathcal{U}$, considérons la base $\{(dx_1)_a, \ldots, (dx_n)_a\}$ de $T_a^*(X)$. On a $(df)_a = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot (dx_i)_a$. Soit $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_a \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a \right\}$ la base duale. Donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a (dx_j) = \delta_{ij} \Longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a (f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a).$$

En fait, $\mathcal{X}_\zeta(f) = \zeta(df_a) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a (dx_j) = \delta_{ij}$, pour $\zeta = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a$ et $f = x_j$. Par conséquent $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a (f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

2.2 Différentielle d'une application lisse

Soit $F : X \longrightarrow Y$ une application C^∞ et $a \in X$. L'application linéaire $(DF)_a : T_a(X) \longrightarrow T_{F(a)}(Y)$ définie par

$$(DF)_a(\mathcal{X}_a)[f] := \mathcal{X}_a(f \circ F), \text{ où } f \in C^\infty(Y)$$

s'appelle la **différentielle** de F.

Lemme 2.2.1. Pour tout $f \in C^\infty(Y)$, on a

$$(DF)_a \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_a \right) (f) = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right)(a) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{F(a)} [f].$$

L'application $(DF)_a$ est representée localement par $\text{Jac}(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$.

Théorème 2.2.1. Soit $F : X \longrightarrow Y$ une application C^∞ et $c \in Y$. Admettons hors que pour tout $a \in F^{-1}(c)$, $(DF)_a$ est surjective. Alors chaque composante connexe de $F^{-1}(c)$ est une variété lisse de dimension $\dim(X) - \dim(Y)$ et avec la topologie induite par X.

Définition 2.2.1. Un variété $i : M \subseteq X$ est une **sous-variété plongée** si :

(1) i est lisse,

(2) $(Di)_a$ est injective pout tout $a \in M$, et

(3) la topologie de M est la topologie induite.

Exercice 2.2.1. Montrer que $i(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$, avec $t \in (-1, \infty)$, n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.2.2. Vérifier que le théorème précédent définit une sous-variété.

Définition 2.2.2. Un **plongement** (ou une **sous-variété parametrisée**) est donné par une application $F : M \longrightarrow_{C^\infty} X$ telle que :

(1) F est injective.

(2) $(DF)_a$ est injective, pour tout $a \in M$.

Exercice 2.2.3. Un plongement $F : M \longrightarrow X$ définit une sous-variété $F(M)$ ssi $F(M) \subseteq X$ est fermé.

Définition 2.2.3. Une application $F : M \longrightarrow_{C^\infty} X$ est une **immersion** si pour tout $a \in M$, $(DF)_a$ est injective.

Exercice 2.2.4. Une application $F : X \longrightarrow Y$ est un difféomorphisme ssi F est bijective et lisse.

Théorème 2.2.2 (Withney, 1939)**.** Toute variété C^∞ de dimension n peut être réalisée comme une sous-variété plongée dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ et peut être immersée dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Théorème 2.2.3 (Gruvert)**.** Tout variété C^ω peut être réalissée comme une sous-variété C^ω de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 2.2.4 (faible Withney)**.** Tout variété C^∞ compacte peut être plongée dans $\mathbb{R}^N$ pour $N > \dim(X)$.

Lemme 2.2.2 (Partition d'unité)**.** Soit X une variété lisse. Alors il existe un recouvrement de X par des ensembles ouverts $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ qui est localement fini, et des fonctions $f_\alpha : X \longrightarrow_{C^\infty} [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ telles que :

(1) $\overline{\mathcal{U}_\alpha} \subseteq X$ est compacte.

(2) $\mathrm{supp}(f_\alpha) = \overline{\{x \in X : f_\alpha(x) \neq 0\}} \subseteq \mathcal{U}_\alpha$.

(3) Pour tout $a \in X$: $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(a) = 1$.

RAPPEL 2.2.1 (Topologie).

(1) Si X est une variété lisse alors la topologie est séparée, avec base dénombrable et localement métrisable. Ensuit X est métrisable. Par conséquent, à partir de tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}_i$ on peut choisir $\mathcal{U}_\alpha$ qui est localement fini.

(2) Si X est localement compact alors à partir d'un recouvrement $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ on peut trouver $\mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\alpha$, où $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert et $\overline{\mathcal{V}_\alpha} \subseteq X$ est compact.

Conclusion : À partir d'un recouvrement ouvert $\{\mathcal{U}_i\}$ de X on peut se ramener à un sous-recouvrement $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ avec $\overline{\mathcal{U}_\alpha} \subseteq X$ compacte.

Démonstration du Lemme de la Partition d'unité :
Étape 1 : Soit $K \subseteq X$ et $K \subseteq \mathcal{U} \subseteq X$, où $\mathcal{U}$ est ouvert. Alors il existe $f \in C^\infty(X)$ telle que :

(1) $f(b) \geq 0$, pour tout $b \in X$.

(2) $f(a) > 1$, pour tout $a \in K$.

(3) $f(b) = 0$, pour tout $b \in X \backslash \mathcal{U}$.

Pour $a \in K$, soit $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{U}_a \ni a$ avec une fonction de plateau $f_a \in C^\infty(X)$: $f_a \equiv 1$ autour de a, $f \equiv 0$ hors de $\mathcal{U}_a$. Soit $\mathcal{W}_a = \{x \in X : f_a(x) < 1/2\} \subseteq \mathcal{U}_a \subseteq \mathcal{U}$. On a que $\{\mathcal{W}_a : a \in K\}$ est un recouvrement ouvert de K. Comme K est compact, on peut choisir $a_1, \ldots, a_k$ tels que $\mathcal{U} \supseteq W_{a_1} \cup \cdots \cup \mathcal{W}_{a_k} \supseteq K$. Posons $f := f_{a_1} + \cdots + f_{a_k}$. Sur K on a $f > 1$, et sur $X \backslash \mathcal{U}$ on a $f \equiv 0$.

Étape 2 : Par des rappels, sans perte de généralité, on prend un recouvrement $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha \in A\}$ localement finie avec $\overline{\mathcal{V}_\alpha} \subseteq X$ (compact) et $\overline{\mathcal{V}_\alpha} \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ (car X est métrisable). Par l'étape 1, il existe $\Phi_\alpha \in C^\infty(X)$ telle que $\Phi_\alpha > 0$ sur $\mathcal{V}_\alpha$, $\Phi_\alpha \equiv 0$ sur $X \backslash \mathcal{V}_\alpha$. Alors $\mathrm{supp}(\Phi_\alpha) \subseteq \mathcal{U}_\alpha$. Il suffit de poser $f_\alpha := \frac{\Phi_\alpha}{\sum_{\alpha \in A} \Phi_\alpha}$ pour définir une partition d'unité.

□

Démonstration du Théorème faible de Withney : Soit X une variété compacte et $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i=1,\ldots,p}$ un recouvrement par des cartes. Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une partition d'unité associée . Posons $\Phi_i : X \longrightarrow_{C^\infty} \mathbb{R}^n$ comme

$$\Phi_i := \begin{cases} f_i \circ \varphi_i & \text{sur } \mathcal{U}_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^{n \cdot p + p}$ l'application

$$a \mapsto (\Phi_1(a), \ldots, \Phi_p(a), f_1(a), \ldots, f_p(a)).$$

Nous montrons que Φ est injective : Supposons que $\Phi(a) = \Phi(b)$. Nous savons que $\sum_{j=1}^{p} f_j(a) = 1$. Sans perte, supposons $f_1(a) \neq 0$. Alors $a \in \mathcal{U}_1$. Car $\Phi(a) = \Phi(b)$, nous avons $f_1(b) = f_1(a) \neq 0$ et donc $b \in \mathcal{U}_1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\Phi(a)_1 = \Phi_1(b) &\Longleftrightarrow f_1(a) \cdot \varphi_1(a) = f_1(b) \cdot \varphi_1(b)\\ &\Longleftrightarrow \varphi_1(a) = \varphi_1(b)\\ &\Longleftrightarrow a = b, \text{ car } \varphi_1 \text{ est injective.}\end{aligned}$$

□

Exercice 2.2.5. Finir la vérification que $\mathrm{rg}(D_a\Phi) = n$.

RAPPEL 2.2.2. Soit X une variété lisse :

(1) $T_a(X) = \{$ vecteurs tangents $\}$, où $v_a \in T_a(X)$ si $v_a : C^\infty(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire telle que pour toute $f, g \in C^\infty(X)$:

$$v_a(f \cdot g) = f(a) \cdot v_a(g) + g(a) \cdot v_a(f).$$

D'otre part, $T_a(X) = C^\infty(X)/Z_a(X)$, et $T_a(X) \cong (T_a^*(X))^*$.

Soit $(\mathcal{U}, \varphi)$ une carte, $a \in \mathcal{U}$, et $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées euclidiennes. Alors $\{(dx_1)_a, \ldots, (dx_n)_a\}$ est une base de $T_a^*(X)$, et $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a\right\}$ est la base duale de $T_a(X)$. Nous avons

$$\begin{aligned}v_a &= v_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a + \cdots + v_n \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a\\ v_a(f) &= \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a), \text{ où } \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})\right)(\varphi(a)).\\ (df)_a &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) \cdot (dx_i)_a.\end{aligned}$$

(2) **Théorème de plongement de Whitney :** Toute variété lisse X dimension n peut être plongée dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.

2.3 L'espace tangent comme l'espace de vitesses des courbes

Une application C^∞ $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow X$ est dite une **courbe**. Admettons $\gamma(0) = a$. Soit $v_\gamma \in T_a(X)$ le vecteur tangent definite par

$$v_\gamma(f) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma), \text{ où } f \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est } C^\infty.$$

Exercice 2.3.1. Vérifier que $v_\gamma \in T_a(X)$.

Soit $(\mathcal{U}, \varphi)$ une carte autour de a. Alors $v_\gamma = v_1 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a + \cdots + v_n \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a$. Trouvons v_j : nous avons $\varphi \circ \gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, alors

$$v_\gamma(f) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \dot{x}_i(a).$$

Si $f \equiv x_i$ alors $v_\gamma(x_i) = \dot{x}_i(0) = v_i$.

Conclusion : Dans une carte, $v_\gamma = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a$.

Lemme 2.3.1. $v_\gamma = v_{\tilde{\gamma}}$ ssi :

(1) $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$, et

(2) pour toute carte : $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} (\varphi \circ \gamma) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} (\varphi \circ \tilde{\gamma})$.

RAPPEL 2.3.1. Si $F : X \longrightarrow Y$ est une application C^∞, la différentielle de F à a est une application linéaire $(DF)_a : T_a(X) \longrightarrow T_{F(a)}(Y)$ telle que par toute $g \in C^\infty(Y)$, on a : $(DF)_a(v)[g] = v[g \circ F] \in C^\infty(X)$. Rappelez que F est un plongement si :

(1) F est injective.

(2) $(DF)_a$ est injective pour tout $a \in X$.

Exercice 2.3.2. Montrer que F est un difféomorphisme si :

(1) F est bijective.

(2) $(DF)_a$ est bijective pour tout $a \in X$.

Exemple 2.3.1.

(1) **L'sphère de Riemann :** $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est une variété lisse, avec l'atlas $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_0, \varphi_0), (\mathcal{U}_\infty, \varphi_\infty)\}$, où $\mathcal{U}_0 = \overline{\mathbb{C}} \backslash \{\infty\}$, $\mathcal{U}_\infty = \overline{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$, $\varphi_0(z) = z$ et

$$\varphi_\infty(z) = \begin{cases} 1/z & \text{si } z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{C} \backslash \{0\}, \\ 0 & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Montrons que il existe un difféomorphisme $F : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2$. En particulier, le difféomorphisme F est aussi un plongement $\overline{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

Un atlas sur S^2 est donné par $\mathcal{U}_N = S^2\backslash\{N\}$, $\mathcal{U}_S = S^2\backslash\{S\}$, et les bijections :

$$\begin{aligned}\varphi_N : \mathcal{U}_N &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (x_1,x_2,x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right),\\ \varphi_S : \mathcal{U}_S &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (x_1,x_2,x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}\right).\end{aligned}$$

Sur $\mathcal{U}_0 \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, soit $F_0 : \mathcal{U}_0 \longrightarrow S^2$ l'application $z \mapsto \varphi_N^{-1}(\overline{z})$. Sur $\mathcal{U}_\infty \subseteq \overline{\mathcal{C}}$, nous considérons $F_\infty : \mathcal{U}_\infty \longrightarrow S^2$ donnée par $\varphi_\infty^{-1}(w) \mapsto \varphi_S^{-1}(\overline{w})$. Notez que F_0 et F_∞ sont des applications C^∞, car $\varphi_N \circ F_0 \circ \varphi_0^{-1} : z \mapsto \overline{z}$ et $\varphi_S \circ F_\infty \circ \varphi_\infty^{-1} : w \mapsto \overline{w}$ sont lisses et bijectives aver inverse lisse. À montrer que $F_0|_{\mathcal{U}_0\cap\mathcal{U}_\infty} \equiv F_\infty|_{\mathcal{U}_0\cap\mathcal{U}_\infty}$. Ensuite, F_0 et F_∞ définissent un difféomorphisme entre $\overline{\mathbb{C}}$ et S^2.

(2) **Espaces projectifs :** Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ de dimension $n+1$. Soit $P(V)$ l'ensemble de toutes droites de V qui passent par l'origine. Rappelez que $V^* = \{l : V \longrightarrow \mathbb{K} \ / \ l \text{ est } \mathbb{K}\text{-linéaire}\}$. Si $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de V, soit $\{e_0^*, e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la base duale. Pour tout $v \in V$, $v \neq 0$, d 'efinisons $l_v := \{tv : t \in \mathbb{R}\}$ (droite qui passe par $0 \in V$). Considérons la relation d'équivalence $l_v = l_{\tilde{v}}$ ssi $v = \lambda\tilde{v}$, pour $\lambda \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$. L'ensemble $P(V) = \{v \in V : v \neq 0\}/\sim$ est un espace topologique muni de la topologie quotient. À partir d'une base $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ de V, soit :

$$\mathcal{U}_i := \{v = (x_0, x_1, \ldots, x_n) : x_i \neq 0\}/\sim$$

et φ_i l'application

$$\varphi_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Chaque composition

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \mapsto [\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_n] \mapsto \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_j}, \ldots, \frac{1}{\zeta_j}, \ldots, \frac{\zeta_n}{\zeta_j}\right)$$

est lisse sur $\varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$. La famille $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$ est un atlas lisse sur $P(V)$.

Exercice 2.3.3.

(1) $\mathbb{C} \cong \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \cong_{\text{diff}} S^2$.

(2) $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{RP}^2$ n'est peux pas être plongée dans $\mathbb{R}^3$.

CHAPITRE 3

CHAMPS DE VECTEURS

3.1 Champs de vecteurs et fibrés tangents

Soit X une variété lisse. Considérons l'union disjointe suivante :

$$T(X) := \bigcup_{a \in X} T_a(X) = \{(a, v) : v \in T_a(X)\}.$$

Nous allons définir une structure différentiable sur $T(X)$. Soit $(\mathcal{U}, \varphi)$ une carte de X dans un atlas maximal $\mathcal{A}_{\max}$. À construire $(\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n, \Phi)$ une carte de $T(X)$, (donc $\dim(T(X)) = 2n$ si $\dim(X) = n$). Soit $\widehat{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$ et soient $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées euclidiennes associées à $(\mathcal{U}, \varphi)$. Pour chaque $a \in \mathcal{U}$, nous avons la base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a\right\}$ de $T_a(X)$. Soit $(a, v) \in \bigcup_{a \in \mathcal{U}} T_a(\mathcal{U})$ et définissons l'application $\Phi : \widehat{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ comme

$$\Phi(a, v) := (x_1(a), \ldots, x_n(a), \zeta_1(a), \ldots, \zeta_n(a)), \text{ où } v = \sum_{i=1}^n \zeta_i(a) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a.$$

Si $a \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, avec $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha), (\mathcal{U}_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}_{\max}$, alors $\Phi_\alpha(\widehat{\mathcal{U}_\alpha} \cap \widehat{\mathcal{U}_\beta}) \cong \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{R}^n$, et

$$\begin{aligned} \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \varphi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{R}^n \\ (x, \zeta_1, \ldots, \zeta) &\mapsto ((\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x), \eta_1, \ldots, \eta_n). \end{aligned}$$

RAPPEL 3.1.1. $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a = \sum_j \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_a$, où $\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) = (\mathrm{Jac}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}))_{ij}$.

Alors $\eta_j = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) \cdot \zeta_i$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \mathrm{Jac}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$.

Notez que $A_{\alpha\beta}(x) := \mathrm{Jac}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Nous avons une application $A_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \longrightarrow \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ et $A_{\alpha\beta} \in C^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta, \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}))$. De plus, $\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(x, \zeta) = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x), A_{\alpha\beta}(x) \cdot \zeta)$, où $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est un difféomorphisme. Donc $A_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ sont lisses et par conséquent $\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}$ sont lisses.

Exercice 3.1.1. Prouver que $T(X)$ est séparé et avec une base dénombrable.

Définition 3.1.1. La variété lisse $T(X)$ est appélée le **fibré tangent** de X.

Proposition 3.1.1 (Propriétés immediates)**.**

(1) L'application $p : T(X) \longrightarrow X$ donnée par $p(a, v) = a$ est C^∞, et $(Dp)_a$ est surjective pour chaque $a \in X$.

(2) $p^{-1}(a) = T_a(X) \cong \mathbb{R}^n$.

(3) Il existe un atlas $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ sur X et des applications $h_\alpha : \Phi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \cong_{\text{diff}} \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n$ telles que :

   (a) $h_\alpha|_{p^{-1}(a)} : T_a(X) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire.

   (b) $H_{\alpha\beta} := h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{R}^n$ est dans la form $H_{\alpha\beta}(a, v) = (a, A_{\alpha\beta}(a) \cdot v)$. De plus,

   - $H_{\alpha\alpha} = \text{id}$,
   - $H_{\beta\alpha} = H_{\alpha\beta}^{-1}$, et
   - $H_{\alpha\beta} \circ H_{\beta\gamma} \circ H_{\gamma\alpha} = \text{id}$.

3.2 Fibrés vectoriels

Définition 3.2.1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Un **fibré vectoriel** de rang r sur X est une variété lisse E muni d'une submersion lisse $p : E \longrightarrow X$, c'est-à-dire $(Dp)_a$ est surjective pour tout $a \in X$, telle que :

(1) Pour tout $a \in X$, $p^{-1}(a) = E_a \cong \mathbb{K}^r$, et E_a est un espace vectoriel.

(2) Il existe un atlas $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de X et des difféomorphismes $h_\alpha : p^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \cong \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{K}^r$, appelé **trivialization locale**, tels que

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta} := h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{K}^r &\longrightarrow (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{K}^r \\ (a, v) &\mapsto (a, A_{\alpha\beta}(a) \cdot v) \end{aligned}$$

   et les $A_{\alpha\beta}$ satisfont :

   - $H_{\alpha\alpha} = \text{id}$,
   - $H_{\beta\alpha} = H_{\alpha\beta}^{-1}$, et
   - $H_{\alpha\beta} \circ H_{\beta\gamma} \circ H_{\gamma\alpha} = \text{id}$.

Proposition 3.2.1. Soit $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ et $H_{\alpha\beta} \in C^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta, \text{Gl}(r, \mathbb{K}))$ donnés sur X. Alors l'ensemble

$$E = \bigcup_\alpha \{\mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^r\} / \sim,$$

avec la relation $(a, v) \sim (b, w)$ ssi $a = b$ et $w = H_{\alpha\beta} v$ pour $a \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, est un fibré sur X.

Définition 3.2.2. Un **champ de vecteurs lisse** est une application $v : X \longrightarrow T(X)$ qui est C^∞, telle que $p \circ V = \mathrm{id}$.

Définition 3.2.3. Soit $p : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel C^∞. Une **section lisse** de p est une application $s : X \longrightarrow E$ qui est C^∞ et $p \circ s = \mathrm{id}$.

Exemple 3.2.1. Soit X une variété lisse et $E = X \times \mathbb{R}$. Posons $\mathcal{U} = X$ et $H_{\alpha\beta} = \mathrm{id}$. La projection $p : E \longrightarrow X$ est appelée le **fibré triviale**. L'application $s : X \longrightarrow X \times \mathbb{R}$ donnée par $a \mapsto (a, f(a))$ est une section de p si $f \in C^\infty(X)$.

Notons par $C^\infty(X, E)$ l'ensemble des sections lisses de $p : E \longrightarrow X$. Par exemple, $C^\infty(X, X \times \mathbb{R}) = C^\infty(X, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions lisses.

Proposition 3.2.2. L'ensemble $C^\infty(X, E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension ∞.

Démonstration :

(1) Soient $s_1, s_2 \in C^\infty(X, E)$. Alors pour tout $a \in X$, on a $s_i(a) \in p^{-1}(a) = E_a$, où $i = 1, 2$. Nous définissons $(s_1 + s_2)(a) := s_1(a) + s_2(a) \in E_a$.

(2) Soit $(\mathcal{U}_\alpha, h_\alpha)$ une trivialization locale, $h_\alpha : p^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \cong_{\text{diff}} \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{K}^r$. Une application s_α est une section lisse sur $p^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ ssi $C^\infty(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{K}^r) \cong C^\infty(\mathcal{U}_\alpha, \mathbb{K}^r)$. Pout toute telle section s_α, on la multiplie par une function de plateau f_α, et $f_\alpha \cdot s_\alpha \in C^\infty(X, E)$.

$\square$

3.3 Crochet de Lie

Nous notons $\mathfrak{X}(X) = C^\infty(X, T(X)) = \{$ champs de vecteurs lisses $\}$. Soit $V \in \mathfrak{X}(X)$. Si $f \in C^\infty(X)$, alors $V(f)(a) = V_a(f)$, où $V(f) : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Lemme 3.3.1. L'application $V : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$ donnée par $f \mapsto V(f)$ est $\mathbb{R}$-linéaire et vérifie $v(f \cdot g) = f \cdot V(g) + g \cdot V(f)$.

Démonstration : Soit $(\mathcal{U}, \varphi)$ une carte et $a \in \mathcal{U}$. On a

$$V_a = \zeta_1(a) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a + \cdots + \zeta_n(a) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a \text{ où } \zeta_i(a) \in C^\infty(\mathcal{U}).$$

Donc

$$V(f)(a) = V_a(f) = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j(a) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a).$$

Par conséquent, $f \in C^\infty \implies V(f)$ est lisse.

$\square$

Lemme 3.3.2. Toute application $v : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$ qui est $\mathbb{R}$-linéaire et vérifie

$$v(f \cdot g) = f \cdot v(g) + g \cdot v(f)$$

définie un champ de vecteurs lisse.

Démonstration : Nous définissons un champ de vecteurs V par $V_a(f) = v(f)(a)$. C'est évident que $V_a \in T_a(X)$. Soit $(\mathcal{U}, \varphi)$ une carte et $a \in \mathcal{U}$. Considérons les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ de φ. Nous avons la base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a\right\}$ de $T_a(X)$. Alors

$$V_a = \zeta_1(a) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a + \cdots + \zeta_n(a) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a.$$

Comme $C^\infty(\mathcal{U}) \ni v(x_i)(a) = V_a(x_i) = \zeta_i(a)$, nous avons que $a \mapsto (a, V_a)$ est C^∞ et donc une section lisse.

$\square$

Lemme 3.3.3. Por tout $V, U\mathfrak{X}(X)$,

$$[V, U] := V(U(f)) - U(V(f))$$

est un champ de vecteurs.

Démonstration : $[V, U] : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$ est $\mathbb{R}$-linéaire. À vérifier :

$$[V, U](f \cdot g) = f \cdot [V, U](g) + g \cdot [V, U](f).$$

Nous allons travailler sur une carte $\mathcal{U}$:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \ V = \sum_{j=1}^{n} V_j(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}, \text{ où } U_i, V_j \in C^\infty(\mathcal{U}).$$

$$\begin{aligned} V \circ U(f) - U \circ V(f) &= \sum_{j=1}^{n} V_j(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} U_i(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) - \sum_{i=1}^{n} U_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} V_j(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right) \\ &= \sum A_k(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \text{ est } C^\infty. \end{aligned}$$

Soit $f, g \in C^{\infty}(X)$:

$$\begin{aligned}
[V,U](f\cdot g) &= V(U(f\cdot g)) - U(V(f\cdot g))\\
&= V(f\cdot U(g) + g\cdot U(f)) - U(f\cdot V(g) + g\cdot V(f))\\
&= V(f\cdot U(g)) + V(g\cdot U(f)) - U(f\cdot V(g)) - U(g\cdot V(f))\\
&= f\cdot V(U(g)) + V(f)\cdot U(g) + g\cdot V(U(f)) + U(f)\cdot V(g)\\
&\quad - f\cdot U(V(g)) - U(f)\cdot V(g) - g\cdot U(V(f)) - V(f)\cdot U(g)\\
&= f\cdot (V(U(g)) - U(V(g))) + g\cdot (V(U(f)) - U(V(f)))\\
&= f\cdot [V,U](g) + g\cdot [V,U](f).
\end{aligned}$$

□

Définition 3.3.1. Le champ de vecteurs $[V,U]$ est appelé le **Crochet de Lie** de U et V.

Exercice 3.3.1. Vérifier **l'Identité de Jacobi** :

$$[U,[V,W]] + [V,[W,U]] + [W,[U,V]] = 0.$$

Conclusion : Le crochet de Lie $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}(X)\times\mathfrak{X}(X) \longrightarrow \mathfrak{X}(X)$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire, anti-symétrique et vérifie l'identité de Jacobi. Alors $\mathfrak{X}(X)$ est une **algèbre de Lie**.

3.4 Fibrés cotangents

Soit X une variété lisse. Pour chaque carte $(\mathcal{U},\varphi)$ avec coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$, nous avons la base $\{(dx_1)_a,\ldots,(dx_n)_a\}$ de $T_a^*(X)$. Soit

$$T^*(X) := \bigcup_{a\in X} T_a^*(X) = \{(a,v)\,:\, v\in T_a^*(X)\}.$$

L'ensemble $T^*(X)$ est une variété lisse et la projection $p : T^*(X) \longrightarrow X$ définit un fibré réel de rang n sur X, et

$$H^*_{\alpha\beta} = (\mathrm{Jac}(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})^{-1})^t(\varphi_\alpha(a)).$$

Autrement dit, $H^*_{\alpha\beta} = (H^t_{\alpha\beta})^{-1}$.

RAPPEL 3.4.1. Soit V un espace vectoriel et $T : \{e_1,\ldots,e_n\} \longrightarrow \{\tilde{e_1},\ldots,\tilde{e_n}\}$ dans $\mathrm{Gl}(V)$. Alors $T^* : \{e_1^*,\ldots,e_n^*\} \longrightarrow \{\tilde{e_1}^*,\ldots,\tilde{e_n}^*\}$ est dans $\mathrm{Gl}(V^*)$.

Exercice 3.4.1. $T^* = (T^t)^{-1}$.

Définition 3.4.1. Soit $p : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel de rang r et $H_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \longrightarrow \mathrm{Gl}(r, \mathbb{K})$ donnés par une trivialization. Alors le **fibré dual** E^* est le fibr e vectoriel construit à partir de $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ et $H^*_{\alpha\beta} = (H^t_{\alpha\beta})^{-1}$.

Exemple 3.4.1. $T^*(X)$ est le fibré dual de $T(X)$.

RAPPEL 3.4.2. Soit X une variété lisse. L'ensemble $T(X)$ des champs de vecteurs lisses définit un fibré vectoriel. L'ensemble $\mathfrak{X}(X) = C^\infty(X, T(X))$ est un espace vectoriel réel de dimension ∞. De plus,

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(X) &= \{V : X \longrightarrow T(X) \ / \ p \circ V = \mathrm{id}\} \\ &\cong \{V : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X) \ / \ V \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire et } V(f \cdot g) = g \cdot V(f) + f \cdot V(g)\}.\end{aligned}$$

Le crochet de Lie de deu champs de vecteurs V et U est un champ de vecteurs $[V, U]$ défini par

$$[V, U](f) = V(U(f)) - U(V(f)).$$

Sur une carte $(\mathcal{U}, \varphi)$, on peur écrire $[V, U]$ localement comme

$$[V, U]_{\mathcal{U}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} U_i \cdot \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - V_i \cdot \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right).$$

Rappelez que $(\mathfrak{X}(X), [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de Lie de dimension infinie.

3.5 Groupe d'un paramètre de diffeomorphismes

L'ensemble

$$\mathrm{Diff}(X) := \{F : X \longrightarrow X \ / \ F \text{ est } C^\infty \text{ et bijective avec } F^{-1} \in C^\infty\}$$

est un groupe.

Définition 3.5.1. Un **groupe d'un paramètre de diffeomorphisme de** X est une application C^∞

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} \times X &\longrightarrow X \\ (t, a) &\mapsto \varphi_t(a) := \varphi(t, a)\end{aligned}$$

telle que :

(1) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_t : X \longrightarrow X$ est un difféomorphisme de X,

(2) $\varphi_0 = \mathrm{id}_X$, et

(3) $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{t+s}$ (donc $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-1}$).

Étant donné φ_t on peut associer un champ de vecteurs V : si $f \in C^\infty(X)$, alors $V(f)(a) := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} (f \circ \varphi_t)(a)$ $\Longleftrightarrow \gamma(t) := \varphi_t(a)$ est une courbe lisse sur X telle que $\gamma(0) = a$ et $V_a = [\dot{\gamma}(0)] \in T_a(X)$. Le but est renverser la correspondence.

Définition 3.5.2. Soit $V \in \mathfrak{X}(X)$. Une courbe C^∞ $\gamma : (\alpha, \beta) \longrightarrow X$ est **intégrale pour** V si pour tout $t \in (\alpha, \beta)$:

$$(D\gamma)_t : \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow V_{\gamma(t)} \iff \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(t) = V_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}(X).$$

Exemple 3.5.1. Soit $X = \mathbb{R}^2$ et $V = \frac{\partial}{\partial x}$. Quand $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ est-elle intégrale pour V ?

$$\begin{aligned} \dot\gamma(t)|_{t=t_0} &= (\dot x(t_0), \dot y(t_0)) = \dot x(t_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \dot y(t_0) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \\ &\iff \begin{cases} \dot x(t) = 1, \\ \dot y(t) = 0 \end{cases} \\ &\iff \gamma(t) = (t + a_1, a_2). \end{aligned}$$

Attention : $\varphi(t, a) = (t + a_1, a_2)$ pour $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ est un groupe de difféomorphisme de $X = \mathbb{R}^2$ tel que $V_a = \frac{\partial}{\partial x}$, pour tout a.

Plus généralement : $V|_{\mathcal{U}} = V_1(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + V_n(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}$, $V_i \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors les courbes intégrales de V qui passent par les pointes de $\mathcal{U}$ sont données par :

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = V_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \dot x_2(t) = V_2(x_1(t), \dots,_n(t)), \\ \vdots \\ \dot x_n(t) = V_n(x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases}$$

Définition 3.5.3. Une courbe intébrale **maximale** $\gamma(t)$ qui passe par $a \in X$ est une courbe integrale de V telle que :

(1) γ_a est définie pour $t \in (\alpha, \beta) \ni 0$,

(2) $\gamma_\alpha(0) = a$,

(3) si $\tilde\gamma(t)$ est une courbe integrale définie pour $(\tilde\alpha, \tilde\beta) \supseteq (\alpha, \beta)$ et $\tilde\gamma|_{\alpha,\beta} = \gamma$, alors $\tilde\alpha = \alpha$ et $\tilde\beta = \beta$.

Théorème 3.5.1. Soit $V \in \mathfrak{X}(X)$ et $a \in X$. Alors il existe une unique courbe intégrale maximale de V qui passe par a.

Théorème 3.5.2 (Existence et unicité locale)**.** Soit $(f(t, x))$ une fonction lisse d];efinie pour $|t| \leq \epsilon$ et $||x - x_0||_{\mathbb{R}^n} \leq \delta$, et supposons que f est lipschitzienne par rapport à a en sense que

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)||_{\mathbb{R}^n} \leq ||x_1 - x_2||_{\mathbb{R}^n} \quad (*).$$

Alors le système

$$\begin{cases} \dot x(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

possède une solution unique définie pour $|t| < h$.

Démonstration : Soit $a \in X$, et $(\mathcal{U}, \varphi)$ une carte avec $a \in \mathcal{U}$. Nous avons $V = \sum_{i=1}^{n} V_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$. Pour trouver une courbe intégrale de V qui passe par a, il suffit trouver une solution de

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = V_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = V_n(x_1, dots, x_n) \end{cases}$$

telle que $x(0) = x_0$ où $x_0 = \varphi(a)$. Par le théorème précédent, avec $f(t, x) = V(x) = (V_1(x), \ldots, V_n(x))$, $V \in C^\infty \implies V(x)$ vérifie la condition de Lipschitz sur une boule compacte centrée dans x_0. Il existe une unique solution $X(t)$ définie par $|t| < \epsilon_0$.

Conclusion : Il existe une courbe integrale $\gamma_a(t)$ qui passe par a en $t = 0$ et définie $|t| < \epsilon_0$.

À montrer que γ peut être prolongée de manière unique pour définir une courbe maximal.

$\square$

Lemme 3.5.1. Supposons que $\gamma_a(t)$ est une courbe intégrale de V définie pour $t \in (\alpha, \beta) \ni 0$ et $\gamma_a(0) = a$ et $\tilde{\gamma}_a(t)$ une courbe intégrale définie pour $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \supseteq (\alpha, \beta)$ et $\tilde{\gamma}_a(0) = a$. Alors $\gamma = \tilde{\gamma}|_{(\alpha,\beta)}$.

Démonstration : Soit $T = \{t \in (\alpha, \beta) : \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)\}$. Notons $0 \in T$. Pour le Théorème 3.5.1, T est ouvert. Comme T est aussi fermé, nous avons $T = (\alpha, \beta)$ par (α, β) maximal.

$\square$

Pour construire un groupe d'un paramètre de difféomorphismes $\varphi_t(a) := \gamma_a(t)$.

Problémes :

(1) $t \in (\alpha(a), \beta(a))$.

(2) Regularité de $\varphi_t(a)$ (C^∞ ?).

Exercice 3.5.1. Soit $\Omega_X = \bigcup_{\alpha \in X} (\alpha(a), \beta(a)) \times \{a\}$. Montrer que Ω_X est un ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times X$.

Théorème 3.5.3. Soit $V \in \mathfrak{X}(X)$ et notons $\varphi_t(a) = \gamma_a(t)$ la courbe intégrale maximale qui passe par a pour $t = 0$. Alors :

(1) $\varphi_t(a) : \Omega_X \longrightarrow X$ est C^∞,

(2) $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ dans les points où les applications sont définies,

(3) si X est compacte, alors φ_t est définie pour $t \in \mathbb{R}$ et donne un groupe d'un paramètre de difféomorphismes.

RAPPEL 3.5.1. Si $\dot{x} = f(t,x)$ avec $f \in C^k$, notons par $\alpha(t, x_0)$ la solution définie par $\alpha(0) = x_0$. Alors $\alpha(t,x)$ est une fonction de classe C^k.

Démonstration du Théorème 3.5.3 :

(1) C'est équivalent au Théorème précédent.

(2) $\gamma(t) = \varphi_t(\varphi_s(a))$ (fixons s et varions t). Nous avons $\gamma(0) = \varphi_s(a)$. La courbe $\gamma(t)$ est maximal de V. Soit $\tilde{\gamma}(t) = \varphi_{t+s}(a)$. Alors $\tilde{\gamma}(0) = \varphi_s(a)$. Nous avons $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = V_{\varphi(a)}$ et donc $\tilde{\gamma}$ est une courbe integrale de V. Par l'unicité, $\tilde{\gamma} = \gamma$.

(3) Soit X compacte. À montrer que toute courbe intégrale maximale est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que pour tout $a \in X$ il existe $\mathcal{U}_a$ et $(\alpha(a), \beta(a)) \ni 0$ tels que pour tout $b \in \mathcal{U}_a$ la courbe intégrale $\gamma_b(t)$ est définie pour $t \in (\alpha(a), \beta(a))$ (Théorème 3.5.1). Comme X est compacte, il existe $\mathcal{U}_{a_1}, \ldots, \mathcal{U}_{a_k}$ qui couvrent X. Posons $I = \bigcap_{j=1}^{k} (\alpha(a_j), \beta(a_j)) \ni 0$.

Conclusion : $\varphi_t(a)$ est définie sur $I \times X$.

Á montrer : On peut définir $\varphi_t(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour $t, s \in \mathbb{R}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{|t|+|s|}{n} \in I$. Nous avons que $\varphi_{\frac{t}{n}}$, $\varphi_{\frac{s}{n}}$ et $\varphi_{\frac{s+t}{n}}$ existent et par la partie (2) :

$$\begin{aligned} \varphi_{\frac{t}{n}} \circ \varphi_{\frac{s}{n}} &= \varphi_{\frac{s}{n}} \circ \varphi_{\frac{t}{n}} = \varphi_{\frac{t+s}{n}} \\ \varphi_t \circ \varphi_s &= \left(\varphi_{\frac{t}{n}}\right)^n \circ \left(\varphi_{\frac{s}{n}}\right)^n = \left(\varphi_{\frac{t+s}{n}}\right)^n = \varphi_{t+s}. \end{aligned}$$

Pour l'unicité, φ_t est bin définie et pour tout a coïncide avec la courbe intégrale maximal. De plus, $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1} \Longrightarrow \varphi \in \mathrm{Diff}$ pour tout t.

□

Considérons $\mathrm{Diff}(X)$. Soit $F \in \mathrm{Diff}(X)$ et $f \in C^\infty(X)$. Alors $\tilde{f} = f \circ F$ est une action de $\mathrm{Diff}(X)$ sur $C^\infty(X)$: $\mathrm{Diff}(X) \times C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$. Pour tout $V \in \mathfrak{X}(X)$, $\varphi_t^V \in \mathrm{Diff}(X)$. Donc pour tout $f \in C^\infty(X)$, nous avons $f \circ \varphi_t^V \in C^\infty(X)$.

Lemme 3.5.2. $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \varphi_t^V) = V(f)$.

Démonstration : Soit $x(t)$ une courbe intégrale de V par a :

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \dot{x}_1(0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + \dot{x}_n(0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = V_a(f) \\ V_a = \dot{x}_1(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \dot{x}_n(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}. \end{gathered}$$

□

Le groupe $\mathrm{Diff}(X)$ agit sur $\mathfrak{X}(X)$ comme suivre : Soit $F : X \longrightarrow X$ un difféomorphisme. Considérons la différentielle $(DF)_a : T_a(X) \longrightarrow T_{F(a)}(X)$ et soit $\tilde{V} = F_*(V)$ l'application définie par

$$\tilde{V}_b = F_*(V_{F^{-1}(b)}) := (DF)_{F^{-1}(b)}(V_{F^{-1}(b)}).$$

Rappelez que $V_a = [\dot{\gamma}(0)]$, $(DF)_a(V_a) = [\gamma \circ F(0)]$. Nous avons une action

$$\begin{aligned} \mathrm{Diff}(X) \times \mathfrak{X}(X) &\longrightarrow \mathfrak{X}(X) \\ (F, V) &\mapsto \tilde{V}. \end{aligned}$$

Lemme 3.5.3. $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^V)_*(U) = [U, V]$.

Démonstration : Par construction, $F_*(U)(f \circ F) = U(f) \circ F$ et $(DF)_a = \tilde{U}_{F(a)}$. Soit $\dot{U} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^V)_*(U)$ et $U_t := (\varphi_t^V)_*(U)$. Alors $U_t(f \circ \varphi_t^V) = U(f) \circ \varphi_t^V$. Par le lemme précédent, on a $V(U(f)) = \dot{U}(f) + U(V(f))$. Donc $\dot{U}(f) = [V, U](f)$.

□

Théorème 3.5.4. Si $\vec{V}(x) = (V_1(x), \ldots, V_n(x))$ est tel que $\vec{V}(x_0) \neq (0, \ldots, 0)$, alors il existe $O(x_0)$ et un changement de variables $(y_1, \ldots, y_n)$ tels que la solution $\alpha(t, x)$ de $\dot{x} = V(x)$ devient $\beta(t, y) = (y_1 + t, y_2, \ldots, y_n) \Longrightarrow F_x(\vec{V}) = (1, 0, \ldots, 0)$.

Cette théorème implique les Théorèmes 3.5.1 et 3.5.3.

CHAPITRE 4

FORMES DIFFÉRENTIELLES

4.1 Produit tensoriel d'espaces vectoriels

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ avec $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Notons par V^* l'espace vectoriel dual : $V^* := \{l : V \longrightarrow \mathbb{K} \;/\; l \text{ est linéaire}\}$.

Il existe un isomorphisme canonique $\Phi : V \longrightarrow (V^*)^*$ donné par $v \mapsto \Phi(v)$, où $\Phi(v) : V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ est l'application linéaire définie comme $\Phi(v)(l) = l(v)$.

Si $A : V \longrightarrow W$ est une application linéaire alors $A^* : W^* \longrightarrow V^*$, donnée par $A^*(w^*)(v) = w^*(A(v))$, est aussi une application linéaire.

Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Définissons

$$V \otimes W = \{f : V \times W \longrightarrow \mathbb{K} \;/\; f \text{ est bilinéaire}\}^*$$

où $f(u, v)$ est bilinéaire si :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2, v) &= \lambda_1 \cdot f(u_1, v) + \lambda_2 \cdot f(u_2, v), \\ f(u, \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) &= \lambda_1 \cdot f(u, v_1) + \lambda_2 \cdot f(u, v_2). \end{aligned}$$

L'ensemble $V \otimes W$ est appelé **produit tensoriel** de V et W. Soit $\beta : V \times W \longrightarrow V \otimes W$ l'application $(vw) \mapsto v \otimes w \in V \otimes W$ où $(v \otimes w)(f) := f(v, w)$. Alors

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2, w) &\mapsto v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ (v, w_1 + w_2) &\mapsto v \otimes w_1 + v \otimes w_2. \end{aligned}$$

Alors $\beta : V \times W \longrightarrow V \otimes W$ est bilinéaire.

Proposition 4.1.1. $V \otimes W$ vérifie la propriété suivante : Pour tout application bilinéaire $B : V \times W \longrightarrow U$ il eiste une unique application linéaire $f_B : V \otimes W \longrightarrow U$ telle que le diagram suivant commute :

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\beta"'] & U \\ V \otimes W \arrow[ur, "f_B"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration : Soit $\zeta \in U^*$. Notez que $\zeta \circ B : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ est bilinéaire. Il existe une application naturelle $U^* \longrightarrow \{f : V \times W \longrightarrow \mathbb{K} \ / \ f \text{ est bilinéaire}\}$. Considérons le dual

$$f_B := \zeta^* : V \otimes W = \{f : V \times W \longrightarrow \mathbb{K} \ / \ f \text{ est bilinéaire}\}^* \longrightarrow (U^*)^* \cong U.$$

□

Maintenent, nous avons donner autre construction pour le produit tensoriel. Soit

$$\mathcal{M} = \{\epsilon : V \times W \longrightarrow \mathbb{K} \ / \ \epsilon \neq 0 \text{ dans un numéro fini de points}\}.$$

Notons que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel. Soit

$$\delta_{v,w}(\tilde{v}, \tilde{w}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{v} = v \text{ et } \tilde{w} = w, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{M}_0$ le sous-espace engendré par :

- $\delta(v, w_1 + w_2) - \delta(v, w_1) - \delta(v, w_2)$,
- $\delta(v_1 + v_2, w) - \delta(v_1, w) - \delta(v_2, w)$,
- $\delta(v, \lambda \cdot w) - \lambda \cdot \delta(v, w)$,
- $\delta(\lambda \cdot v, w) - \lambda \cdot \delta(v, w)$.

Alors $V \otimes W \cong \mathcal{M}/\mathcal{M}_0$.

Exercice 4.1.1 (Isomorphismes canoniques)**.**

(1) $(V \otimes W) \otimes U \cong V \otimes (W \otimes U)$.

(2) $V \otimes W \cong W \otimes V$.

(3) $(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$.

(4) $\mathrm{End}(V, W) \cong V^* \otimes W$ où $v^* \otimes w : \tilde{v} \mapsto v^*(\tilde{v})w$.

(5) $\mathbb{K} \otimes V \cong V$.

Lemme 4.1.1. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de V et $\{w_1, \ldots, w_m\}$ est une base de W, alors $\beta(v_i, w_j) = v_i \otimes w_j$ est une base de $V \otimes W$. Donc $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.

Soit V un espace vectoriel. Dénotons $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$, $V^{\otimes 1} = V$, $V^{\otimes 2} = V \otimes V$, $\ldots$. Soit

$$T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}.$$

L'ensemble $T(V)$ est appelé **l'espace tensoriel** de V. Alors toute élément de $T(V)$ est de la forme

$$e = \lambda \sum_k a_{i_1,\ldots,i_k} \cdot v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k}.$$

La multiplication $e \otimes e'$ est associative mais pas commutative. Soit $I(V)$ l'ideal de $T(V)$

$$I(V) := \{v \otimes v \ / \ v \in V\}.$$

Définition 4.1.1. L'algèbre extérieure de V est définie par $\Delta^*(V) := T(V)/I(V)$.

Considérons la projection $\pi : T(V) \longrightarrow \Delta^*(V)$ $(e \mapsto [e])$, et soit $\Delta^p(V) = \pi(V^{\otimes p})$. On peut considérer la projection $\pi : V \otimes V \longrightarrow \Delta^2(V)$ donné par $e_i \otimes e_j \longrightarrow e_i \wedge e_j$. Notez que $\pi(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i) = 0$. Donc $\pi(e_i \otimes e_j) = \frac{1}{2} \cdot \pi(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)$. Alors $e_i \wedge e_j \overset{\pi}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2} \cdot (e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)$, où $e_i \wedge e_j$ dénote la classe de $e_i \otimes e_j$. Notez que $e_j \wedge e_i = -e_i \wedge e_j$.

Exercice 4.1.2. Prover que

$$\Delta^p(V) = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \, : \, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} = -e_{i_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge e_{i_{\sigma(k)}}, \text{ pour tout } \sigma \in S_k).$$

Montrer aussi que $\dim(\Delta^2(V)) = \binom{n}{2}$.

RAPPEL 4.1.1.

(1) Soit $V \in C^\infty(TX)$ un champ de vecteurs lisses. Il existe un sous-groupe d'un paramètre de difféomorphismes φ_t^V associé à V ssi pour tout $p \in X$, $\varphi_t^V(p)$ est la courbe intégrale de V, où φ_t^V est bien définie dans un voisinage de $p \in X$ pour $|t| < \epsilon_p$. Si X est compacte alors φ_t^V est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit $F \in \mathrm{Diff}(X)$ et $U \in C^\infty(TX)$, alors F envoie la courbe intégrale de U dans des courbes intégrales de $F_*(U) \in C^\infty(TX)$, ssi $\tilde{U} = F_*(U)|_{F(p)} = (DF)_p(U_p) \in T_{F(p)}(X)$.

Si $U, V \in C^\infty(TX)$ alors $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} (\varphi_t^V)_*(U) = [U, V]$.

(2) Soit V et W des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ tels que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ et $\dim_{\mathbb{K}}(W) = m$. On a le produit tensoriel de V et W définie par

$$V \otimes W := (L(V \times W, \mathbb{K}))^*.$$

Pour $v \in V$ et $w \in W$ on a l'élément $(v, w) \mapsto v \otimes w \in V \otimes W$. Toute application bilinéaire $B : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ déninit in élément de $V \otimes W$ noté par $v \otimes w$.

Fait : Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de V et $\{w_1, \ldots, w_m\}$ est une base de W, alors

$$\{v_i \otimes w_j \, : \, i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m\}$$

est une base de $V \otimes W$. En particulier, $\dim_{\mathbb{K}}(V \otimes W) = \dim_{\mathbb{K}}(V) \cdot \dim_{\mathbb{K}}(W)$.

Soient $f \in \mathrm{End}(V)$ et $g \in \mathrm{End}(W)$, alors $f \otimes g(v \otimes w) := f(v) \otimes g(w) \in \mathrm{End}(V \otimes W)$. De plus, si $f \in \mathrm{Gl}(V)$ et $g \in \mathrm{Gl}(W)$, alors $f \otimes g \in \mathrm{Gl}(V \otimes W)$.

4.2 Produit tensoriel des fibrés vectoriels

Soient $p_E : E \longrightarrow X$ et $p_F : F \longrightarrow X$ deux fibrés vectoriels sur X, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

RAPPEL 4.2.1. Sans perte, il existe une trivialization locale commune pour E et F, c'est-à-dire un recouvrement ouvert $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ de X, $h^E_\alpha : \pi_E^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \cong_{\text{diff}} \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n$, $h^F_\alpha : \pi_F^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \cong_{\text{diff}} \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^m$, et $H^{E,F}_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \xrightarrow{C^\infty} \mathrm{Gl}(n, m, \mathbb{K})$ où $H^{E,F}_{\alpha,\beta} = h^F_\beta \circ h^E_\alpha$.

Réciproquement, la donnée d'une trivialization locale définit un fibré si $H_{\alpha\beta}$ vérifient les conditions de cocycles. Consíderons l'application

$$H^E_{\alpha\beta}(x), H^F_{\alpha\beta}(x) \mapsto H^{E\otimes F}_{\alpha\beta}(x) := H^E_{\alpha\beta}(x) \otimes H^F_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{Gl}(n \cdot m, \mathbb{K}).$$

À vérifier que $H^{E\otimes F}_{\alpha\beta}(x)$ vérifier les conditions des cocycle. C'est suffit pour prouver que $E \otimes F$ est le fibré correspondent.

4.3 Somme directe des fibrés vectoriels

RAPPEL 4.3.1. Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. La **somme directe** de V et W est définie comme suivre :

$$V \oplus W := \{(v, w) : v \in V \text{ et } w \in W\},$$

où $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$ et $\lambda \cdot (v, w) := (\lambda \cdot v, \lambda \cdot w)$.

On peut montrer que

$$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W).$$

Si $f \in \mathrm{End}(V)$ et $g \in \mathrm{End}(W)$ alors $(f \oplus g)(v, h) := (f(v), g(w)) \in \mathrm{End}(V \oplus W)$.

Soient $pi_E :\longrightarrow X$ et $\pi_F : F \longrightarrow X$ deux fibrés vectoriel sur X. La **somme directe** de E et F est le fibré vectoriel $E \oplus F \longrightarrow X$ avec les cocycles

$$H^{E\oplus F}_{\alpha\beta}(x) := H^E_{\alpha\beta}(x) \oplus H^F_{\alpha\beta}(x).$$

4.4 Algèbre extérieure

À partir d'un espace vectoriel V on peut construire l'algèbre tensoriel

$$T(V) := \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \cdots \oplus V^{\otimes k} \oplus \cdots$$

qui est un espace vectoriel de dimension infinie, avec le produit

$$(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k}) \otimes (v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_p}) = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_p}.$$

L'algèbre $T(V)$ est associative, mais pas commutative. L'ensemble

$$I(V) = \langle v \otimes v \,:\, v \in V \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^{l} \sum a_{i_1,\ldots,i_k} a_{i_1,\ldots,i_k} \cdot v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v \otimes \cdots \otimes v \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \,:\, l \in \mathbb{N} \right\}$$

est un ideal de $T(V)$, et le quotient $\Delta^*(V) := T(V)/I(V)$ est appelé **l'algèbre extérieure** de V.

Remarque 4.4.1. $(v_1+v_2)\otimes(v_1+v_2) = v_1\otimes v_1+v_2\otimes v_2+v_1\otimes v_2+v_2\otimes v_1$ implique que $v_1\otimes v_2+v_2\otimes v_1 \in I(V)$. Alors

$$v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_{i_p} + v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i_p} \in I(V).$$

Construction alternative : $V^{\otimes k} = \langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \,:\, v_i \in V \rangle$. Pour tout $\sigma \in S_k$, définissons l'application $f_\sigma : V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes k}$ par $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$, plus linéarité.

Définition 4.4.1. Soit $\Delta^k(V) = \{t \in V^{\otimes k} \,:\, \text{pour tout } \sigma \in S_k,\ f_\sigma(t) = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} t\}$. Notez que $\Delta^k(V)$ est un sous-espace vectoriel de $V^{\otimes k}$.

$$\Delta^*(V) = \mathbb{K} \oplus \Delta^1(V) \oplus \Delta^2(V) \oplus \cdots \oplus \Delta^k(V) \oplus \cdots$$

Considérons l'application $\text{Anti} : V^{\otimes k} \longrightarrow \Delta^k(V)$ donnée par

$$\text{Anti}(t) := \frac{1}{k!} \cdot \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} f_\sigma(t).$$

Notez que $\text{Anti}^2 = \text{Anti}$.

Lemme 4.4.1. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de V, alors $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \,:\, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ est une base de $\Delta^k(V)$, où $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} := \text{Anti}(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k})$. Par conséquent, $\dim(\Delta^k(V)) = \binom{n}{k}$.

Proposition 4.4.1. Il existe un isomorphisme canonique entre $\Delta^*(V)$ et $T(V)/I(V)$, donné par la composition de l'inclusion $\Delta^*(V) \hookrightarrow T(V)$ avec la projection $T(V) \longrightarrow T(V)/I(V)$.

Corollaire 4.4.1. Soit V un espace vectoriel et V^* son espace dual. On a

$$\begin{aligned} \Delta^k(V^*) &\cong \{f : V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{K} \ /\ f \text{ est multilinéaire et} \\ &\qquad \text{pour toute } \sigma \in S_k,\ f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} f(v_1, \ldots, v_k)\} \\ &:= \text{l'espace de } k\text{-formes anti-symétriques de } V \end{aligned}$$

Exemple 4.4.1.

(1) $\Delta^2(V^*) = \{w : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \ /\ w \text{ est bilinéaire et } w(v_1, v_2) = -w(v_2, v_1)\}$.

(2) Supposons que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Alors $\dim(\Delta^n(V)) = \binom{n}{n} = 1$.

Si $f \in \mathrm{End}(V)$, nous définissons l'application $\Delta^*(f) : \Delta^k(V) \longrightarrow \Delta^k(V)$ par $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \mapsto f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_k)$.

Lemme 4.4.2. Soit $f \in \mathrm{End}(V)$, alors $\Delta^n(f) \in \mathrm{End}(\Delta^n(V))$ et $\Delta^n(f) = \det(f) \cdot \mathrm{id}$.

Démonstration : Pour $n = 2$. Soit $\{v_1, v_2\}$ une base de V. Donc $\{v_1 \wedge v_2\}$ est une base de $\Delta^2(V)$. Si $f : V \longrightarrow V$, soit A_f son matrice. Si $f(v_1) = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$ et $f(v_2) = c \cdot v_1 + d \cdot v_2$, alors $A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Nous avons

$$\begin{aligned}(\Delta^2(f))(v_1 \wedge v_2) &= f(v_1) \wedge f(v_2) = (a \cdot v_1 + b \cdot v_2) \wedge (c \cdot v_1 + d \cdot v_2) \\ &= ad \cdot v_1 \wedge v_2 + bc \cdot v_2 \wedge v_2 = (ad - bc) \cdot v_1 \wedge v_2 \\ &= \det(A_f) v_1 \wedge v_2.\end{aligned}$$

$\square$

Corollaire 4.4.2. $\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$ et donc $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

4.5 Tenseurs lisses sur une variété

Soit X une variété lisse, $T(X)$ le fibré tangent et $T^*(X)$ le fibré cotangent. Nous dénotons

$$T^p_q(X) := (T(X))^{\otimes p} \otimes (T^*(X))^{\otimes q}.$$

Définition 4.5.1. Une section lisse de $T^p_q(X)$ est dit un **tenseur lisse**.

Posons $T^0_0(X) := X \times \mathbb{R}$. Dans une carte $\mathcal{U}$ avec coordonnées $x = (x_1, \ldots, x_n)$, considérons la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ de $T(X)|_{\mathcal{U}}$ et la base duale $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$. Soit $t \in C^\infty(T^p_q(X))$, alors

$$t|_{\mathcal{U}} = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \sum_{j_1,\ldots,j_q} f^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \otimes dx_{j_1} \otimes \cdots \otimes dx_{j_q}.$$

4.6 Formes différentielles

Soit X une variété lisse et $T^*(X)$ le fibré cotangent. Pour chaque $p \in X$, nous avons la correspondance $T^*_p(X) \longrightarrow \Delta^k(T^*_p(X)) = \{f : T_p(X) \times \cdots \times T_p(X) \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \text{ est multilinéaire et totalement anti-symétrique}\}$. Si $p \in \mathcal{U}$ avec coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, et $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ est la base de $T^*_p(X)$, alors

$$\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

est une base de $\Delta^k(T^*_p(X))$. Pour $\alpha \in \Delta^k(T^*_p(X))$, on a la representation locale

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1,\ldots,i_k} a_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Si on change la carte par $\mathcal{V} \ni p$ avec coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$, on a

$$\tilde{\alpha}|_{\mathcal{V}} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} b_{i_1,\ldots,i_k} dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_k}.$$

De plus, $dy_j = \sum_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \cdot dx_i$. Dénotons

$$\Delta^k(X) := \text{ le fibré associé à } \bigcup_{p \in X} \Delta^k(T_p^*(X)).$$

Définition 4.6.1. Une k-forme différentielle est un section lisse $\alpha : X \longrightarrow \Delta^k(X)$ du fibré $\Delta^k(X) \longrightarrow X$.

Remarque 4.6.1. Dans la representation locale $\alpha|_{\mathcal{U}}(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1,\ldots,i_k}(x) \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, chaque fonction $a_{i_1,\ldots,i_k} \in C^\infty(\mathcal{U})$.

Exemple 4.6.1. Soit $X = \mathbb{R}^2$ et $\alpha = dx \wedge dy$. Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ on a les coordonnées polaires $x = r \cdot \cos(\theta)$ et $y = r \cdot \sin(\theta)$. Notez que

$$\begin{aligned} dx &= \cos(\theta) \cdot dr - r \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta, \\ dy &= \sin(\theta) \cdot dr + r \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta. \end{aligned}$$

Alors

$$dx \wedge dy = r \cdot \cos^2(\theta) \cdot dr \wedge d\theta + r \cdot \sin^2(\theta) \cdot dr \wedge d\theta = r \cdot dr \wedge d\theta.$$

Notation : $\Delta^0(X) := X \times \mathbb{R}$, $\Delta^1(X) = T^*(X)$.

Soient X et Y deux variétés lisses et $F : X \longrightarrow Y$ une application C^∞. Considérons la différentielle $(DF)_p : T_p(X) \longrightarrow T_{F(p)}(Y)$.

Remarque 4.6.2. Si $V \in C^\infty(T(X))$ alors $(DF)(V)$ n'est pas un champ de vecteurs sur Y.

Dénotons $\Omega^k(Y) = C^\infty(Y, \Delta^k(T^*(Y)))$. Soit $\beta \in C^\infty(\Delta^k(T^*(Y)))$. Alors

$$F^*(\beta)|_p(V_1, \ldots, V_k) := \beta|_{F(p)}((DF)_p(V_1), \ldots, (DF)_p(V_k)).$$

Lemme 4.6.1. Pour toute application $F : X \stackrel{C^\infty}{\longrightarrow} Y$ et pour toute $\beta \in \Omega^k(Y)$, on a $F^*(\beta) \in \Omega^k(X)$.

Démonstration : Soit $p \in X$ et considérons une carte $\mathcal{U} \ni p$ avec coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $\mathcal{V} \ni F(p)$ une carte avec coordonnées $(y_1, \ldots, y_m)$. Alors

$$\beta|_{\mathcal{V}}(y) = \sum b_{i_1,\ldots,i_k}(y) \cdot dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}.$$

Donc

$$F^*(\beta)|_{\mathcal{U}}(x) = \sum b_{i_1,\ldots,i_k}(F(x)) \cdot d(y_{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y_{i_k} \circ F)$$

parce que $F^*(df)(U) = df((DF)(U)) = d(f \circ F)(U)$. Nous avons que $F^*(\beta)|_{\mathcal{U}}$ est lisse.

$\square$

Remarque 4.6.3. Si $f \in \Omega^0(Y) = C^\infty(Y)$ alors $F^*(f) = f \circ F \in C^\infty(X)$.

Exemple 4.6.2. Soit $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 \cdot x_2, x_2 + x_3) = (x, y)$, et considérez la forme $\alpha = dx \wedge dy$. Pour $x = x_1 \cdot x_2$ et $y = x_2 + x_3$, on a $dx = x_2 \cdot dx_1 + x_1 \cdot dx_2$ et $dy = dx_2 + dx_3$. Alors

$$\begin{aligned} F^*(\alpha) &= (x_2 dx_1 + x_1 dx_2) \wedge (dx_2 + dx_3) \\ &= x_2 \cdot dx_1 \wedge dx_2 + x_2 \cdot dx_1 \wedge dx_3 + x_1 \cdot dx_2 \wedge dx_3 \\ &= x_2 \cdot dx_1 \wedge dx_2 + x_2 \cdot dx_1 \wedge dx_3 + x_1 \cdot dx_1 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

4.7 Produit extérieur des formes

Soient $\alpha \in \Delta^k(V) \subseteq V^{\otimes k}$ et $\beta \in \Delta^r(V) \subseteq V^{\otimes r}$. Alors

$$\alpha \otimes \beta \in V^{\otimes(k+r)} \xrightarrow{\text{Anti}} \text{Anti}(\alpha \otimes \beta) = \alpha \wedge \beta \in \Delta^{k+r}(V).$$

On peut montrer que $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot r} \beta \wedge \alpha$.

Lemme 4.7.1.

(1) $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$.

(2) $F^*(\alpha + \beta) = F^*(\alpha) + F^*(\beta)$.

(3) $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta)$.

Si $F \in \text{Diff}(X)$ et $\alpha \in \Omega^k(X)$, alors $F^*(\alpha) \in \Omega^k(X)$. En particulier, $\text{Diff}(X)$ agit sur $\Omega^1(X)$ et $C^\infty(T(X))$. Alors, $\text{Diff}(X)$ agit sur $C^\infty(X, T^p_q(X))$. Soit $t \in C^\infty(X, T^p_q(X))$. Qui est $\tilde{F}(t)$? Localement, nous avons

$$t|_{\mathcal{U}} = \sum \sum t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\right) \otimes dx_{j_1} \otimes \cdots \otimes dx_{j_q}.$$

Alors

$$\tilde{F}(t) = \sum_i \sum_j t^{i_1,\ldots,i_p}(F(x)) \cdot F_* \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right) \otimes \cdots \otimes F_* \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\right) \otimes (F^*(dx_{j_1}))_{F(x)} \otimes \cdots \otimes (F^*(dx_{j_q}))_{F(x)}.$$

4.8 Derivée de Lie d'un tenseur lisse

Définition 4.8.1. Soient $U \in C^\infty(T(X))$ et $t \in C^\infty(T^p_q(X))$. La **derivée de Lie** du tenseur t en direction de U est définie par

$$\mathcal{L}_U(t) := \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \tilde{\varphi}^U_s(t),$$

où φ^U_t est le sous-groupe d'un paramètre de difféomorphismes associé à U.

Proposition 4.8.1 (Cas particuliers)**.**

(1) $f \in C^\infty(X)$: $\mathcal{L}_U(f) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} (f \circ \varphi_t^U) = U(f)$.

(2) $V \in C^\infty(T(X))$: $\mathcal{L}_U(V) = [U, V]$.

(3) $\mathcal{L}_U(t \otimes t') = (\mathcal{L}_U(t)) \otimes t' + t \otimes (\mathcal{L}_U(t))$.

4.9 Dérivée extérieure d'une forme différentielle

Théorème 4.9.1. Soit X une variété lisse. Il existe une unique application linéaire $d : \Omega^k(X) \longrightarrow \Omega^{k+1}(X)$ telle que :

(1) si $f \in \Omega^0(X) = C^\infty(X)$, alors $df = Df$,

(2) $d \circ d = 0$, et

(3) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$, où $\alpha \in \Omega^k(X)$.

Démonstration : Soit α une forme. Localement, nous avons $\alpha|_{\mathcal{U}} = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1, \ldots, i_p}(x) \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$. Posons

$$\begin{aligned} d\alpha|_{\mathcal{U}} &= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} da_{i_1, \ldots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \\ &= \sum \frac{\partial a_{i_1, \ldots, i_p}}{\partial x_j} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}. \end{aligned}$$

On peut vérifier $d^2\alpha = \sum \frac{\partial^2 a_{i_1, \ldots, i_p}}{\partial x_k \partial x_j} dx_{i_1} \wedge dx_j \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = 0$ et les autres propriétés. □

Exercice 4.9.1. Vérifier que la définition de d donnée dans la preuve précédent ne dépend pas de la carte $\mathcal{U}$. Prouver aussi l'unicité de d.

Exemple 4.9.1. Considérez $\mathbb{R}^3$ et $f(x_1, x_2, x_3)$. Pour $k = 0$: définissons

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3.$$

Pour $d = 1$: soit $\alpha = a_1(x) dx_1 + a_2(x) dx_2 + a_3(x) dx_3$. Nous avons :

$$\begin{aligned} d\alpha &= da_1 \wedge dx_1 + da_2 \wedge cx_2 + da_3 \wedge dx_3 \\ &= \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 + \cdots \\ &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Proposition 4.9.1. $dF^*(\alpha) = F^*(d\alpha)$.

Démonstration : Pour $\alpha = f \in C^\infty(Y)$. On a $F^*df = d(f \circ F)$. Pour le cas général, considérons une forme α localement sur un carte $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}\alpha|_{\mathcal{U}} &= \sum b_{i_1,\ldots,i_k}(y)dy_{i_1}\cdots dy_{i_k},\\ F^*(d\alpha) = F^*\left(\sum db_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}\right) &= \sum F^*(db_{i_1,\ldots,i_k}) \wedge F^*(dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge F^*(dy_{i_k})\\ &= \sum d(b \circ F) \wedge d(y_{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y_{i_k} \circ F) = d(F^* \circ \alpha).\end{aligned}$$

□

Théorème 4.9.2. Pour tout champ de vecteurs $V \in C^\infty(T(X))$, il existe une unique application $\mathbb{R}$-linéaire $i_V : \Omega^k(X) \longrightarrow \Omega^{k-1}(X)$ telle que :

(1) $i_V(df) = V(f) = df(V)$,

(2) $i_V \circ i_V = 0$,

(3) $i_V(\alpha \wedge \beta) = (i_V\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_V\beta)$, où $\alpha \in \Omega^k(X)$.

Démonstration : Localement, $V = \sum_{i=1}^n V_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$. Soit $\alpha = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$. Posons

$$i_V\alpha := V_1(x)dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k - V_2(x)dx_1 \wedge dx_3 \cdots \wedge dx_k + \cdots + (-1)^k V_k(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1}.$$

Par (1) : $i_V dx_i = (dx_i)(V) = V_i(x)$. En utilisant (3), on a la formule.

□

Exercice 4.9.2. Démontrer que $(i_V\alpha)(V_1, \ldots, V_{k-1}) = \alpha(V, V_1, \ldots, V_{k-1})$, pour tout $V_1, \ldots, V_{k-1}$ où $\alpha \in \Omega^k(X) \subseteq C^\infty(T^* \otimes \cdots \otimes T^*)$ (k fois).

RAPPEL 4.9.1.

(1) Soit V un espace vectoriel :

$$\Delta^k(V^*) = \{\alpha : V \times \cdots \times V \overset{\text{multi}}{\longrightarrow} \mathbb{K} \;/\; \forall\, \sigma \in S_k \text{ on a } \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)}\alpha(v_1, \ldots, v_k)\}.$$

On peut prouver que $\dim_{\mathbb{K}}(\Delta^k(V^*)) = \binom{n}{k}$. Si $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ est une base de V^*, alors

$$\{e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \;:\; 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

est une base de $\Delta^k(V^*)$, où

$$e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* = \mathrm{Anti}(e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*)$$
$$\mathrm{Anti}(t) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} t(V_{\sigma(1)}, \ldots, V_{\sigma(k)}).$$

Notez que $t \in \Delta^k(V^*)$ ssi $\mathrm{Anti}(t) = t$.

(2) Soit X une variété lisse et considérons $T(X)$, $T^*(X)$ et $\Delta^k(X) = \Delta^k(T^*(X))$. Soit

$$\Omega^k(X) = C^\infty(X, \Delta^k(T^*(X)))$$

l'espace de k-formes différentielles. Il existe une unique application linéaire $d : \Omega^k(X) \longrightarrow \Omega^{k+1}(X)$, définie localement par :

$$\alpha|_{\mathcal{U}} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$
$$d\alpha|_{\mathcal{U}} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} (da_{i_1,\ldots,i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \text{ où } df := Df,$$

qui a les prepriétés :

(1) $df = Df$, pour toute $f \in C^\infty(X)$,

(2) $d \circ d = 0$,

(3) $d(\alpha \wedge \beta) d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ où $\alpha \in \Omega^k(X)$.

Si $\alpha \in \Omega^k(X)$ et $\beta \in \Omega^r(X)$, alors $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+r}(X)$, où $\alpha \wedge \beta = \mathrm{Anti}(\alpha \otimes \beta)$. De plus, $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot r} \beta \wedge \alpha$.

Pour tout $V \in C^\infty(X, T(X))$, il existe une unique application linéaire $i_V : \Omega^k(X) \longrightarrow \Omega^{k-1}(X)$ telle que :

(1) $i_V f = 0$, pour toute $f \in C^\infty(X)$.

(2) $i_V \circ i_V = 0$.

(3) $i_V(\alpha \wedge \beta) = (i_V \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_V \beta)$.

Si $(\mathcal{U}, \varphi)$ est une carte avec coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, on peut écrire $i_V \alpha$ localement comme suivre :

$$\alpha|_{\mathcal{U}} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1,\ldots,i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$
$$V|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^n V_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i},$$
$$i_V \alpha = \sum a_{i_1 < \cdots < i_k} (V_{i_1}(x) dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} - V_{i_2}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_3} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$
$$+ \cdots + (-1)^j V_{i_j}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} + \cdots).$$

Pour tout $V \in C^\infty(X, T(X))$ et pour tout $\alpha \in \Omega^k(X)$, on a

$$(i_V \alpha)(V_1, \ldots, V_{k-1}) = k \cdot \alpha(V, V_1, \ldots, V_{k-1}).$$

En relation à l'application Anti, on a deux conventions :

(1) **Notre convention :** Anti $= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\alpha(V_{\sigma(1)},\dots,V_{\sigma(k)})$.

(2) **Autre convention :** Anti $= \sum_{\sigma\in S_k}\alpha(V_{\sigma(1)},\dots,V_{\sigma(k)})$.

Par définition :

$$(e_1^*\wedge\cdots\wedge e_k^*, V_1\wedge\cdots\wedge V_k) := \frac{1}{k!}\det(e_i^*(V_j)).$$

4.10 Dérivée de Lie d'une forme différentielle

Soit $V\in C^\infty(X,T(X))$ et $\varphi_t^V\in \mathrm{Diff}(X)$ le sous-groupe d'un paramètre associé. Soit $\alpha\in\Omega^k(X)$:

$$(\varphi_t^V)^*(\alpha)|_p(V_1,\dots,V_k) := \alpha|_{\varphi_t^V(p)}(D\varphi_t^V(V_1),\dots,D\varphi_t^V(V_k)).$$

La **dérivée de Lie d'un forme** α est définie par :

$$\mathcal{L}_V\alpha := \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t^V)^*(\alpha)-\alpha}{t} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^V)^*(\alpha).$$

Théorème 4.10.1 (Cartan)**.** $\mathcal{L}_V\alpha = i_V(d\alpha)+d(i_V\alpha)$.

Démonstration : Soit $R_V:\Omega^k(X)\longrightarrow\Omega^k(X)$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire définie par :

$$R_V(\alpha) := i_V(d\alpha)+d(i_V\alpha).$$

(1) $R_V\circ d = d\circ R_V$:

$$\begin{aligned}(R_V\circ d)(\alpha) &= R_V(d\alpha) = i_V(dd\alpha)+di_Vd\alpha = (d\circ i_V\circ d)(\alpha),\\ (d\circ R_V)(\alpha) &= d(i_Vd\alpha+d(i_V\alpha)) = (d\circ i_V\circ d)(\alpha).\end{aligned}$$

(2) $R_V(\alpha\wedge\beta) = (R_V\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge(R_V\beta)$:

$$\begin{aligned}(i_V\circ d)(\alpha\wedge\beta) &= i_V(d\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge d\beta)\\ &= i_Vd\alpha\wedge\beta+(-1)^{k+1}d\alpha\wedge\beta+(-1)^k i_V\alpha\wedge d\beta+\alpha\wedge i_Vd\beta,\\ (d\circ i_V)(\alpha\wedge\beta) &= d((i_V\alpha)\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge(i_V\beta))\\ &= d(i_V\alpha)\wedge\beta+(-1)^{k-1}(i_V\alpha)\wedge d\beta+(-1)^k d\alpha\wedge(i_V\beta)+\alpha\wedge di_V\beta.\end{aligned}$$

Alors $R_V(\alpha\wedge\beta) = R_V(\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge R_V(\beta)$.

(3) $R_V(f) = df(V)$.

Conclusion : R_V est déterminé par (1), (2) et (3) car $\alpha|_{\mathcal{U}} = \sum_{i_!<\cdots<i_k} a_{i_1,\dots,i_k}(x)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$. Pour démontrer le théorème il suffit de montrer que $\mathcal{L}_V$ vérifie (1), (2) et (3) (tout comme R_V).

(1) Pour tout $F\in\mathrm{Diff}(X)$, $d(F^*(\alpha)) = F^*(d\alpha)$ (déjà déterminé). Alors $d\circ\mathcal{L}_V = \mathcal{L}_V\circ d$.

(2) Nous avons

$$\mathcal{L}_V(\alpha\wedge\beta) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}[(\varphi_t^V)^*\alpha\wedge(\varphi_t^V)^*\beta] = \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\varphi_t^V)^*(\alpha)\right)\wedge\beta+\alpha\wedge\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\varphi_t^V)^*(\beta)\right).$$

(3) $\mathcal{L}_V(f) = df(V)$.

$\square$

Théorème 4.10.2. Pour toute $\alpha\in\Omega^k(X)$ et touts $V, V_1,\dots,V_k\in C^\infty(X, T(X))$, on a

$$\mathcal{L}_V(\alpha) = V(\alpha(V_1,\dots,V_k)) - \sum_{i=1}^k \alpha(V_1,\dots,[V,V_i],\dots,V_k).$$

Corollaire 4.10.1. Soit $\alpha\in\Omega^k(X)$ et $V, V_1,\dots,V_k\in C^\infty(X,T(X))$. Alors

$$\begin{aligned}(d\alpha)(V_0,V_1,\dots,V_k) &= \frac{1}{k+1}\cdot\sum_{i=0}^k(-1)^iV_i(\alpha(V_0,\dots,\widehat{V_i},\dots,V_k))\\ &\quad+\frac{1}{k+1}\cdot\sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{i+j}\alpha([V_i,V_j],V_0,V_1,\dots,\widehat{V_i},\dots,\widehat{V_j},\dots,V_k)\end{aligned}$$

Exemple 4.10.1.

(1) Si $\alpha\in\Omega^1(X)$, alors par le théorème précédent on a

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_V\alpha)(U) &= (d(i_V\alpha))(U)+(i_Vd\alpha)(U)\\ V(\alpha(U))-\alpha([V,U]) = U(\alpha(V))-2(d\alpha)(U,V)(d\alpha)(U,V) &= \frac{1}{2}\cdot[U(\alpha(V))-V\alpha(U)-\alpha([U,V])].\end{aligned}$$

(2) Si $\omega\in\Omega^2(X)$ alors

$$(d\omega)(U,V,W) = \frac{1}{3}\cdot[\sigma_{U,V,W}\{U(\omega(V,W))-\omega([U,V],W)\}].$$

4.11 Cohomologie de deRham

L'application $d:\Omega^k(X)\longrightarrow\Omega^{k+1}(X)$ définit un complexe des cochaines car $d\circ d=0$. Le **k-ème groupe de cohomologie de deRham** d'une variété lisse X est d efinie par l'espace quotient

$$H^k(X) := \mathrm{Ker}\left(d|_{\Omega^k(X)}\right)/\mathrm{Im}\left(d|_{\Omega^{k-1}(X)}\right).$$

Notez que $H^k(X)$ est un espace vectoriel réel.

Remarque 4.11.1.

(1) Si X est compacte, $H^k(X)$ a dimension finie (ceci est un théorème que nous allons discuter plus tard) :

$$\dim(H^k(X)) = b_k(X) \text{ le } \textbf{nombre de Betti}.$$

(2) $H^0(X) = \{f \in C^\infty(X) \ / \ df = 0\}$. Si X est connexe : $H^0(X) = \{c \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$. Donc $b_0(X) = 1$.

Définition 4.11.1. Une forme $\alpha \in \Omega^k(X)$ est dite :

(1) **Fermée** si $d\alpha = 0$.

(2) **Exacte** si $\alpha = d\beta$ pour $\beta \in \Omega^{k-1}(X)$.

Proposition 4.11.1 (Propriétés immediates)**.**

(1) $H^k(X) = \{0\}$ si $k > \dim(X)$, $H^0(X) = \mathbb{R}$.

(2) Si $a \in H^k(X)$ et $b \in H^r(X)$ alors il existe un produit $\bullet$ tel que $a \bullet b \in H^{k+r}(X)$ et $a \bullet b = (-1)^{k \cdot r} b \bullet a$.

(3) Si $F : X \longrightarrow Y$ est une application C^∞ alors il existe une application linéaire $F^* : H^k(Y) \longrightarrow H^k(X)$ qui preserve le produit $\bullet$.

Démonstration :

(2) Soit $\alpha \in a$, $\beta \in b$. Alors $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+r}(X)$. Comme $d\alpha = 0$ et $d\beta = 0$, nous avons

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta = 0 + 0 = 0.$$

Posons

$$a \bullet b := [\alpha \wedge \beta]_{\mathrm{dR}}.$$

Nous devons montrer que $\bullet$ est bien définie. Supposons $\tilde{\alpha} = \alpha + d\hat{\alpha}$ et $\tilde{\beta} = \beta + d\hat{\beta}$ (autres représentats). Alors

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} &= \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge d\hat{\beta} + d\hat{\alpha} \wedge \beta + d\hat{\alpha} \wedge d\hat{\beta} \\
&= \alpha \wedge \beta + (-1)^k d(\alpha \wedge \hat{\beta}) + d(\hat{\alpha} \wedge \beta) + d(\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \\
&= \alpha \wedge \beta + d[(-1)^k \alpha \wedge \hat{\beta} + \hat{\alpha} \wedge \beta + \hat{\alpha} \wedge d\hat{\beta}].
\end{aligned}$$

Par conséquent, $[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}] = [\alpha \wedge \beta]$.

(3) Soit $a \in H^k(Y)$ et $\alpha \in a$. Alors

$$\begin{gathered}
F^*(a) := [F^*(\alpha)]_{\mathrm{dR}}, \\
F^*(\alpha + d\hat{\beta}) = F^*(\alpha) + F^*(d\beta) = F(\alpha) + dF^*(\beta).
\end{gathered}$$

□

Théorème 4.11.1. Soit $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ une application C^∞. Notons $F_t : X \longrightarrow Y$ l'application $F_t(x) = F(x,t)$. Alors $F_1^* = F_0^*$ où $F_t^* : H^k(Y) \longrightarrow H^k(X)$.

Démonstration : Soit $\alpha \in \Omega^k(Y)$. On a $F^*(\alpha) = \beta_t + dt \wedge \gamma_t$, où β_t, γ_t sont des formes différentielles sur X. Par exemple, $\alpha \in \Omega^2(Y)$, on a $F^*(\alpha) \in \Omega^2(X \times [0,1])$, où

$$F^*(\alpha) = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \cdot a dx_j + \sum_{i=1}^{n} b_i(tx) dt \wedge dx_i.$$

□

Remarque 4.11.2.

(1) $\beta_t = F_t^*(\alpha)$.

(2) Soit $V = \frac{\partial}{\partial t}$ (avec $\varphi_s(x,t) = (x, t+s)$). Alors $\gamma_t = i_V F^*(\alpha)$. Comme $d\alpha = 0$, nous avons $dF^*(\alpha) = 0$ ssi $d\beta_t = 0$. Pour $X \times (0,1)$, $d = d_X + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}$. Donc $d\beta_t = d_X \beta_t + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}\beta_t$. On a

$$0 = d_X\beta_t + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}\beta_t - dt \wedge d\gamma_t = d_X\beta_t + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}\beta_t - dt \wedge d_X\gamma_t$$

$$\iff$$

$$d_X\beta_t = 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial t}\beta_t = d_X\gamma_t.$$

Localement,

$$\beta_t = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1,\ldots,i_k}(t,x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta_t = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial t}(t,x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = d_X\gamma_t.$$

De plus,

$$F_1^*(\alpha) - F_0^*(\alpha) = d\left(\int_0^1 \gamma_t dt\right) = \beta_1 - \beta_0 = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}\beta_t\right) dt = d\int_0^1 \gamma_t dt.$$

Par conséquent, $[F^*(\alpha)]_{\mathrm{dR}} = [F_0^*(\alpha)]_{\mathrm{dR}}$.

Exemple 4.11.1.

(1) **Lemme de Poincaré :** $H^k(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ si $k \geq 1$. Posons $F_t(x) = t \cdot x$. On a que $F_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est la fonction identité, et que $F_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est l'application constante $\equiv 0$. Alors $F_t^* : H^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^k(\mathbb{R}^n)$ ne dépend pas de t. Por le théorème précédent, $F_0^* = F_1^*$ et donc $H^k(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ pour $k \geq 1$.

(2) $X = S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Considérons la projection $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On a les cartes $\mathcal{U}_0 := p(0,1)$ et $\mathcal{U}_1 := p(-1/2, 1/2)$, avec $\varphi_0 := (p|_{-1,1})^{-1}$ et $\varphi_1 := (p|_{(-1/2,1/2)})^{-1}$. Rappelez que

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (0, 1/2), \\ x - 1 & \text{si } x \in (1/2, 1). \end{cases}$$

Nous avons que $\alpha = dx$ définit une 1-forme fermée sur $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, mais n'est pas exacte. Alors $H^1(S^1) \neq \{0\}$, car $[\alpha]_{\mathrm{dR}} \neq 0$. Notez que $\mathrm{rg}(\Delta^1(S^1)) = 1$. Si $\tilde{\alpha} \in \Omega^1(S^1)$, alors $d\tilde{\alpha} = 0$ et $\tilde{\alpha}_x = g(x)\alpha$ (α ne s'annule jamais donc fourni une base de $\Delta^1(S^1)$ en tout point). Car $\tilde{\alpha} \in \Omega^1(S^1)$ ssi $g(x+1) = g(x)$ ($S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Notons que $d\tilde{\alpha} = 0$ automatiquement. Si $\tilde{\alpha} = df = f'(x)dx$. La condition est $g(x) = f'(x)$ avec $f(x+1) = f(x)$. Alors $\int_0^1 g(x)dx = 0 = f(1) - f(0)$. Nous avons

$$\tilde{\alpha} = g(x)\alpha = g(x)dx = \left(\int_0^1 g(x)dx\right)dx + \left(g(x) - \int_0^1 g(x)dx\right)dx,$$
$$\text{avec } \int_0^1 \tilde{g}(x)dx = 0 \text{ où } \tilde{g}(x) = g(x) - \int_0^1 g(x)dx.$$

Si $\tilde{f}(x) = \int_0^x \tilde{g}(s)ds$, on a $\tilde{f}'(x) = \tilde{g}(x)$ et $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) \Longleftrightarrow \tilde{\alpha} = \left(\int_0^1 g(x)dx\right)\alpha + d\tilde{f}$.

Conclusion : $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$.

(3) Pour $X = S^n$, $H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

Considérons les deux cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ introduites par les projections stéréographiques : $\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \cong \mathbb{R}^n$ et $\varphi_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \cong \mathbb{R}^n$, où $\mathcal{U} = S^N - \{N\}$ et $\mathcal{V} = S^n - \{S\}$. On a $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \longleftrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Soit $1 \leq k < n$ et $\alpha \in H^k(S^n)$, alors $d\alpha = 0$. Par le Lemme de Poincaré, on a $\alpha_{\mathcal{U}} = du$, avec $u \in \Omega^{k-1}(\mathcal{U})$, et $\alpha|_{\mathcal{V}} = dv$, avec $v \in \Omega^{k-1}(\mathcal{V})$. Sur $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, nous avons $du = dv$ (et donc définissent α). Alors $u - v \in \Omega^{k-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$. Notez que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cong \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \cong \mathbb{R}_{>0} \times S^{n-1}$. De plus $H^k(\mathbb{R}_{>0} \times S^{n-1}) \cong H^k(S^{k-1})$. Comme $1 < k < n-1$, $H^k(S^{n-1}) = 0$ (récurrence). Alors $u - v = d\omega$ sur $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

Reste à montrer que α est aussi exacte. Notez que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cong (-2, 2) \times S^{n-1}$ et soit φ une fonction de plateau sur $(-1, 1)$. Alors $\varphi\omega \in \Omega^{k-2}(S^n)$. Sans perte de généralité,il existe deux cartes $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ et $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ qui couvrent S^n telles que $\mathcal{U}' \cap \mathcal{V}' = (-1, 1) \times S^{n-1}$. Alors $u|_{\mathcal{U}' \cap \mathcal{V}'} = v|_{\mathcal{U}' \cap \mathcal{V}'} + d(\varphi\omega)$. Posons

$$\beta = \begin{cases} u & \text{sur } \mathcal{U}', \\ v + d\varphi\omega & \text{sur } \mathcal{V}'. \end{cases}$$

Nous avons que β est bien définie et $\beta \in H^{k-1}(S^{n-1})$, $d\beta = \alpha$.

Exercice 4.11.1. Calculez $H^k(X)$ si X est un espace **contractible**, c'est-à-dire que il existe $F_t : X \longrightarrow X$ telle que $F_1 = \mathrm{id}_X$ et F_0 est constante.

RAPPEL 4.11.1. Soit X une variété lisse connexe :

$$H^k(X) = \{\alpha \in \Omega^k(X) : d\alpha = 0\}/\{d\beta : \beta \in \Omega^{k-1}(X)\}.$$

On a $H^0(X) \cong \mathbb{R}$ et $H^k(X) = \{0\}$ pour $k \geq n+1$ où $n = \dim(X)$.

Par exemple,

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, n, \\ \{0\} & 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Fait : Si $F_t : X \longrightarrow Y$ est C^∞ alors $F_t^* : H^*(Y) \longrightarrow H^*(X)$ est constante.

4.12 Orientation de formes

RAPPEL 4.12.1 (Calcul)**.** Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\int_{y(A)} f(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \cdots dy_n = \int_A f(y_1(x), \ldots, y_n(x)) \left| \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \right| dx_1 \cdots dx_n.$$

D'autre part, $\Theta = f(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n = f(y_1(x), \ldots, y_n(x)) \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Une première idée pour définir l'integral de Θ est

$$\int_X \Theta = \sum_\alpha \int_{\mathcal{U}_\alpha} f(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \cdots dy_n.$$

Nous avons deux problème avec cette définition : **signe** et **finitude**.

Définition 4.12.1. Une **forme de volume** sur une variété lisse X est une forme $\omega \in \Omega^n(X)$ telle que $\omega_x \neq 0$ pour tout $x \in X$.

Soient ω et ω' deux formes de volume déterminent la même orientation si $\omega'_a = f(a)\omega_a$ avec $f > 0$ sur X. Nous noterons cette relation par $\omega \sim \omega'$. Ceci définit une relation d'equivalence.

Définition 4.12.2. Une **orientation** sur X est la classe d'equivalence $[\omega]$ d'une forme de volume ω.

Définition 4.12.3. Une variété lisse X est dite **orientable** si elle admet une forme de volume ω. La paire $(X, [\omega])$ est appelée une **variété orientée**.

Définition 4.12.4. Pour chaque $a \in X$, une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $T_a X$ est dite **positive** si $\omega_a(v_1, \ldots, v_n) > 0$.

Exemple 4.12.1.

(1) Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$, avec $X = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) : f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = c\}$ où $df_a \neq 0$ pour tout $a \in X$ (e.g. $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$). Alors X est orientable. Si $a \in X$ est tel que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \neq 0$ alors on définit

$$\omega_a^i = (-1)^i \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right)} dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Notez que ω_a^i est définie autour de a.
Fait : $\omega_a^i = \omega_a^j$ pour toutes $i \neq j$ tels que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \neq 0 \neq \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. Alors ω_a est définie pour tout $a \in X$, et par conséquent ω définit une forme de volume sur X. Si $a \in X$ alors $f(a) = c$. Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \neq 0$ alors $(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ est une carte. Et si $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \neq 0$ alors $(x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ est une carte. Nous avons $\sum_{j=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot dx_j = 0$ sur X. Donc $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \cdot (dx_j)_a = -\sum_{k \neq j} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot (dx_k)_a$. Alors

$$\omega_a^i = (-1)^i \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_a} \cdot dx_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n = \cdots = (-1)^j \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_a} \cdot dx_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n = \omega_a^j.$$

(2) Considérons $\mathbb{RP}^n = \{[x_0, \ldots, x_n]\} = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$, où $(x_0, \ldots, x_n) \sim (x'_0, \ldots, x'_n)$ s'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $(x_0, \ldots, x_n) = \lambda(x'_0, \ldots, x'_n)$. La projection $p : S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ donnée par $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto [x_0, \ldots, x_n]$ et une application $2:1$. Nous avons $p^{-1}(a) = \pm \frac{a}{||a||} \in S^n$.

Fait : $\mathbb{RP}^n$ n'est pas orientable. Supposons que Θ est une forme de volume sur $\mathbb{RP}^n$. Alors $\tilde{\Theta} = p^*(\Theta)$ est une forme de volume sur S^n. Notons que la différentielle $dp_a : T_a(S^n) \longrightarrow T_{p(a)}(\mathbb{RP}^n)$ est un isomorphisme. Nous avons

$$\tilde{\Theta}(v_1, \ldots, v_n) = \Theta_{p(a)}(dp_a(v_1), \ldots, dp_a(v_n)) \neq 0.$$

De plus $\sigma^*(\tilde{\Theta}) = \tilde{\Theta}$, où $\sigma : S^n \longrightarrow S^n$ est l'application $a \mapsto -a$. Notez que $S^n/\sigma = \mathbb{RP}^n$. Soit ω la forme de volume construit dans l'exemple (1):

$$\omega = \frac{(-1)^i}{x_i} \cdot dx_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Alors,

$$\sigma^*\omega = \frac{(-1)^i}{(-x_i)} \cdot (d(-x_0) \wedge \cdots \wedge \widehat{d(-x_i)} \wedge \cdots \wedge d(-x_n)) = \frac{(-1)^{i+1}(-1)^n}{x_i} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = -\omega.$$

Notez que $\omega = f\tilde{\Theta}$ avec $f \neq 0$ sur S^{2m}. L'égalité $\sigma \circ f = -f$, c'est-à-dire $f \in C^\infty(S^{2m})$ telle que $f(x) = -f(-x)$. Alors f s'annule sur S^{2m} (contradiction, car S^{2m} est connexe par arcs).

Si X est orientable, alors il existe une forme de volume ω. Par conséquent il existe une orientation préférée sur T_aX. Prénons un atlas $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$, avec coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$. Sans perte (faisant des permutation de $(x_1, \ldots, x_n)$) on a $\omega_a\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) > 0$ pour tout $a \in X$. Si $\mathcal{U}_j$ est une carte avec coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$, nous avons

$$\begin{aligned} \omega|_{\mathcal{U}_j} &= f(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \\ \omega|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} &= f(y_1(x), \ldots, y_n(x)) \cdot \det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$f > 0 \Longleftrightarrow \omega\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right) > 0 \text{ et } \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) > 0 \Longleftrightarrow \det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) > 0.$$

Conclusion : Si X est orientable alors il existe un atlas $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$ tel que $\det(\mathrm{Jac}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})) > 0$. Autrement dit, $T(X)$ possède une trivialization $\{\mathcal{U}_i, h_i\}$ telle que $H_{ij}(x) = h_j \circ h_i^{-1} \in \mathrm{Gl}_+(n, \mathbb{R})$.

Définition 4.12.5. Un fibré vectoriel $p : E \longrightarrow X$ est **orientable** s'il existe une trivialization telle que $H_{ij}(x) \in \mathrm{Gl}_+(n, \mathbb{R})$.

Proposition 4.12.1. Une variété lisse X est orientable ssi il existe un atlas $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$ tel que $\det(\mathrm{Jac}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})) > 0$ sur $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$.

Démonstration :

($\Longrightarrow$) Claire.

($\Longleftarrow$) Soit $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$ un tel atlas et $f_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathbb{R}$ une partition d'unité compatible, c'est-à-dire supp$(f_i) \subseteq \mathcal{U}_i$, avec $0 \leq f_i \leq 1$ et $\sum_{i \in I} f_i(a) = 1$. Soit $\omega_i := f_i \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega^n(X)$ et $\omega_a := \sum_{i \in I} \omega_i(a) \in \Omega^n(X)$. À montrer $\omega_a \neq 0$. Comme $\sum_{i \in I} f_i(a) = 1$, nous avons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $f_{i_0}(a) > 0$. Localement, $\omega_a = \omega_{i_1} + \cdots + \omega_{i_k}$, avec $\omega_{i_r}(a) \neq 0$ et $a \in \mathcal{U}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{U}_{i_k}$. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées associées à $\mathcal{U}_{i_k}$. Nous avons $\omega_{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) > 0$ et

$$\omega_{i_r} = f_{i_r}(y_1(x), \ldots, y_n(x)) \cdot \det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

$$\omega_{i_r}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = n f_{i_r}(y_1, \ldots, y_n) \cdot \det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) > 0, \text{ car } f_{i_r}(y_1, \ldots, y_n) > 0 \text{ et } \det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) > 0.$$

Alors $\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \sum_{r=1}^{k} \omega_{i_r}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) > 0$.

□

Corollaire 4.12.1. Une sous-variété $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ est orientable ssi il existe une application (**vecteur normal**) $V : X \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^{n+1}$ $(a \mapsto V(a) \in \mathbb{R}^{n+1})$ telle que :

(1) $V(a) \neq 0$.

(2) $V(a) \perp T_a(X)$.

Exemple 4.12.2. $X = \{(x_0, \ldots, x_n) : f(x_0, \ldots, x_n) = c\}$ avec $df|_a \neq 0$. Alors $V(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$.

Exercice 4.12.1. Considérons $\mathbb{RP}^{2m} \overset{\text{Withney}}{\longrightarrow} \mathbb{R}^{4m+1}$. Montrer qu'il n'existe pas $F_1, \ldots, F_{2m+1}$ fonctions telles que $\mathbb{RP}^{2m} = \{F_1(x) = \cdots = F_{2m+1}(x) = 0\}$.

4.13 Integration de formes

Soit X une variété orientée avec $\dim(X) = n$. Soit $\Theta \in \Omega^n_c(X)$ avec supp$(\Theta) \subseteq X$ (support compact). Considérons un atlas orienté $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i, f_i)\}$, c'est-à-dire $\det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) > 0$, et $\{f_i\}$ est une partition d'unité. Posons $\Theta_i := f_i \circ \Theta \in \Omega^n(X)$. Nous avons $\Theta_a = \sum_{i \in I} \Theta_i(a)$ (comme supp(Θ) est compact, c'est suffit de nombre fini de cartes qui couvrent supp(Θ)). Localement, $\Theta_i|_{\mathcal{U}_i} = g_i(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Définissons

$$\int_X \Theta := \sum \int_{\mathcal{U}_i} g(x) dx_1 \cdots dx_n = \sum_i \int_X \Theta_i,$$

où

$$\int_X \Theta_i = \int_{\mathcal{U}_i} g_i(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{\mathcal{V}_i} g_i(x(y)) \cdot \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n, \text{ où } \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right) > 0.$$

Théorème 4.13.1 (Stokes)**.** Soit X une variété orientée. Si $\beta \in \Omega_c^{n-1}(X)$ alors $\int_X d\beta = 0$.

Démonstration : Prenons un atlas orienté $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$ avec une partition d'unité compatible $\{f_i\}$. Notez que $\beta = \sum_i f_i \cdot \beta$. Soit $\beta_i = f_i \cdot \beta$ avec support compact dans $\mathcal{U}_i$. Donc $\beta_i \in \Omega_C^{k-1}(X)$. Suffit à calculer $\int_X d\beta_i = 0$. Nous avons $\mathrm{supp}(\beta_i) \subseteq \mathcal{U}_i$ est compact. Localement $\beta_i = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$, où $\mathrm{supp}(a_j) \subseteq \mathcal{U}_i$ est compact. Alors

$$\begin{aligned}
\int_X d\beta_i &= \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} d(a_j(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial a_1}{\partial x_1}(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial a_1}{\partial x_1}(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial a_1}{\partial x_1}(x) dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n \text{ par le Théorème de Fubini} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_1(x)|_{-T}^{T} \, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= 0, \text{ comme } a_1(x) \text{ a support compact dans } \mathbb{R}^n, \\
&\qquad \text{il existe } T > 1 \text{ tel que } a_1(T) = a_1(-T).
\end{aligned}$$

Alors $\int_X d\beta_i = 0$ et par conséquent $\sum_i \int_X d\beta = 0$.

□

Remarque 4.13.1. Plus général : $\int_X d\beta = \int_{\partial X} \beta$ où X est une variété à bord (voir [13]).

Corollaire 4.13.1. Si X est une variété compacte et orientée, alors $H^n(X) \neq \{0\}$.

Démonstration : Soit $\omega \in \Omega^n(X)$ une forme de volume. À montrer $[\omega]_{\mathrm{dR}} \in H^n(X)$ n'est pas nulle. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_X \omega &= \sum_i \int_X f_i \cdot \omega = \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} g_i(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \text{ avec } g_i \geq 0 \text{ et } g_i > 0 \text{ sur un compacte de } \mathbb{R}^n, \\
&= \sum \int_{\mathbb{R}^n} g_i(x) dx_1 \cdots dx_n > 0.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.13.2. S^{2m} n'admet pas des champs de vecteurs qui s'annulent jamais.

Démonstration : Sinon, soit $V : S^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ telle que pour tout $a \in S^{2m}$, $V(a) \neq 0$. Écrire $a = (x_0, \ldots, x_{2m})$ et $V(a) \perp a$. Sans perte, $||V(a)|| = 1$. Posons $\tilde{V} = \frac{V}{||V||}$. Soit $F_t : S^{2m} \longrightarrow S^{2m}$ l'application $F_t(a) = \cos(t) \cdot a + \sin(t) \cdot V(a)$. Nous avons $||F_t(a)||^2 = \langle \cos(t) \cdot a + \sin(t) \cdot V(a), \cos(t) \cdot a + \sin(t) \cdot V(a) \rangle = 1$. Notez que $F_0 = \mathrm{id}$ et $F_\pi = -\mathrm{id}$. Donc $[F_t^*(\omega)]_{\mathrm{dR}}$ ne depend pas de t. Nous avons $[\omega]_{\mathrm{dR}} = -[\omega]_{\mathrm{dR}}$ (contradiction).

□

Théorème 4.13.2. Soit X une variété compacte et orientée. Alors $H^n(X) \cong \mathbb{R}$.

Lemme 4.13.1. Soit $\mathbb{D}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ et $\omega_\lambda \in \Omega_C^n(\mathbb{D}^n)$ telle que $\int_{\mathbb{D}^n} \omega_\lambda = 0$. Alors il existe une forme $\beta \in \Omega_C^{n-1}(\mathbb{D}^n)$ avec $\omega_\lambda = d\beta_\lambda$.

Démonstration : Par récurrence sur n :

(i) $n = 1$: $\omega = f(x, \lambda)dx$ avec $\mathrm{supp}(f(x, \lambda)) \subseteq (-1, 1)$ compact. Alors

$$\int_{-1}^{1} \omega = \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} f(x, \lambda)dx = 0.$$

Soit $\beta(x, \lambda) = \int_{-1}^{1} f(u, \lambda)du$. Alors $d\beta = \omega$. À montrer que $\mathrm{supp}(\beta) \subseteq (-1, 1)$ est compact.

Supposons ce lemme soit vrai pour $k = 1, \ldots, n-1$. Soit $\omega = f(x_1, \ldots, x_n, \lambda)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ avec $\mathrm{supp}(f) \subseteq \mathbb{D}^n$ compact. Posons $x_n = t$ et $\breve{\omega}_{t,\lambda} = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t, \lambda)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$. Soit σ une fonction de plateau. Alors

$$\int_{\mathbb{D}^{n-1}} \sigma dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} = 1, \ \sigma dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \in \Omega^{n-1}(\mathbb{D}^{n-1}).$$

Posons $g(t, \lambda) = \int_{\mathbb{D}^{n-1}} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t, \lambda)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$. Nous avons que

$$\tilde{\omega} = \breve{\omega}_{t,\lambda} - g(t, \lambda) \cdot \sigma dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

a support compact dans $\mathbb{D}^{n-1}$. De plus, $\int_{\mathbb{D}^{n-1}} \tilde{\omega} = 0$. Par la récurrence, $\tilde{\omega} = d\gamma_{t,\lambda}$, avec $\mathrm{supp}(\gamma) \subseteq \mathbb{D}^{n-1}$ compact. Nous avons

$$\begin{aligned} d\gamma \wedge dx_n = d(\gamma \wedge dx_n) = \tilde{\omega} \wedge dx_n = f(x_1, \ldots, x_n, \lambda)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n - g(x_n, \lambda) \cdot \sigma dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ f(x_1, \ldots, x_n, \lambda)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = g(x_n, \lambda) \cdot \sigma dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n + d(\gamma \wedge dx_n), \end{aligned}$$

où $\mathrm{supp}(\gamma \wedge dx_n) \subseteq \mathbb{D}^n$ est compact. Soit

$$\zeta(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = (-1)^{n-1} \left(\int_{-1}^{x_n} g(u, \lambda) \cdot \sigma du \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Alors

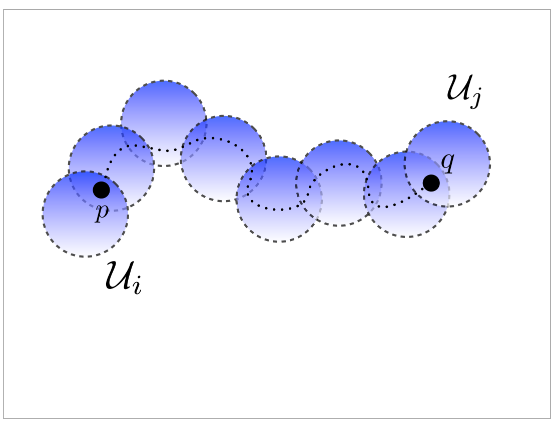
$$d\zeta = g(x_n, \lambda) \cdot \sigma dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n + d(\sigma dx_1 \wedge \cdot \wedge dx_{n-1})$$
$$g(x_n, \lambda) \cdot \sigma dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = d\zeta - d(\sigma dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}).$$

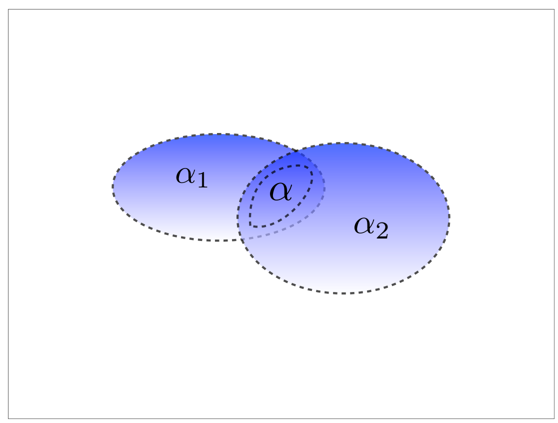
Reste à voir $\mathrm{supp}(\zeta) \subseteq \mathbb{D}^n$ est compact.

$\square$

Démonstration du Théorème 4.13.2 : Nous allons donner une idée de la preuve. Soit ω une forme de volume. Sans perte $\int_X \omega = 1$. Soit $\Theta \in \Omega^n(X)$ et posons $\int_X \Theta = 0$. Notez que $\Theta = d\beta$ ssi $\int_X \Theta = 0$ ssi $\Theta = \lambda \cdot \omega + d\beta$. À montrer $\Theta = d\beta$ avec $\beta \in \Omega^{n-1}(X)$. Soit $\{\mathcal{U}_i, \varphi_i, f_i\}$ une partition d'unité, avec $\varphi_i : \mathcal{U}_i \cong \mathbb{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Comme X est compact, nous avons $i = 1, 2, \ldots, k$. Posons $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_k$, où $\Theta_i = f_i \circ \Theta$ avec $\mathrm{supp}(\Theta_i) \subseteq \mathcal{U}_i \cong \mathbb{D}^n$ compact. Soit $\alpha_i = \sigma dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, avec σ est une fonction de plateau, telle que $\int_X \alpha_i = 1$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées sur $\mathcal{U}_i$. Montrons que $[\alpha_i]_{\mathrm{dR}} = [\alpha_j]_{\mathrm{dR}}$. Sans perte, supposons que $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k$ est une chaîne de cartes telle que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_{i-1} \neq \emptyset$.

Nous allons montrer $[\alpha_1]_{\mathrm{dR}} = [\alpha_k]_{\mathrm{dR}}$. Notez que $[\alpha_1]_{\mathrm{dR}} = [\alpha_2]_{\mathrm{dR}}$. Soit $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Notez que $\mathrm{supp}(\alpha) \subseteq \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ et $\int_X \alpha = 1$. Par le lemme précédent, $\alpha_1 - \alpha_2 = d\beta_1$, où $\mathrm{supp}(\beta_1) \subseteq \mathcal{U}_1$ est compact.





Alors $\alpha - \alpha_2 = d\beta_2$, où $\mathrm{supp}(\beta_2) \subseteq \mathcal{U}_2$. On a $[\alpha_1]_{\mathrm{dR}} = [\alpha]_{\mathrm{dR}} = [\alpha_2]_{\mathrm{dR}} = \cdots$. Donc $\Theta_j = \left(\int_X \Theta_j\right) \cdot \alpha_j + d\tilde{\beta}_j$ où $\tilde{\beta}_j \subseteq \mathcal{U}_j$ est compact. Alors $[\Theta]_{\mathrm{dR}} = \sum_{j=1}^k [\Theta_j]_{\mathrm{dR}} = \sum_{j=1}^k \left(\int_X \Theta_j\right) \cdot [\alpha_j]_{\mathrm{dR}} = 0$. Par conséquent,

$$\int_X \Theta = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^k \int_X \Theta_j = 0 \Longrightarrow [\Theta]_{\mathrm{dR}} = 0.$$

$\square$

Corollaire 4.13.3. $H^n(S^n) \cong \mathbb{R}$.

Soit $F : X \longrightarrow Y$ une application lisse, où X et Y sont variétés compactes et orientables avec $\dim(X) = \dim(Y)$. Si ω_Y est une forme de volume de Y avec $\int_Y \omega_Y = 1$, alors $[F^*(\omega_Y)]_{\mathrm{dR}} = k \cdot [\omega_X]_{\mathrm{dR}}$ où $\int_X \omega_X = 1$.

Définition 4.13.1. Le **degré** de F est définie par $\deg(F) := k$.

Théorème 4.13.3. Soit F comme ci-dessus. Si $b \in Y$ est un point régulier pour F, alors

$$\deg(F) = \sum_{a \in F^{-1}(b)} \operatorname{sign}(\det(D_a F)).$$

En particulier, $\deg(F) \in \mathbb{Z}$.

Remarque 4.13.2.

(1) $b \in Y$ est **régulier** si pour tout $a \in F^{-1}(b)$, l'application $(DF)_a : T_a(X) \longrightarrow T_{F(a)}(Y)$ est surjective. Dans notre cas, b est régulier ssi $D_a F$ est un isomorphisme pour tout $a \in F^{-1}(b)$

(2) $\operatorname{sign}(\det(D_a F))$ est bien définie par les orientations de $T_a X$ et $T_b Y$.

(3) **Théorème de Sard :** Un point $b \in Y$ est dit **critique** s'il n'est pas régulier. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de points critiques de Y. Alors la mesure de $\mathcal{C}$ est zéro.

Démonstration du Théorème 4.13.3 : Si $b \in Y$ est un point régulier alors $F^{-1}(b)$ définit une variété lisse (non-connexe) de dimension zéro. Par le Théorème d'inversion locale, il existe $\mathcal{U}_1 \ni a_1, \ldots, \mathcal{U}_k \ni a_k$ tels que $F : \mathcal{U}_i \cong F(\mathcal{U}_i) = \mathcal{U} \ni b$, avec $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$. Il existe une forme α avec $\operatorname{supp}(\alpha) \subseteq \mathcal{U}$ telle que $\int_X \alpha = 1$. Nous avons $F^*(\alpha) = \tilde{\alpha}_1 + \cdots + \tilde{\alpha}_k$, où $\tilde{\alpha}_i = F^*(\alpha)|_{\mathcal{U}_i}$. Donc $[F^*(\alpha)] = [\tilde{\alpha}_1] + \cdots + [\tilde{\alpha}_k]$. Par le théorème précédent, $[\tilde{\alpha}_i] = \left(\int_X \tilde{\alpha}_i\right) \cdot [\omega_Y]$. Nous avons

$$\int_X \tilde{\alpha}_i = \int_{\mathcal{U}_i} F^*(\alpha) = \operatorname{sign}(\operatorname{Jac}(F)) \cdot \int_Y \alpha.$$

Pour $\alpha = f(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$, nous avons

$$\begin{aligned} F^*(\alpha) &= (f(F(y))) \cdot \det(\operatorname{Jac}(F)) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ \int_X F^*(\alpha) &= \int_{\mathbb{R}^n} f \circ F(y) |\det(\operatorname{Jac}(F))| dx_1 \cdots dx_n \text{ (Lebesgue).} \end{aligned}$$

Cela nous aide à obtenir le résultat.

$\square$

Exemple 4.13.1. Considérons $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{CP}^1 \cong S^2$. Soit $F : \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{C^\infty} \overline{\mathbb{C}}$

$$F(z) = \begin{cases} z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_0 & z \in \mathbb{C}, \\ \infty & z = \infty. \end{cases}$$

Calculons $\deg(F)$. Soit $F_t : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ l'application $F_t(z) = z^k + t \cdot (a_1 z^{k-1} + \cdots + a_0)$. Notez que F_t^* est constante sur $H^2(\overline{\mathbb{C}})$. Alors $\deg(F_1) = \deg(F_0)$. Suffit de calculer $\deg(z^k)$. Soit $\omega = f(r) \cdot r dr \wedge d\theta$ telle que $\int_{\overline{\mathbb{C}}} \omega = \int_{\mathbb{C}} \omega = 1$. Voyez z^k comme $(r, \theta) \mapsto (r^k, k\theta)$. Nous avons

$$F_0^*(\omega) = k \cdot f(r^k) \cdot r^k dr^k \wedge d\theta,$$
$$\int_{\mathbb{C}} F_0^*(\omega) = \int_{r,\theta} k \cdot f(r^k) \cdot r^k dr d\theta = k \int_{\mathbb{C}} \omega.$$

Cela implique que $\deg(F_1) = k$.

Conclusion : $F_1(z)$ a degré $k \neq 0$. Alors $F_1 : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ est surjective (sinon $\deg(F) = 0$). Par conséquent, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $F_1(z_0) = 0$.

CHAPITRE 5

CONNEXIONS

5.1 Fibrés orientables

RAPPEL 5.1.1. Soit $\pi : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel de $\mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(E) = k$, avec trivialization locale : $\{\mathcal{U}_i\}$ cartes de X. On a des difféomorphismes

$$h_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k$$

tels que sur $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, l'application

$$h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{R}^k \longrightarrow (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{R}^k$$

a la forme $(h_\beta \circ h_\alpha^{-1})(x, v) = (x, H_{\alpha\beta}(x)v)$ où $H_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \xrightarrow{C^\infty} \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$.
Étant donnés $\{H_{\alpha\beta}(x)\}$ on peut reconstruire $\pi : E \longrightarrow X$ comme l'union disjointe $\bigsqcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k$ avec la relation

$$(x, v) \sim (y, w) \text{ ssi } x = y \text{ et } w = H_{\alpha\beta}(x)v.$$

Alors $E := \bigsqcup_\alpha (\mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k)/\sim$ sera un fibré si :

(1) $H_{\alpha\alpha}(x) = \mathrm{Id}$ sur $\mathcal{U}_\alpha$.

(2) $H_{\alpha\beta}(x) = H_{\beta\alpha}^{-1}$ sur $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$.

(3) $H_{\alpha\beta}(x) \circ H_{\beta\gamma}(x) \circ H_{\gamma\alpha}(x) = \mathrm{Id}$ sur $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma$.

Exemple 5.1.1.

(1) **Fibré trivial :** $E_0 = \mathbb{R}^k \times X$.

(2) **Fibré tangent :** TX.

(3) **Fibré cotangent :** T^*X.

(4) **Fibré tensoriel :** $T_p^q X$.

Définition 5.1.1. Un fibré vectoriel $\pi : E \longrightarrow X$ est **orientable** s'il existe une trivialization locale avec $H_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \xrightarrow{C^\infty} \mathrm{Gl}_+(k, \mathbb{R})$.

Remarque 5.1.1.

(1) E est orientable ssi le groupe standard est réduit à $\mathrm{Gl}_+(k, \mathbb{R}) \subsetneq \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$.

(2) Si E est orientable, alors dans une trivialization avec $H_{\alpha\beta} \in \mathrm{Gl}_+(k, \mathbb{R})$ on peut définir orientation sur chaque fibre : sur $\mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k \cong \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ on prend $\{e_1, \dots, e_k\}$ la base standard orienté positive. Alors l'orientation est bien définie car si $x \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, $\{e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha\}$ et $\{e_1^\beta, \dots, e_k^\beta\}$ définissent la même orientation ($\det(H_{\alpha\beta}(x)) > 0$).

Soit V un espace vectoriel de dimension k, $\eta \in \Lambda^k(V^*) \neq 0$, $\eta = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_k^*$. Pour $A \in \mathrm{Gl}(V)$ on a

$$A \mapsto A \circ \eta(v_1, \dots, v_k) = \eta(Av_1, \dots, Av_k) = \det(A)\eta(v_1, \dots, v_k)$$

Donc

$$\mathrm{St}(\eta) = \mathrm{SL}(V) = \{A \in \mathrm{Gl}(V) : \det(A) = 1\}.$$

Lemme 5.1.1. $\pi : E \longrightarrow X$ est orientable ssi E possède une section lisse η de $\Delta^k(E^*)$ telle que pour tout $a \in X$, $\eta_a \neq 0$.

Démonstration : Même preuve que le cas $E = TX$ (fait). □

Fait :

(1) $\mathrm{GL}_+(V)/\mathrm{SL}(V) \cong \mathbb{R}_+$ - contractile.

(2) $\mathrm{Gl}(k, \mathbb{R}) \supseteq \mathrm{O}(k, \mathbb{R})$ - compact maximale. Le quotient $\mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})/\mathrm{O}(k)$ (contractile) est l'espace vectoriel de matrices symétriques $k \times k$. Toute matrice peut être écrit comme $A = O \circ S$, avec O ortogonal et S symétrique (forme polaire).

Lemme 5.1.2. Toute fibré vectoriel $\pi : E \longrightarrow X$ possède une trivialization locale avec

$$H_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \xrightarrow{C^\infty} \mathrm{O}(k) \subseteq \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R}).$$

5.2 Structures complexes sur un fibré vectoriel

Définition 5.2.1. Une **métrique euclidienne** sur $pi : E \longrightarrow X$ est une section lisse $g \in C^\infty(X, E^* \otimes E^*)$ telle que pour tout $a \in X$, g_a est symétrique et définie positive sur E_a.

Remarque 5.2.1. $\pi : E \longrightarrow X$ possède une trivialization avec $H_{\alpha\beta}(x) \in O(k)$ ssi E admet une métrique euclidienne.

($\Longrightarrow$) Sur $\mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k$ on prend $g_\alpha(a)$ comme le produit standard de $\mathbb{R}^k$ (pour tout $a \in \mathcal{U}_\alpha$). Si $a \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ alors $g_\alpha(a) = g_\beta(a)$, car $H_{\alpha\beta}(a) \in \mathrm{O}(k) = \mathrm{St}(g_\alpha) \subseteq \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$.

($\Longleftarrow$) Il existe $g \in C^\infty(X, E^* \otimes E^*)$ une métrique euclidienne. Soit $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ une trivialization locale. Nous avons $\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \cong \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k$. Soit $\{e_1^\alpha, \ldots, e_k^\alpha\}$ la base standard et $a \in \mathcal{U}_\alpha$. Par Gram-Schmidt : $\{\tilde{e}_1^\alpha(a), \ldots, \tilde{e}_k^\alpha(a)\}$ est une base orthonormale relativement g_α. Si $\{\mathcal{U}_\alpha, \tilde{e}_1^\alpha(a), \ldots, \tilde{e}_k^\alpha(a)\}$ est une trivialization de E sur $\mathcal{U}_\alpha$ et sur $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \ni a$: $\{\tilde{e}_1^\alpha(a), \ldots, \tilde{e}_k^\alpha(a)\}$ et $\{\tilde{e}_1^\beta(a), \ldots, \tilde{e}_k^\beta(a)\}$ sont des bases orthonormales. Donc $\tilde{H}_{\alpha\beta}(a)$ est la transition d'une à l'autre et est dans $\mathrm{O}(k)$.

Démonstration du Lemme 5.1.2 : Tout $\pi : E \longrightarrow X$ possède une métrique euclidienne g. Soit $\{\mathcal{U}_\alpha, h_\alpha\}$ une trivialization locale et $\{f_\alpha\}$ une partition d'unité subordonnée, c'est-à-dire $f_\alpha \in C^\infty(X)$, $\mathrm{supp}(f_\alpha) \subseteq \mathcal{U}_\alpha$, et $\sum_\alpha f_\alpha(a) = 1$, avec $f_\alpha(X) \subseteq [0,1]$. Notez que $h_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \cong \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k$. Posons $g_\alpha(\cdot,\cdot)$ le produit euclidien standard sur $\mathbb{R}^k$. Alors $f_\alpha g_\alpha(\cdot,\cdot) \in C^\infty(X, E^* \otimes E^*)$ est symétrique et $(f_\alpha g_\alpha)(u,u) \geq 0$. Posons $g := \sum_\alpha f_\alpha g_\alpha$. Alors $g \in C^\infty(X, E^* \otimes E^*)$ définie une métrique euclidienne sur E. Calculons $g_\alpha(u,u)$. Pour tout $a \in X$ il existe α_0 tel que $a \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$ et $f_{\alpha_0}(a) > 0$. Donc $g_a(u,u) \geq f_{\alpha_0}(a) g_{\alpha_0}(u,u) > 0$ si $u \neq 0$. $\square$

Principe général : Si $\pi : E \longrightarrow X$ est une fibré vectoriel avec $H_{\alpha\beta}(x) \in G \subseteq \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$ et $H \subseteq G$ tel que G/H est contractile, alors on peut trouvez une trivialization locale de E avec $H_{\alpha\beta}(x) \in H$.

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension complexe m. Soit $\{e_1, \ldots, e_m\}$ une base complexe de V. Considérons $V_\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel réel. Notez que $\{e_1, \ldots, e_m, i \cdot e_1, \ldots, i \cdot e_m\}$ est une base de $V_\mathbb{R}$. Soit $J \in \mathrm{End}(V_\mathbb{R})$, $J(v) = i \cdot v$. Dans la base choisie : $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}_{2m \times 2m}$. Notez que $J^2 = -\mathrm{Id}$.

Définition 5.2.2. Soit V un espace vectoriel réel de dimension $2m$. Une structure complexe est un $J \in \mathrm{Gl}(V)$ tel que $J^2 = -\mathrm{Id}$.

$$(a + ib)v := av + bJv.$$

$F \in \mathrm{Gl}(V_\mathbb{C})$ est un élément de $\mathrm{Gl}(V_\mathbb{R})$.

$$F(iv) = iF(v) \Longleftrightarrow F \circ J = J \circ F.$$

Dans notre base, $F = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ ($F_\mathbb{C} = A + iB$).

Exercice 5.2.1. $\det(F) = (\det(A))^2(\det(B))^2 > 0$.

Définition 5.2.3. Soit $pi : E \longrightarrow X$ un fibré réel de $\mathrm{rang}(E) = 2m$. Une structure complexe sur E est la donnée d'une section $J \in C^\infty(X, E^* \otimes E^*)$ telle que pour tout $a \in X$, $J_a^2 = -\mathrm{id}|_{E_a}$.

Fait :

(1) Un tel J définie une structure de fibré complexe sur E.

(2) J réduit le groupe $\mathrm{Gl}(2m, \mathbb{R})$ à $\mathrm{Gl}(m, \mathbb{C}) = \{F : J \circ F = F \circ J\}$. En particulier, E est orientable.

Exercice 5.2.2. Si $\mathrm{rang}(E) = 2$ alors E est complexe ssi E est orientable (considérez la rotation $\pi/2$).

RAPPEL 5.2.1. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une application $H : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ est un **produit hermitien** si :

(1) $H(\lambda u, \mu v) = \lambda\overline{\mu}H(u,v)$.

(2) $H(u,v) = \overline{H(v,u)}$.

(3) $H(u,u) > 0$.

Cela implique que il existe une base $\{e_1, \ldots, e_m\}$ telle que $H(u,v) = \sum_{i=1}^{m} u_i\overline{v_i}$.

Considérons

$$\mathrm{U}(m) = \mathrm{St}(H) := \{F \in \mathrm{Gl}(V,\mathbb{C}) : H(F(v),F(u)) = H(u,v)\} \cong \{F : F \cdot \overline{F}^t = \mathrm{Id}\}.$$

Fait : $\mathrm{U}(m) \subseteq \mathrm{Gl}(m,\mathbb{C})$ est maximale et $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{C})/\mathrm{U}(m)$ est contractile (forme polaire complexe).

Lemme 5.2.1. Si (E,J) est un fibré vectoriel complexe sur X alors il existe un métrique euclidienne $h \in C^\infty(X, E^* \otimes E^*)$ sur E telle que $h_a(J_a u, J_a v) = h_a(u,v)$, pour tout $u, v \in E_a$.

Remarque 5.2.2. $H_a(u,v) = h_a(u,v) - ih_a(J_a u, v)$ est un produit hermitien.

5.3 Connexions sur un fibré vectoriel

Considérons le fibré tangent $E = TX \longrightarrow X$. Nous savons que $\mathrm{Diff}(X)$ agit sur $C^\infty(X,TX)$. Nous avons la Derivée de Lie

$$\mathcal{L}_V : C^\infty(X,TX) \longrightarrow C^\infty(X,TX)$$

pour dériver des sections lisses de $TX \longrightarrow X$.

Problème : En général, comment dériver des sections de $\pi : E \longrightarrow X$?

Définition 5.3.1. Une **connexion** sur E est une application

$$\begin{aligned} \nabla : C^\infty(X,TX) \times C^\infty(X,E) &\longrightarrow C^\infty(X,E) \\ (V,S) &\mapsto \nabla_V S \end{aligned}$$

telle que :

(1) Pour tout $V \in C^\infty(X,TX)$, ∇_V est $\mathbb{R}$-linéaire.

(2) $\nabla_V(f \cdot S) = V(f)\cdot S + f \cdot \nabla_V S$.

(3) $\nabla_{f\cdot V + g\cdot U} S = f(\nabla_V S) + g(\nabla_U S)$, pour toutes $f, g \in C^\infty(X)$ et $U, V \in C^\infty(U,V) \in C^\infty(X,TX)$.

Soit $\mathcal{U}$ une carte trivializante pour E et TX. Nous avons

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad S = \sum_{j=1}^{k} a_j(x) \cdot S_j^{\mathcal{U}}(x),$$

$$\nabla_V S = \sum_{i,j} \left(\nabla_{V_i \frac{\partial}{\partial x_i}} a_j S_j^{\mathcal{U}}(x) \right) = \sum_{i,j} \left(V_i(x) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} a_i(x) S_j^{\mathcal{U}}(x) \right)$$

$$= \sum_{i,j} V_i(x) \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) S_j^{\mathcal{U}}(x) + a_j(x) \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} S_j^{\mathcal{U}}(x) \right),$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} S_j^{\mathcal{U}}(x) = \sum_k A_{ij}^k(x) S_k^{\mathcal{U}}(x).$$

$$\nabla_V S = \sum_{i,j} \left(V_i(x) \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) S_j(x) + a_j(x) \sum_k A_{ij}^k(x) S_k(x) \right)$$

$$\nabla_V S = (dS)_V + A_V \circ S, \text{ où } (dS)_V = da_1(V)S_1 + \cdot + da_k(V)S_k$$

$$\text{et } A_V \circ S \text{ est un operateur d'ordre zéro.}$$

Conclusion : Pour tout $V \in C^\infty(X, TX)$, ∇_V est un operateur différentiel linéaire d'ordre 1.

Lemme 5.3.1. Si ∇ est ∇' sont deux connexions sur E, alors :

(1) $t\nabla + (1-t)\nabla'$ est aussi une connexion.

(2) $\nabla_V - \nabla_{V'} = A_V \in C^\infty(X, T^* \otimes E^* \otimes E)$.

Remarque 5.3.1. L'espace de connexions sur E est un espace affine de dimension ∞ (s'il n'est pas vide).

Démonstration : (1) est évident. À vérifier (2).

(i) Pour tout $V \in C^\infty(X, TX)$, A_V est $\mathbb{R}$-linéaire.

(ii) $A_V(fS) = f \cdot A_V(S)$.

(iii) $A_{fV}(S) = f \cdot A_V(S)$.

Soit $\mathcal{U}$ une trivialization, $V = \sum_i V_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$, $S = \sum_j a_j(x) \cdot S_j(x)$. Alors

$$A_V(S) = \sum_{i,j} V_i(x) \cdot a_j(x) \cdot \left(A_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(S_j) \right),$$

$$A_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(S_j) = \sum_k A_{ij}^k(x) \cdot S_k,$$

$$A_V(S) = \sum_{i,j} V_i(x) \cdot a_j(x) \cdot \left(A_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(S_j) \right)$$

$$= \sum_{i,j,k} V_i(x) \cdot a_j(x) \cdot A_{ij}^k(x) \cdot S_k(x) \in C^\infty(X, T^*X \otimes E^* \otimes E).$$

□

Théorème 5.3.1. Il existe une infinité de connexions sur tout fibré vectoriel $\pi : E \longrightarrow X$.

Idée : Considérons $E_0 = \mathbb{R}^k \times X$ le fibré triviale. Notez que $S \in C^\infty(X, E_0)$ ssi $S = (f_1, \dots, f_k)$ où $f_i \in C^\infty(X)$. Soit
$$\dot{\nabla}_V(S) := (V(f_1), \dots, V(f_k))$$
la **connexion plâte**. Si $\pi : E \longrightarrow X$ est un fibré général, prenons une trivialization locale $\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \cong \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k$. Soit $\dot{\nabla}^\alpha$ la connexion plâte sur $\mathcal{U}_\alpha \subseteq X$. Prenons $\{S_1^\alpha, \dots, S_k^\alpha\}$ une base trivializante. Alors

$$\dot{\nabla}_V^\alpha(a_i(x) \cdot S_i^\alpha) = \sum_j V(a_i) \cdot S_j^\alpha.$$

Sur $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, on a $\dot{\nabla}_V^\alpha \left(\sum_j a_j^\alpha(x) \cdot S_j^\alpha\right) = \sum V(a_j) \cdot S_j^\alpha$ et $\dot{\nabla}_V^\beta \left(\sum_{j,k} a_j(x) \cdot (H_{\alpha\beta}(x))_k \cdot S_k^\beta\right) \neq \dot{\nabla}_V^\alpha$, car $H_{\alpha\beta}(x)$ dépend de x.

Démosntration du Théorème 5.3.1 : Soit f_α une partition d'unité relativement à $\{\mathcal{U}_\alpha\}$. Considérons $f_\alpha \cdot \dot{\nabla}_V^\alpha : C^\infty(X, E) \xrightarrow{\text{lin}} C^\infty(X, E)$et posons $\nabla_V := \sum_\alpha f_\alpha \cdot \dot{\nabla}_V^\alpha$. À vérifier que ∇ définit une connexion. $\square$

Soit ∇ une connexion sur E et $\mathcal{U} \subseteq X$ une trivialization $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k$. Soit $\{S_1(x), \dots, S_k(x)\}$ une base de E_x, pour tout $x \in \mathcal{U}$. Considérons la connexion plâte $\dot{\nabla}^{\mathcal{U}}$. Alors

$$\dot{\nabla}_V \left(\sum_{j=1}^k a_j(x) \cdot S_j(x)\right) = \sum_{j=1}^k V(a_j) \cdot S_j(x).$$

Nous avons que $\nabla_V - \dot{\nabla}_V^{\mathcal{U}} = A_V \in C^\infty(\mathcal{U}, T^*X \otimes E^* \otimes E)$. Rappelez que $E^* \otimes E \cong \operatorname{End}(E)$.

$$A_V = \begin{pmatrix} \omega_1^1(V) & \omega_1^2(V) & \cdots & \omega_1^k(V) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k^1(V) & \omega_k^2(V) & \cdots & \omega_k^k(V) \end{pmatrix}$$

où $\omega_i^j(V) \in \Omega^1(\mathcal{U})$, les ω_i^j sont appelés **formes de connexions**.

5.4 Transport parallèle

Définition 5.4.1. Soit $c : [0,1] \xrightarrow{C^\infty} X$ une courbe lisse avec $c(0) = a$ et $c(1) = b$. Une section de $\pi : E \longrightarrow X$ **le longue du** $c(t)$ est une application $s : [0,1] \longrightarrow E$ de maniére que :

$$c(t) = \pi \circ s(t) \iff \text{pour tout } t \in [0,1],\ s(t) \in \pi_{c(t)}^{-1} \cong E_{c(t)}.$$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "c"'] & X \end{tikzcd}$$

Définition 5.4.2. Soit $\pi : (E, \nabla) \longrightarrow X$ et $s(t)$ une section lisse le longue de $c(t)$ (avec $t \in [0,1]$). On dit que $s(t)$ est **parallèle le longue de** $c(t)$ si $\nabla_{\dot{c}(t)} s(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

Remarque 5.4.1.

(1) $(\nabla_V S)_a$ ne dépend que de V_a.

(2) Toute section lisse le longue de $c(t)$ est la restriction sur $c(t)$ d'une section lisse de E.

Théorème 5.4.1. Soit $s_0 \in E_{c(0)}$. Alors il existe une et une seule section parallèle s le longue de $c(t)$ telle que $s(0) = s_0$. De plus, l'application $\tau^c : E_{c(0)} \longrightarrow E_{c(1)}$ définie par $\tau^c(s_0) = s(1)$ est une isomorphisme d'espaces vectoriels. L'application τ^c s'appele **transport parallèle le longue de** $c(t)$.

Démonstration : Soit $\mathcal{U}$ une trivialization locale telle que $c(t) \subseteq \mathcal{U}$. Soit $\{s_1(x), \ldots, s_k(k)\}$ une base trivializante de E. Soit $\nabla = d + A$, avec $A = (\omega^i_j(0))$. Écrivons $c(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Alors $\dot{c}(t) = \dot{x}_1(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \dot{x}_n(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}$. Posons $s(t) = \sum_{j=1}^k a_j(x(t)) \cdot s_j(x(t))$. Alors

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{c}(t)} S(t) &= \sum_{i,j} \dot{x}_i(t) \cdot \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) \cdot x(t) \cdot s_j(x(t)) + \sum_{i,j} a_j(x) \cdot \omega^i_j(\dot{c}(t)) \cdot s_j(x(t)) \\ &= \sum_j \left(\frac{d}{dt} a_j(x(t)) + \omega^i_j(\dot{c}(t))\right) s_j(x(t)) = 0\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt} a_j(t) + \sum_i \omega^i_j(\dot{c}(t)) \cdot a_i(t) = 0 \text{ (Système de équations différentielles ordinaires).}$$

$\square$

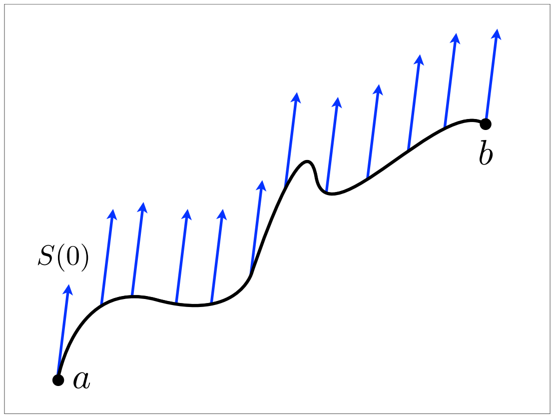
RAPPEL 5.4.1. Soit $\begin{cases} \dot{u}(t) = A(t) \cdot u(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ un système linéaire. Alors il existe une solution unique définie pour tout $t \in [0,1]$. L'espace de solutions est linéaire. Soit $u(t)$ une solution avec $u(0) = u_0$ et $v(t)$ autre solution avec $v(0) = v_0$. Alors $u(t) + v(t)$ est une solution avec $u(0) + v(0) = u_0 + v_0$. Seule solution $u(t)$ avec $u(0) = 0$ est $u(t) \equiv 0$.

Exemple 5.4.1. Soit $X = \mathbb{R}^n$. Notez que $TX = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (E_0 - triviale). Considérons la connexion plâte $\dot{\nabla}$. Notez que $C^\infty(X, E_0) \cong$ champ de vecteurs. Nous avons que $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ est une base trivializante pour $T\mathbb{R}^n$. Soit $S \in C^\infty(\mathbb{R}^n, T\mathbb{R}^n)$. Alors $S = \sum_{j=1}^n a_j(s) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$ et

$$\dot{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(S) = \sum_{j=1}^n (da_j)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \equiv 0, \text{ i.e. } S = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ avec } a \equiv \text{constant.}$$

Alors $\nabla_V(S) \equiv 0$.



Soit $c(t)$ une courbe lisse et S une section lisse de E telle que $S(0) = S_0 = \sum_{j=1}^{n} a_j(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$. Prenons la section $S^0(X) = \sum_{j=1}^{n} a_j(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$. Alors $\nabla_V S^0 = 0$ pour tout V.

RAPPEL 5.4.2.

(1) Soit $\pi : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel de rang k sur $\mathbb{R}$. Une connexion sur E et une application

$$\begin{aligned} \nabla : C^\infty(X, TX) \times C^\infty(X, E) &\longrightarrow C^\infty(X, E) \\ (V, S) &\mapsto \nabla_V S \end{aligned}$$

telle que :

(a) Pour tout $V \in C^\infty(X, TX)$: $\nabla_V : C^\infty(X, E) \longrightarrow C^\infty(X, E)$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

(b) $\nabla_V(f \cdot S) = V(f) \cdot S + S \cdot \nabla_V S$.

(c) $\nabla_{f \cdot V + g \cdot W} S = f \cdot \nabla_V S + g \cdot \nabla_W S$, pour tout $f, g \in C^\infty(X)$.

Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ les coordonnées d'une trivialization locale $\mathcal{U}$, et considérons des bases $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ et $\{S_1(x), \ldots, S_k(x)\}$ de TX et E, avec $x \in \mathcal{U}$. Nous avons $\dot{\nabla}^{\mathcal{U}}_{\frac{\partial}{\partial x_j}} S_i(x) = 0$. Alors $\nabla_V S = \dot{\nabla}^{\mathcal{U}}_V S + A_V$, où $A \in C^\infty(X, T^*X \otimes E^* \otimes E)$ et

$$A = \begin{pmatrix} \omega_1^1(V) & \cdots & \omega_1^k(V) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k^1(V) & \cdots & \omega_k^k(V) \end{pmatrix}$$

avec $\omega_j^i(\cdot) \in \Omega^1(\mathcal{U})$.

(2) **Transport parallèle :** Soit $c : [0,1] \longrightarrow X$ une courbe lisse et $S : [0,1] \longrightarrow E$ une section lisse (le longue de $c(t)$) de E, avec $S(t) \in E_{c(t)}$. Alors $S(t)$ est parallèle le longue $c(t)$ si $\nabla_{\cdot c(t)} S(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

Théorème : Pour tout $S_0 \in E_{c(0)}$ il existe une unique section $S(t)$ le longue de $c(t)$ telle que :

(a) $\nabla_{\dot{c}(t)} S(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

(b) $S(0) = S_0$.

Corollaire : Étant donnée $c(t)$: l'application $\tau^c : E_{c(0)} \longrightarrow E_{c(1)}$ donnée par $S_0 \mapsto S(1)$ est linéaire et inversible.

Définition 5.4.3. L'application τ_V^c s'appelle le **transport parallèle le longue de** $c(t)$ **par rapport à** V.

Exemple 5.4.2. Considérons le fibré trivial $E_0 = \mathbb{R}^k \times X$ et soit $\{S_1, \dots, S_k\}$ la base standard de $\mathbb{R}^k$. Pour la connexion plâte $\dot{\nabla}$, nous avons :

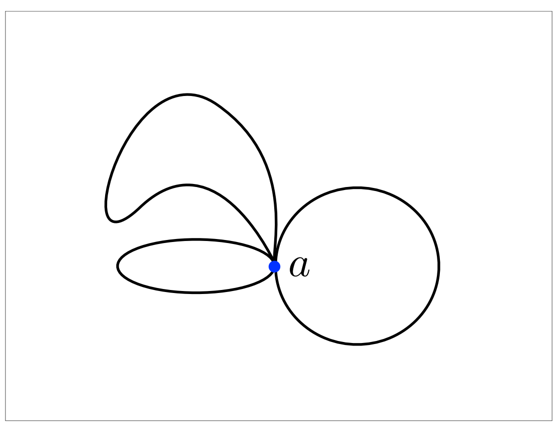
$$\dot{\nabla}_V \left(\sum_{j=1}^{k} a_j(x) \cdot S_j \right) = \sum_{j=1}^{k} V(a_j) \cdot S_j \Longrightarrow \dot{\nabla}_V S_j = 0 \text{ pour tout } V \in C^\infty(X, TX).$$

Soit $c(t)$ une courbe dans X. Alors

$$\tau^c(S_0) = \dot{a}_1 \cdot S_1 + \cdots + \dot{a}_k \cdot S_k.$$

5.5 Groupe d'holonomie d'une connexion

Soit $\mathcal{L}_a = \{c : [0,1] \xrightarrow{C^\infty} X \ / \ c(0) = c(1) = a\}$ - lacets basés en a.



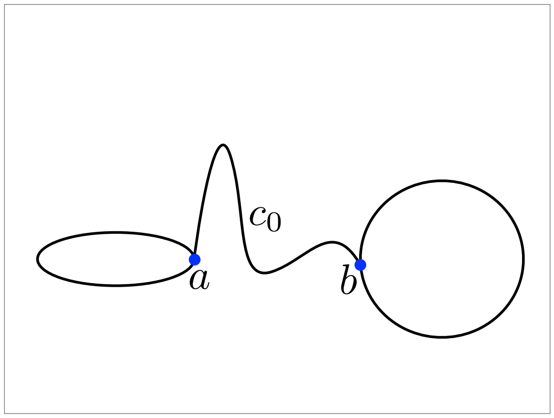
Rappelez que nous avons une application linéaire inversible $\tau^c : E_a \longrightarrow E_a$ pour tout $c \in \mathcal{L}_a$. Donc $\tau^c \in \mathrm{Gl}(E_a)$. Si $c_1, c_2 \in \mathcal{L}_a$ alors $c_2 \circ c_1 \in \mathcal{L}_a$. Notez aussi que si $c \in \mathcal{L}_a$ alors $c^{-1}(t) := c(1-t) \in \mathcal{L}_a$. Alors $\mathcal{L}_a$ a structure de groupe abstrait. De plus, l'application $\mathcal{L}_a \ni c \overset{\tau}{\mapsto} \tau^c \in \mathrm{Gl}(E_a)$ est un homomorphisme de groupes.

Définition 5.5.1. Le **groupe d'holonomie d'une connexion** ∇ **en** a est définie comme

$$\mathrm{Hol}_a(\nabla, E) := \mathrm{Im}(\tau) \subseteq \mathrm{Gl}(E_a) \cong \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R}).$$

Lemme 5.5.1. Soit X une variété connexe et $a.b \in X$. Alors $\mathrm{Hol}_a(\nabla, E)$ et $\mathrm{Hol}_b(\nabla, E)$ sont conjugués dans $\mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$ (on parle $\mathrm{Hol}(\nabla, E)$ tant que sous-groupe abstrait determiné à conjugaison).

Démonstration : Comme X est connexe nous avons que X est connexe par arcs. Alors pour touts $a, b \in X$ il existe une courbe lisse $c_0 : [0,1] \longrightarrow X$ qui joigne a et b.



Alors on peut définir $c \in \mathcal{L}_a \mapsto c_0 \circ c \circ c_0^{-1} \in \mathcal{L}_b$. Notez que

$$\mathrm{Hol}_a(\nabla, E) \ni \tau^c = \tau^{c_0} \circ \tau^c \circ (\tau^{c_0})^{-1} \in \mathrm{Hol}_b(\nabla, E).$$

Conclusion : $\mathrm{Hol}_a(\nabla, E) = \tau^{c_0} \mathrm{Hol}_b(V, E)(\tau^{c_0})^{-1}$.

$\square$

Définition 5.5.2. $\dot{\mathrm{Hol}}_a(\nabla, E) := \mathrm{Im}(\tau|_{\dot{\mathcal{L}}_a})$ où

$$\dot{\mathcal{L}}_a := \{c : [0,1] \xrightarrow{C^\infty} X \;/\; c(0) = c(1) = a \text{ et } c(t) \text{ est homotope à } c_0(t) = a\}.$$

Notez que $\dot{\mathcal{L}}_a \cong$ lacets homotopes à 0 en sense c^0.

Fait : Si X est simplement connexe alors $\mathrm{Hol}_a(\nabla, E) = \dot{\mathrm{Hol}}_a(\nabla, E)$.

Lemme 5.5.2. Soit X une variété connexe. Alors le groupe $\dot{\mathrm{Hol}}_a(\nabla, E)$ est connexe par arcs (dans la topologie induite par $\mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$).

Démonstration : Soit $c(t) \in \dot{\mathcal{L}}_a$ et $H(t,s)$ une homotopie avec $c_0(t) = a$ et $H(t,s) = c_s(t)$. Alors $\tau^s := \tau^{c_s}$ est une courbe lisse dans $\dot{\mathrm{Hol}}_a(\nabla, E)$ par un théorème des equations différentielles ordinaires.

$\square$

Théorème 5.5.1 (Yamabe)**.** Soit G un groupe de Lie et $H \subseteq G$ un sous-groupe (c'est-à-dire G est une variété muni d'une structure de groupe telle que le produit $G \times G \longrightarrow G$ est C^∞). Si pour touts $h_1, h_2 \in H$ il existe une courbe lisse $c : [0,1] \longrightarrow G$ telle que :

(1) $c(0) = h_1$, $c(1) = h_2$, et

(2) $c(t) \in H$,

alors H est un sous-groupe de Lie (c'est-à-dire H posséde une structure de variété lisse telle que l'inclusion $i : H \hookrightarrow G$ est C^∞).

RAPPEL 5.5.1. Soit $A \in \mathrm{gl}(k,\mathbb{R})$ une matrice $k \times k$ et

$$c(t) = \exp(tA) = I + t \cdot A + \frac{t^2}{2} \cdot A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!} \cdot A + \cdots \in \mathrm{Gl}(k,\mathbb{R}).$$

Notez que $c(0) = I$, $\dot{c}(0) = A$ et $\dot{c}(t) = A(t)$. Alors $T_I(\mathrm{Gl}(k,\mathbb{R})) \cong \mathrm{gl}(k,\mathbb{R})$.

L'inclusion $i : \dot{\mathrm{Hol}}_a(\nabla, E) \xrightarrow{C^\infty} \mathrm{Gl}(k,\mathbb{R})$ induit une inclusion

$$(i_*)_{\mathrm{Id}} : T_{\mathrm{Id}}(\dot{\mathrm{Hol}}_a(\nabla, E)) \hookrightarrow T_I(\mathrm{Gl}(k,\mathbb{R})) \cong \mathrm{gl}(k,\mathbb{R}).$$

Définition 5.5.3. $\mathrm{hol}_a(\nabla, E) := \mathrm{Im}((i_*)_{\mathrm{Id}})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{gl}(k,\mathbb{R})$, qui est invariant par rapport à $A \circ B - B \circ A = [A,B]$ (c'est-à-dire sous-algèbre de Lie).

Exemple 5.5.1. Considérons le fibré trivial $E_0 = \mathbb{R}^k \times X$ et la connexion plâte $\dot{\nabla}$. Alors $\tau^c = \mathrm{Id} \Longrightarrow \mathrm{Hol}_a(\dot{\nabla}, E_0) = \{\mathrm{Id}\}$.

5.6 Courbure d'une connexion

Soit (E, ∇) un fibré vectoriel et $U, V \in C^\infty(X, TX)$. Définissons l'application $\mathbb{R}$-linéaire

$$\begin{aligned} R^\nabla_{U,V} : C^\infty(X,E) &\longrightarrow C^\infty(X,E) \\ S &\mapsto \nabla_{[U,V]}S - \nabla_U(\nabla_V S) + \nabla_V(\nabla_U S) = (\nabla_{[U,V]} - [\nabla_U, \nabla_V])(S). \end{aligned}$$

Définition 5.6.1. L'operateur R^∇ s'appelle **courbure** de ∇.

Fait : $R^\nabla_{U,V}$ est un opérateur dfférentiable d'ordre ≤ 2.

Lemme 5.6.1. $R^\nabla_{U,V}(f \cdot S) = f \cdot R^\nabla_{U,V}(S)$, c'est-à-dire $R^\nabla_{U,V}$ est d'ordre zéro.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
R^{\nabla}_{U,V}(f\cdot S) &= \nabla_{[U,V]}(f\cdot S) - \nabla_U(\nabla_V(f\cdot S)) + \nabla_V(\nabla_U(f\cdot S))\\
&= df([U,V])\cdot S + f\cdot \nabla_{[U,V]}(df(U)\cdot S) - \nabla_U(df(V)\cdot S)\\
&\quad + \nabla_V(df(U)\cdot S) - \nabla_U(f\cdot \nabla_V S) + \nabla_V(f\cdot \nabla_U S)\\
&= [[U,V](f) - U(V(f)) + V(U(f))](S) - df(V)\cdot \nabla_U S + df(U)\cdot \nabla_V S\\
&\quad - df(U)\cdot \nabla_V S + df(V)\nabla_U S + f\cdot(\nabla_{[U,V]}S - \nabla_U(\nabla_V S) + \nabla_V(\nabla_U S))\\
&= f\cdot R^{\nabla}_{U,V}(S).
\end{aligned}$$

□

Lemme 5.6.2.

(1) $R^{\nabla}_{U,V} = -R^{\nabla}_{V,U}$.

(2) $R^{\nabla}_{f\cdot U+g\cdot V,W} = f\cdot R^{\nabla}_{U,W} + g\cdot R^{\nabla}_{V,W}$.

Exercice 5.6.1. Prouver le lemme précédent.

Conclusion : $R^{\nabla} \in C^{\infty}(X, \Delta^2 T^*X \otimes E^* \otimes E)$.

Théorème 5.6.1 (Ambrose-Singer)**.**

(1) $\left\langle \{(R^{\nabla}_{U,V})_a \in \mathrm{End}(E_a) \ / \ U,V \in T_a(X)\}\right\rangle \cong \mathrm{hol}_a(\nabla, E)$.

(2) $\mathrm{hol}_b(\nabla,E) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{(\tau^c)(R^{\nabla}_{U,V})_b(\tau^c)^{-1}\}$ où $b \in X$ et $c(t)$ joint a et b.

Corollaire 5.6.1. Soit $\pi : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel muni d'une connexion ∇. Supposons que X est simplement connexe et $R^{\nabla} \equiv 0$. Alors $E \cong E_0 = \mathbb{R}^k \times X$. Le fibré $E \longrightarrow X$ est trivial ssi'l existe une connexion à courbure $R^{\nabla} \equiv 0$.

Démonstration : Si $R^{\nabla} \equiv 0$, par le Théorème d'Ambrose-Singer, $\mathrm{hol}_a(\nabla, E) = 0$ pour tout a. Alors $\dot{\mathrm{Hol}}_a(\nabla,E) = \{\mathrm{Id}\}$. Reste à "trivializer" E. Pour chaque $a \in X$, prenons une base $\{S_1(a), S_2(a), \ldots, S_k(a)\}$ de E_a. Comme X est connexe, pour $b \in X$ il existe une courbe lisse $c : [0,1] \longrightarrow X$ telle que $c(0) = a$ et $c(1) = b$. L'application $\tau^c : E_a \longrightarrow E_b$ est un isomorphisme. Considérez $\{S^c_1(b), \ldots, S^c_k(b)\}$ la base transportée le longue de c. Soit $\tilde{c}$ une autre courbe et $\{S^{\tilde{c}}_1(b), \ldots, S^{\tilde{c}}_k(b)\}$ la base correspondante. Soit T la matrice de transition. Nous avons $T = T_{\tilde{c}} \circ T_c^{-1} \in \mathrm{Hol}_b(\nabla,E) = \{\mathrm{Id}\}$. Alors $\{S^c_1(b), \ldots, S^c_k(b)\}$ ne depend pas de c. □

Définition 5.6.2. $\{S_1(b), \dots, S_k(b)\} = \{S_1^c(b), \dots, S_k^c(b)\}$.

Nous avons une application $b \overset{C^\infty}{\mapsto} S_1(b)$ et un isomorphisme $E \cong \mathbb{R}^k \times X$ donnée par

$$(S, b) \mapsto (a_1(b), \dots, a_k(b), b) \text{ où } S(b) = \sum_{i=1}^{k} a_i(b) \cdot S_i(b).$$

5.7 Théorie de Chern-Weil

Considérons un fibré vectoriel $(E, \nabla) \xrightarrow{\pi} X$ et la courbure $R^\nabla \in C^\infty(X, \Delta^2 T^* X \otimes E^* \otimes E)$. Pour chaque point $a \in X$, soit $\{S_1(a), \dots, S_k(a)\}$ une trivialization de E. Nous avons

$$R^\nabla_{U,V}(S_i(a)) = \sum_{j=1}^{k} \Omega_{ij}(a)(u, v) \cdot S_j(a),$$
$$R^\nabla \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \cdots & \Omega_{ik} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{k1} & \cdots & \Omega_{kk} \end{pmatrix}.$$

Notez que $\Omega^2(X, \mathrm{End}(E))$ est localement engendrée par $\omega \otimes A$ où $\omega \in \Omega^2(X)$ et $A \in C^\infty(X, \Delta^k T^* X \otimes \mathrm{End}(E))$. Ici,

$$\Omega^k(X, \mathrm{End}(E)) = C^\infty(X, \Delta^k T^* X \otimes \mathrm{End}(E)) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(X, \mathrm{End}(E)).$$

Si $\omega \otimes A$ et $\eta \otimes B$ sont dans $\Omega^k(X, \mathrm{End}(E))$ (c'est-à-dire $\omega, \eta \in \Omega^k(X)$, $A, B \in C^\infty(X, \mathrm{End}(E))$), alors définissons la composition

$$(\omega \otimes A) \circ (\eta \otimes B) := (\omega \wedge \eta) \otimes (A \circ B)$$

et le crochet

$$[\omega \otimes A, \eta \otimes B] := (\omega \otimes A) \circ (\eta \otimes B) - (-1)^{\deg(\omega) \cdot \deg(\eta)} (\eta \otimes B) \circ (\omega \otimes A).$$

La **trace** de $\omega \otimes A$ est définie comme

$$\mathrm{trace}(\omega \otimes A) := \omega \mathrm{trace}(A) \in \Omega^*(X).$$

Exemple 5.7.1. $R^\nabla \circ R^\nabla \in \Omega^4(X, \mathrm{End}(E))$.

Lemme 5.7.1. $\mathrm{trace}[\tilde{A}, \tilde{B}] = 0$ pour toute $\tilde{A}, \tilde{B} \in \Omega^*(X, \mathrm{End}(E))$.

Démonstration : Suffit de vérifier pour $\tilde{A} = \omega \otimes A$ et $\tilde{B} = \eta \otimes B$:

$$\mathrm{trace}[\tilde{A}, \tilde{B}] = \left[(\omega \wedge \eta) - (-1)^{\deg(\omega) \cdot \deg(\eta)} \eta \wedge \omega\right] \mathrm{trace}(A \circ B),$$

où $(\omega \wedge \eta) - (-1)^{\deg(\omega) \cdot \deg(\eta)} \eta \wedge \omega = 0$. □

Lemme 5.7.2. Soit ∇ une connexion sur E et $\tilde{A} \in \Omega^*(X, \mathrm{End}(E))$. Soit $d^\nabla : \Omega^*(X, E) \longrightarrow \Omega^{*+1}(X, E)$ l'application

$$\omega \otimes S \mapsto d\omega \otimes S + \omega \wedge \nabla S,$$

où $\nabla S \in C^\infty(X, T^*X \otimes E)$. Alors $\mathrm{trace}(\tilde{A}) = \mathrm{trace}(d^\nabla \circ \tilde{A} - \tilde{A} \circ d^\nabla)$ où $(d^\nabla \circ \tilde{A})(S) = d^\nabla(\tilde{A}(S)) \in \Omega^*(X, E)$ et $(\tilde{A} \circ d^\nabla)(S) = \tilde{A}(d^\nabla S) \in \Omega^*(X, E)$.

Exemple 5.7.2. Soit $\tilde{A} = \omega \otimes A$. Alors $\tilde{A} \circ d^\nabla S = \omega \wedge A(d^\nabla S) \in \Omega^1(X, E)$. Dans ce cas, $d^\nabla S = \nabla S \in \Omega^1(X, E)$. Alors

$$d^\nabla \circ (\tilde{A} \circ S) = d^\nabla(\omega \circ A(S)) = d\omega \otimes A(S) + \omega \wedge \nabla(A(S)).$$

Démonstration :

(a) $\mathrm{trace}(d^\nabla \circ \tilde{A} - \tilde{A} d^\nabla)$ ne depend pas de la connexion ∇. Soit $\tilde{\nabla}$ autre connexion, alors $\tilde{\nabla} - \nabla \in C^\infty(X, T^*X \otimes \mathrm{End}(E))$ et pour $\tilde{B} = \tilde{\nabla} - \nabla$ on a

$$\mathrm{trace}(d^\nabla \circ \tilde{A} - \tilde{A} \circ d^\nabla) = \mathrm{trace}(\tilde{B} \circ \tilde{A} - \tilde{A} \circ \tilde{B}) = \mathrm{trace}[\tilde{A}, \tilde{B}] = 0.$$

(b) Prenons une trivialization locale et $\dot{\nabla}^{\mathcal{U}}$ la connexion plâte. La vérification est directe.

$\square$

Lemme 5.7.3. L'application $d^\nabla : \Omega^k(X, E) \longrightarrow \Omega^{k+1}(X, E)$

$$d^\nabla(\omega \otimes S) := d\omega \otimes S + \omega \wedge \nabla S$$

a la propriété que

$$(d^\nabla \circ d^\nabla)(S) = -\frac{1}{2} \cdot R^\nabla(S).$$

Exercice 5.7.1. $d\alpha(U, V) = \frac{1}{2} \cdot (U(\alpha(V)) - V(\alpha(U)) - \alpha([U, V]))$.

Soit $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ une série de puissance formelle. Considérons $R^\nabla \in \Omega^2(X, \mathrm{End}(E))$ et définissons

$$f(R^\nabla) := a_0 + a_1 R^\nabla + \cdots + a_n (R^\nabla)^n + \cdots \in \Omega^{2n}(X, \mathrm{End}(E)).$$

Théorème 5.7.1 (Chern-Weil)**.**

(1) $d\mathrm{trace}(f(R^\nabla)) = 0$.

(2) Si $\tilde{\nabla}$ est une autre connexion sur E alors $\mathrm{trace}(f(R^\nabla)) - \mathrm{trace}(f(R^\nabla)) = d\omega$ où $\omega \in \Omega^*(X)$.

Démonstration :

(1) Par le Lemme 5.7.2, $d\mathrm{trace}(f(R^\nabla)) = \mathrm{trace}[d^\nabla f(R^\nabla) - f(R^\nabla)\circ d^\nabla]$. Pour $R^\nabla = -\frac{1}{2}\cdot d^\nabla \circ d^\nabla$. Notez que $(R^\nabla)^2 = -\frac{1}{2}\cdot (d^\nabla)^4$. Alors $d^\nabla \circ (R^\nabla)^k = (R^\nabla)^k \circ d^\nabla$ (**Identités de Bianchi**). Par conséquent, $d\mathrm{trace}(f(R^\nabla)) = 0$.

(2) Soient ∇ et $\tilde{\nabla}$ deux connexions. Considérons la connexion $\nabla_t = t\tilde{\nabla} + (1-t)\nabla$ et posons $R^t = R^{\nabla_t} \in \Omega^2(X, \mathrm{End}(E))$. Alors

$$\begin{aligned}
R^t_{U,V} &= \nabla^t_{[U,V]} - \nabla^t_U(\nabla^t_V) + \nabla^t_V(\nabla^t_U),\\
\frac{d}{dt}\nabla^t &= \tilde{\nabla} - \nabla = \tilde{B} \in C^\infty(X, T^*X \otimes \mathrm{End}(E)) = \Omega^1(X, \mathrm{End}(E)),\\
\frac{d}{dt}\left[\mathrm{trace}(f(R^t))\right] &= \mathrm{trace}\left[f'(R^t)\frac{dR^t}{dt}\right] = \mathrm{trace}\left[\left[\nabla_t, \frac{d}{dt}\nabla_t\right] f'(R^t)\right] = \mathrm{trace}\left[d^{\nabla_t}, \tilde{B}\circ f(R^t)\right]\\
&= d\mathrm{trace}[\tilde{B}_t \circ f'(R^t)] \text{ par le Lemme 5.7.2},\\
\frac{d}{dt}\mathrm{trace}(f(R^t)) &= d\mathrm{trace}(\tilde{B}_t f'(R^t)).
\end{aligned}$$

De plus

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}\mathrm{trace}(f(R^t))dt = \mathrm{trace}(f(R^1)) - \mathrm{trace}(f(R^0)) = d\int_0^1 \tilde{B}_t f'(R^t)dt = 0.$$

□

Corollaire 5.7.1. Il existe une application $E : f(x) \mapsto [f(R^\nabla)] \in H^*_{\mathrm{dR}}(X)$.

CHAPITRE 6

GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

6.1 Variétés riemanniennes

RAPPEL 6.1.1. Soit $\pi : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel lisse. Il existe une infinité des métriques riemanniennes, c'est-à-dire $h \in C^\infty(X, E^* \otimes E^*)$ telle que pour tout a :

(1) $h_a(V_1, V_2) = h_a(V_2, V_1)$.

(2) $h_a(V, V) > 0$ pour tout $V \in T_a(X) - \{0\}$.

Définition 6.1.1. Une **métrique riemannienne** sur X est une métrique euclidienne sur TX : $g \in C^\infty(X, T^*X \otimes T^*X)$.

Dans une carte $(\mathcal{U}, \varphi)$ avec coordonnées euclidiennes $(x_1, \ldots, x_n)$, nous avons la base $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ de $T^*X|_\mathcal{U}$. L'espace $(T^*X \otimes T^*X)|_\mathcal{U}$ a la base $\{dx_i \otimes dx_j : 1 \leq i, j \leq n\}$. Localement, nous avons

$$g|_\mathcal{U} = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j,$$

où $g_{ij} : \mathcal{U} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ est l'application bilinéaire définie par $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$. Rappelez que :

(1) g est **symétrique** ssi $G(x) = (g_{ij}(x))$ est une matrice symétrique.

(2) g est **définie positive** ssi $G(x) > 0$.

Définition 6.1.2. $dx_i \odot dx_j := \frac{1}{2}(dx_i \otimes dx_j + dx_j \otimes dx_i) \in C^\infty(\mathcal{U}, T^*X \otimes T^*X)$ qu'en chaque point est symétrique.

Localement,

$$g|_\mathcal{U} = \sum_{i=1}^n g_{ii}(x) dx_i \otimes dx_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j.$$

Remarque 6.1.1.

$$dx_i \wedge dx_j = \frac{1}{2}(dx_i \otimes dx_j - dx_j \otimes dx_i),$$
$$dx_i \odot dx_j = \frac{1}{2}(dx_i \otimes dx_j + dx_j \otimes dx_i).$$

Alors $dx_i \otimes dx_j = dx_i \wedge dx_j + dx_i \odot dx_j$ ssi $T^*X \otimes T^*X = S^2(T^*X) \oplus \Delta^2(T^*X)$.

Proposition 6.1.1. Il existe une infinité des métriques riemanniennes sur X.

Exemple 6.1.1.

(1) $X = \mathbb{R}^n$, $g_{\text{euc}} = dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n$ est connu comme la métrique euclidienne. Dans ce cas, $G(x) = \text{Id}$ (à coefficients constants).

Pour $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2)\}$, considérons $\begin{cases} x_1 = r \cdot \cos(\theta) \\ x_2 = r \cdot \sin(\theta) \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Nous savons

$$\begin{aligned} dx_1 &= \cos(\theta)dr - r \cdot \sin(\theta)d\theta, \\ dx_2 &= \sin(\theta)dr + r \cdot \cos(\theta)d\theta, \\ dx_1 \otimes dx_1 &= \cos^2(\theta)dr \otimes dr + r^2 \cdot \sin^2(\theta)d\theta \otimes d\theta - 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)dr \odot d\theta, \\ dx_2 \otimes dx_2 &= \sin^2(\theta)dr \otimes dr + r^2 \cdot \cos^2(\theta)d\theta \otimes d\theta + 2 \cdot r \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)dr \odot d\theta, \end{aligned}$$

et la métrique euclidienne est donnée par $g_{\text{euc}} = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$.

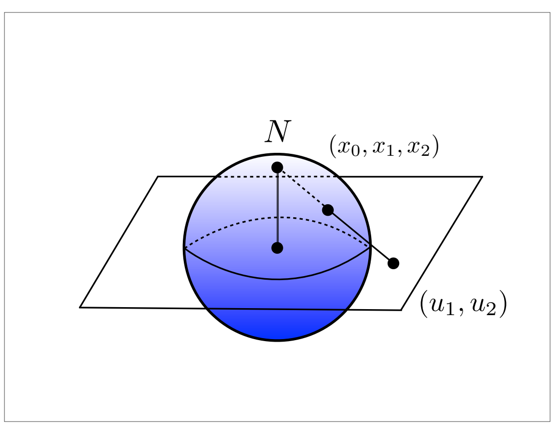
(2) **Fait :** Soit (Y, g_Y) une **variété riemannienne** et $F : X \longrightarrow Y$ une immersion (c'est-à-dire que $(DF)_a : T_aX \longrightarrow T_{F(a)}Y$ est injective pour tout a). Alors

$$(F^*g_Y)_a(V_1, V_2) := (g_Y)_{F(a)}((DF)_a(V_1), (DF)_a(V_2))$$

définit une métrique riemannienne sur X.

Remarque 6.1.2 (Gromov 80')**.** Toute variété X peut être immersée dans $\mathbb{R}^N$, alors X possède une métrique induite de $\mathbb{R}^N$.

Exemple 6.1.2. Soit $S^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Notons par $g_{\text{can}}^{S^2}$ la métrique induite sur S^2 par $g_{\text{euc}} = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2$. Considérons la projection stéréographique $\varphi^N : S^2 \backslash \{N\} \xrightarrow{1:1} \mathbb{R}^2$ donnée par $u_1 = \frac{x_1}{1-x_0}$ et $u_2 = \frac{x_2}{1-x_0}$.



Alors

$$\begin{aligned}
x_1 &= u_1(1-x_0),\\
x_2 &= u_2(1-x_0),\\
|u|^2 &= u_1^2+u_2^2 = \frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_0)^2} = \frac{1-x_0^2}{(1-x_0)^2} = \frac{1+x_0}{1-x_0} \Longrightarrow x_0 = \frac{|u|^2-1}{|u|^2+1},\\
dx_1 &= \frac{2du_1}{1+|u|^2} - 2u_1\cdot\frac{(2u_1du_1+2u_2du_2)}{(1+|u|^2)^2},\\
dx_2 &= \frac{2du_2}{1+|u|^2} - 2u_2\cdot\frac{2u_1du_1+2u_2du_2}{(1+|u|^2)^2},\\
dx_0 &= \frac{2u_1du_1+2u_2du_2}{1+|u|^2} + (1-|u|^2)\cdot\frac{(2u_1du_1+2u_2du_2)}{(1+|u|^2)^2} = 4\cdot\frac{(u_1du_1+u_2du_2)}{(1+|u|^2)^2},\\
dx_1\otimes dx_1 + dx_2\otimes dx_2 &= 4\frac{du_1\otimes du_1+du_2\otimes du_2}{(1+|u|^2)^2} + 16\cdot|u|^2\cdot\frac{(u_1du_1+u_2du_2)^{\otimes 2}}{(1+|u|^2)^2}\\
&\quad -16\cdot\frac{u_1du_1\odot(u_1du_1+u_2du_2)}{(1+|u|^2)^3} - 16\cdot\frac{u_2du_2\odot(u_1du_1+u_2du_2)}{(1+|u|^2)^3}\\
&= 4\cdot\frac{(du_1\otimes du_1+du_2\otimes du_2)}{(1+|u|^2)^2} + 16\cdot|u|^2\cdot\frac{(u_1du_1+u_2du_2)^{\otimes 2}}{(1+|u|^2)^2}\\
&\quad -16\cdot\frac{(u_1du_1+u_2du_2)^{\otimes 2}}{(1+|u|^2)^3}\\
&= 4\cdot\frac{(du_1\otimes du_1+du_2\otimes du_2)}{(1+|u|^2)^2} - 16\cdot\frac{(u_1du_1+u_2du_2)^{\otimes 2}}{(1+|u|^2)^4},\\
dx_0\otimes dx_0 &= 16\cdot\frac{(u_1du_1+u_2du_2)^{\otimes 2}}{(1+|u|^2)^4}.
\end{aligned}$$

Alors

$$dx_0\otimes dx_0 + dx_1\otimes dx_1 + dx_2\otimes dx_2 = 4\cdot\frac{(du_1\otimes du_1+du_2\otimes du_2)}{(1+u_1^2+u_2^2)}.$$

Conclusion : Sur $\mathbb{R}^2$, nous avons

$$g^{S^2} = 4\cdot\frac{(du_1^2+du_2^2)}{(1+|u|^2)^2}.$$

Prenons sur S^2 l'application $\varphi_0 : S^2_{x_0>0} \longrightarrow \mathbb{D} = \{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2 < 1\}$ donnée par $\varphi_0 : (x_0,x_1,x_2) \mapsto (x_1,x_2)$. Nous avons $x_0 = \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ et $dx_0 = -\frac{x_1dx_1+x_2dx_2}{(1-|x|^2)^{1/2}}$. Donc

$$dx_0\otimes dx_0 + dx_1\otimes dx_1 + dx_2\otimes dx_2 = dx_1\otimes dx_1 + dx_2\otimes dx_2 + \frac{(x_1dx_1+x_2dx_2)^{\otimes 2}}{1-|x|^2}.$$

Définition 6.1.3. Soit (X,g_X) et (Y,g_Y) deux variétés riemanniennes. Une **isométrie (riemannienne)** est un diffeomorphisme $F : X \longrightarrow Y$ tel que $F^*(g_Y) = g_X$.

Fait : Isométries riemanniennes définissent des classes d'équivalences.

Problème general :

(1) Déterminer quand est-ce que deux variétés riemanniennes sont isométriques.

(2) Quand deux métriques locales g_u et g_v, $u,v\in\mathbb{R}^3$, sont isométriques.

Définition 6.1.4. $\mathrm{Isom}(X,g) := \{F : X \longrightarrow X \ / \ F$ est un difféomorphisme et $F^*(g) = g\}$.

Fait : Si $(X, g_X) \cong_{\text{iso}} (Y, g_Y)$ alors $\mathrm{Isom}(X, g_X) \cong \mathrm{Isom}(Y, g_Y)$.

Exemple 6.1.3. $X = \mathbb{R}^2$, $g_{\text{euc}} = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2$. Considérons la translation $T(x_1, x_2) = (x_1 + t_1, x_2 + t_2)$. Notez que $T^*(dx_1) = d(T(x_1)) = d(x_1 + t_1) = dx_1$. Alors

$$T^*(dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2) = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2.$$

Rappelez que $g_{\text{euc}} = dr^2 + r^2 d\theta^2$ en coordonnées polaires. Considérons l'application $A_{\theta_0} : (r, \theta) \mapsto (r, \theta + \theta_0)$. Alors $A^*_{\theta_0} g_{\text{euc}} = g_{\text{euc}}$.

Conclusion : $\mathrm{O}(2) \ltimes \mathbb{R}^2 \subseteq \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, g_{\text{euc}})$.

Exercice 6.1.1. $\mathrm{O}(3) \subseteq \mathrm{Isom}(S^2, g^{S^2}_{\text{can}})$.

Exemple 6.1.4. **Le Plan Hyperbolique :** $\mathbb{H} := \{(x, y) : y > 0\}$. Posons

$$g^{\mathbb{H}}_{\text{can}} := \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{y^2},$$

qui définit une métrique riemannienne. Pour $z = x + iy$, considérons l'application $F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, où $ad - bc > 0$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Quand $F(z)$ préserve $g^{\mathbb{H}}_{\text{can}}$?. Nous avons

$$\begin{aligned} F^*(dz) = d(F(z)) &= \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} dz, \\ F^*(y) = y \circ F &= \frac{1}{i} \cdot \left(\frac{}{a} z + bcz + d - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \right) = \left(\frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \right) \cdot y. \end{aligned}$$

Alors $F^*(g^{\mathbb{H}}_{\text{can}}) = g^{\mathbb{H}}_{\text{can}}$.

Conclusion : Les **transformations de Möbius**, $F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc > 0$, sont des isométries pour $g^{\mathbb{H}}_{\text{can}}$. Par conséquent

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm\} \subseteq \mathrm{Isom}(\mathbb{H}, g^{\mathbb{H}}_{\text{can}}).$$

Exercice 6.1.2. Soit $\mathbb{D} := \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ et $g^{\mathbb{D}}_{\text{can}} = 4 \cdot \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}$. Démontrer que$(\mathbb{D}, g^{\mathbb{D}}_{\text{can}})$ est isométrique à $(\mathbb{H}, g^{\mathbb{H}}_{\text{can}})$.

6.2 Distance riemannienne

Soit X une variété connexe et g une métrique riemannienne sur X. Considérons une courbe lisse $c : [0, 1] \longrightarrow X$. Alors $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}(X)$. La **norme** du vecteur $\dot{c}(t)$ est définie par $g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$.

Définition 6.2.1. La fonction $l(t) = \int_0^1 \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt$ s'appelle **longeur** de c.

Exemple 6.2.1. Soit $X = \mathbb{R}^n$ et $g = g_{\text{euc}}$. Soit $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ une courbe lisse. Nous avons

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)) = \dot{x}_1(t)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{x(t)} + \cdots + \dot{x}_n(t)\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{x(t)},$$

$$g_{\text{euc}}(\dot{x}(t), \dot{x}(t)) = (\dot{x}_1(t))^2 + \cdots + (\dot{x}_n(t))^2,$$

$$l(x(t)) = \int_0^1 \sqrt{(\dot{x}_1(t))^2 + \cdots + (\dot{x}_n(t))^2}dt \text{ longeur euclidienne de } x(t).$$

Définition 6.2.2. $d(a,b) = \inf\{l(c) \ / \ c : [0,1] \stackrel{C^\infty}{\longrightarrow} \text{ telle que } c(0) = a \text{ et } c(1) = b\}$.

Théorème 6.2.1. La paire (X, d^g) est un espace métrique dont la topologie est la topologie initiale de X.

RAPPEL 6.2.1. (X, d^g) est un espace métrique si :

(1) $d^g(a,b) = d^g(b,a)$.

(2) $d^g(a,b) + d^g(b,c) \geq d^g(a,c)$.

(3) $d^g(a,a) \geq 0$ avec égalité ssi $a = b$.

Démosntration du Théorème 6.2.1 : Seule propriété en doute : $d^g(a,b) > 0$ si $a \neq b$. Sans perte : il existe $\mathcal{U} \ni a$, $(\mathcal{U}, \varphi)$ une carte et $b \notin \overline{\mathcal{U}}$. Soit $\mathcal{V} = \varphi(\mathcal{U})$ et supposons $\varphi(a) = 0 \in \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$. Il existe $R > 0$ tel que $\overline{B_R(0)} \subseteq \mathcal{V}$ (boule euclidienne de rayon R).

À montrer : $d^g(a,b) \geq \lambda^{1/2} \cdot R$, $\lambda > 0$. Nous avons $g = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j$, où $G(x) = (g_{ij}(x))_{n \times n}$ est symétrique. Pour tout $x \in \overline{B_R(0)}$, soient $\lambda_1(x) \leq \cdots \leq \lambda_n(x)$ les valeurs propres de $G(x)$. Notez que $G(x) > 0$ signifie que pour tout $x \in \overline{B_R(0)}$, $\lambda_i(x) > 0$ pour tout i.

□

Lemme 6.2.1. Si $G(x)$ est une famille continue de matrices symétriques alors $\lambda_{\min}(x)$ et $\lambda_{\max}(x)$ sont des fonctions continue.

Démosntration du Théorème 6.2.1 (suite) : Par le lemme précédent, $\lambda = \inf_{x \in \overline{B_R(0)}} \lambda_1(x) > 0$ car $\lambda_1(x)$ est continue. Soit $\mu = \sup_{x \in \overline{B}_R(0)} \lambda_n(x) > 0$. Considérons une courbe lisse $c : [0,1] \longrightarrow X$ que joint a et b. Alors il existe t_0 tel que $c(t_0) \in \partial B_R(0)$, $l(c) \geq l(c_0)$, où $c_0 = c|_{[0,t_0]}$. Alors

$$l(c_0) = \int_0^{t_0} \sqrt{g_{c_0(t)} g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}dt \geq \int_0^{t_0} \lambda^{1/2} ||\dot{c}(t)||_{\text{euc}} dt \geq \lambda^{1/2} R.$$

Il reste de voir que la topologie induite est la bonne :

(a) $\varphi^{-1}(B_R^{\text{euc}}(0)) \supseteq B^{d^g}_{\sqrt{\lambda}R}(a)$: Supposons le contraire, que $B^{d^g}_{\sqrt{\lambda}R}(a) \not\subseteq \varphi^{-1}(B_R^{\text{euc}}(0))$, c'est-à-dire qu'il existe $b \notin \varphi^{-1}(B_R^{\text{euc}}(0))$ et tel que $d^g(a,b) < \sqrt{\lambda}R$. Alors $l(c) \geq l(c_0) \geq \sqrt{\lambda}R$ pour tout c. Cela implique que $d^g(a,b) \geq sqrt\lambda R$.

(b) À établir $\varphi^{-1}(B_R(0)) \subseteq B^{d^g}_{(\sqrt{\mu}+\sqrt{\lambda})R}(a)$. Considérons $c_0 : [0,t_0] \longrightarrow X$, qui reste dans la boule :

$$l(c_0) = \int_0^{t_0} \sqrt{g_{c_0(t)}(\dot{c}(t),\dot{c}(t))}dt \leq \sqrt{\mu}\int_0^{t_0} ||\dot{c}(t)||_{\text{euc}}dt$$
$$\inf(l(c_0)) \leq \sqrt{\mu}\cdot \inf(l_{\text{euc}}(c_0)) = \sqrt{\mu}d^g(a,b) < (\sqrt{\mu}+\sqrt{\lambda})d^g(a,b).$$

□

Théorème 6.2.2. Si (X,g_X) et (Y,g_Y) sont deux variétés riemanniennes et d^{g_X} et d^{g_Y} sont les distances respectives, alors toute isométrie $F : (X,d^{g_X}) \longrightarrow (Y,d^{g_Y})$ (à priorie continue) est une application lisse qui est aussi une isométrie riemannienne.

Théorème 6.2.3 (Myers-Steenrod)**.** Si X est connexe, alors $\text{Isom}(X,g)$ est une variété lisse (groupe de Lie). Si de plus X est compacte, alors $\text{Isom}(X,g)$ est aussi compact.

Exemple 6.2.2. $\text{Isom}(\mathbb{R}^n, g_{\text{euc}}) = \text{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. Nous avons

$$d^{g_{\text{euc}}}(a,b) = d^{\text{euc}}(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i-b_i)^2} = ||a-b||_{\text{euc}},$$

où $||a||_{\text{euc}} = \langle a,a\rangle_{\text{euc}}$. Prenons $F \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n, g_{\text{euc}})$ et soit $F(0)=t$. Considérons la translation $T(x)=x-t$. Alors $T\circ F = \tilde{F} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n, g_{\text{euc}})$ avec $\tilde{F}(0)=0$.

À montrer $\tilde{F} \in \text{O}(n) = \{A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \ / \ \langle Ax,Ay\rangle = \langle x,y\rangle\}$. Nous avons

$$\langle a,a\rangle^{1/2} = \left\langle \tilde{F}(a),\tilde{F}(a)\right\rangle^{1/2} = d^{\text{euc}}(\tilde{F}(0),\tilde{F}(a)) = d^{\text{euc}}(0,a) = \langle a,a\rangle^{1/2}$$
$$\Longrightarrow ||\tilde{F}(a)|| = ||a||,$$
$$||\tilde{F}(a+b)-\tilde{F}(a)-\tilde{F}(b)||^2 = \left\langle \tilde{F}(a+b)-\tilde{F}(a)-\tilde{F}(b), \tilde{F}(a+b)-\tilde{F}(a)-\tilde{F}(b)\right\rangle = 0.$$

Si $\tilde{F}$ preserve le produit scalaire, alors on montre que $||\tilde{F}(a+b)-\tilde{F}(a)-\tilde{F}(b)||^2=0$. On a :

$$||\tilde{F}(a)+\tilde{F}(b)||^2 = ||a||^2+||b||^2+2\left\langle \tilde{F}(a),\tilde{F}(b)\right\rangle,$$
$$||a-b||^2 = ||\tilde{F}(a)-\tilde{F}(b)||^2$$
$$= \left\langle \tilde{F}(a)-\tilde{F}(b),\tilde{F}(a)-\tilde{F}(b)\right\rangle = ||a||^2+||b||^2-2\left\langle \tilde{F}(a),\tilde{F}(b)\right\rangle$$
$$2\left\langle \tilde{F}(a),\tilde{F}(b)\right\rangle = ||a-b||^2-||a||^2-||b||^2 = 2\langle a,b\rangle$$
$$||\tilde{F}(a)-\tilde{F}(b)||^2 = d^{\text{euc}}(\tilde{F}(a),\tilde{F}(b)).$$

Exercice 6.2.1. Démontrer que $\mathrm{Isom}(S^n, g_{\mathrm{can}}^{S^n}) = \mathrm{O}(n+1)$.
Indice : $(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}, g_{\mathrm{euc}}) \cong (\mathbb{R}_{>0} \times S^n, dr^2 + r^2 g_{\mathrm{can}}^{S^n})$. *À partir de* $F \in \mathrm{Isom}(S^n, g_{\mathrm{can}}^{S^n})$ *définir une isométrie de* $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$.

RAPPEL 6.2.2.

(1) Soit (X, g) une variété riemannienne où $g \in C^\infty(X, T^*X \otimes T^*X)$. On a que g_a est euclidienne sur T_aX. Pour chaque courbe lisse $c : [0,1] \longrightarrow (X, g)$, on définit la longeur de c comme

$$l^g(c) = \int_0^1 g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))^{1/2} dt.$$

Pour chaque paire de points $p, q \in X$, on définit la distance riemannienne entre p et q comme

$$d^g(p, q) = \inf\{l^g(c) \ / \ c : [0,1] \longrightarrow X \text{ est une courbe lisse avec } c(0) = p \text{ et } c(1) = q\}.$$

Proposition : (X, d^g) est un espace métrique dont la topologie métrique est égal à la topologie de la variété.

Autre preuve : Pour $p \in X$, prenons une carte $(\mathcal{U}, \varphi)$ avec $p \in \mathcal{U}$ et $\varphi : \mathcal{U} \cong B_R^{\mathrm{euc}}(0)$. Nous avons que $g|_{\mathcal{U}} = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j$ où $G(x) = (g_{ij}(x))$ est une matrice symétrique définie positive. Rappelez que $\mu = \max_{x \in B_R(0)}\{\mathrm{spectre}(G(x))\} < \infty$ et $g_x(v, v) \leq \mu ||v||_{\mathrm{euc}}^2$. Pour $q = \varphi^{-1}(x)$, $q \in \varphi^{-1}(B_R^{\mathrm{euc}}(0)) \subseteq B_{\sqrt{\mu}R}^{d^g}(p)$. Considérons la courbe $c(t) = tx$. Alors

$$d^g(p, q) \leq l^g(c) = \int_0^1 g(\vec{x}, \vec{x}) dt \leq \int_0^1 \sqrt{\mu} ||x||_{\mathrm{euc}}^2 dt.$$

Cela implique que $d^g(p, q) \leq \sqrt{\mu} R$. $\square$

Théorème : Si $F : (X, g, d^g) \longrightarrow (Y, \tilde{g}, d^{\tilde{g}})$ est une isométrie d'espaces métriques, alors $F \in C^\infty(X, Y)$ et $F^*(\tilde{g}) = g$ (F est une isométrie riemannienne).

Problème : Est-ce que (X, g) et $(Y, \tilde{g})$ sont elles isométriques ?.

(2) Considérons un fibré vectoriel $\pi : E \longrightarrow X$. Il existe une connexion

$$\begin{aligned} \nabla : C^\infty(X, TX) \times C^\infty(X, E) &\longrightarrow C^\infty(X, E) \\ (V, S) &\mapsto \nabla_V S \end{aligned}$$

telle que :

- $\nabla_V(f \cdot S) = df(V) \cdot S + f \cdot \nabla_V S$.
- $\nabla_{f \cdot U + g \cdot V} S = f \cdot \nabla_U S + g \cdot \nabla_V S$.

Proposition 6.2.1 (Levi-Civita)**.** Soit (X, g) une variété riemannienne. Il existe une unique connexion ∇ (appelé **connexion Levi-Civita**) telle que :

(1) $U(g(V, W)) = g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W)$ (la connexion est **métrique**).

(2) $\nabla_U V - \nabla_V U = [U, V]$ (la connexion est **sans torsion**).

Démonstration : Nous avons commencer avec l'existence et l'unicité.

$$\begin{aligned}
U(g(U, V)) &= g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W) \ (1)\\
V(g(W, U)) &= g(\nabla_V W, U) + g(W, \nabla_V U) \ (2)\\
W(g(U, V)) &= g(\nabla_W U, V) + g(U, \nabla_W V) \ (3)\\
(1) + (2) - (3) : \ & g(\nabla_U V + \nabla_V U, W) + g(\nabla_U W - \nabla_W U, V) + g(\nabla_V W - \nabla_W V, U) =\\
&= U(g(V, W)) + V(g(U, W)) - W(g(U, V))\\
\implies \ & 2g(\nabla_U V, W) = U(g(V, W)) + V(g(U, W)) - W(g(U, V))\\
&\qquad - g([U, W], V) - g([V, W], U) - g([U, V], W).
\end{aligned}$$

Comme g est non-dégénérée, on a que $\nabla_U V$ est déterminée par la partie droite.

Une approche alternative : TX possède une connexion ∇^0. Toute autre connexion $\nabla_U = \nabla_U^0 + A_U$, avec $A \in C^\infty(X, T^* \otimes T^* \otimes T)$.

(1) Cette propriété est équivalent à

$$g(A_U(V, W)) + g(A_U(W), V) = U(g(V, W)) - g(\nabla_U^0 V, W) - g(V, \nabla_U^0 W) = \nabla^0 g,$$

où $\nabla^0 g \in C^\infty(X, T^*X \otimes T^*X \otimes TX)$. Cela est équivalent à $A_U^{\mathrm{sym}} = \nabla_U^0 g$.

(2) Cette propriété est équivalent à

$$A_U(V) - A_V(U) = \nabla_U^0 V - \nabla_V^0 U - [U, V] = T\nabla^0 \in C^\infty(X, T^* \otimes T^* \otimes T) \text{ (torsion)}.$$

$\square$

Lemme 6.2.2. Si $\tilde{A} \in C^\infty(X, T^* \otimes T^* \otimes T)$ est telle que :

(1) Pour tout U : $U(\tilde{A}_U)^{\mathrm{sym}_g} = 0$.

(2) $\tilde{A}_U V - \tilde{A}_V U = 0$.

Alors $\tilde{A} = 0$.

RAPPEL 6.2.3. Soit (V, g) un espace vectoriel euclidien, où l'application $g : V \longrightarrow V^*$ est donnée par $v \mapsto v^\flat = g(v, \cdot)$, est un isomorphisme. L'inverse $g^{-1} : V^* \longrightarrow V$ notée par $\alpha \mapsto \alpha^\#$ satisfait $g(\alpha^\#, v) = \alpha(v)$. Notez que $v^\flat(U) = g(V, U)$ et $(v^\flat)^\# = v$.

Lemme 6.2.3. $(\nabla_U \alpha^{\#})^{\flat} = U(\alpha(V)) - \alpha(\nabla_U V)$ est une connexion sur T^*X.

Démonstration : $U(\alpha(V)) - \alpha(\nabla_U V) = U(g(\alpha^{\#}, V)) - g(\alpha^{\#}, \nabla_U V) = g(\nabla_U \alpha^{\#}, V) = (\nabla_U \alpha^{\#})^{\flat}(V)$. □

Lemme 6.2.4. Soit $\nabla : C^\infty(X, T^p_q(X)) \longrightarrow C^\infty(X, T^{p+1}_q(X))$ l'application qui satisfait les conditions suivantes :

(1) $\nabla_U f := df(U)$.

(2) $\nabla_U V$ déjà définie.

(3) $(\nabla_U \alpha)(V) = U(\alpha(V)) - \alpha(\nabla_U V)$.

(4) $\nabla_U (V \otimes W) = (\nabla_U V) \otimes W + V \otimes \nabla_U W$.

(5) $\nabla_U (\alpha \otimes \beta) = (\nabla_U \alpha) \otimes \beta + \alpha \otimes (\nabla_U \beta)$.

Alors ∇ définit une connexion sur $T^p_q(X)$.

Lemme 6.2.5. Si $\alpha \in \Omega^k(X)$ alors $d\alpha = \frac{1}{k+1} \cdot \mathrm{Anti}(\nabla \omega)$.

Démonstration : Pour $k = 1$ soit $\alpha \in \Omega^1(X)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Anti}(\nabla\alpha)_{U,V} &:= \frac{1}{2} \cdot [(\nabla_U \alpha)(V) - (\nabla_V \alpha)(U)] \\
&= \frac{1}{2} \cdot [U(\alpha(V)) - V(\alpha(U)) - \alpha(\nabla_U V) + \alpha(\nabla_V U)] \\
&= \frac{1}{2} \cdot [U(\alpha(V)) - V(\alpha(U)) - \alpha([U, V])] \\
&= d\alpha(U, V).
\end{aligned}$$

□

6.3 Courbure riemannienne et Théorème de Cartan-Kähler

RAPPEL 6.3.1. Soit ∇ une connexion sur $E \longrightarrow X$, alors nous avons la courbure de ∇ :

$$R^{\nabla} \in C^\infty(X, \Delta^2(T^*X) \otimes E^* \otimes E).$$

Notons par R^g la **courbure de Levi-Civita**. Alors $R^g_{U,V} W \in C^\infty(X, TX)$.

Définition 6.3.1. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de (T_aX, g_a). **L'endomorphisme de Ricci** est définie par

$$\mathrm{Ric}_a := \sum_{i=1}^{n} (R^g_{e_i,v})(e_1).$$

Définition 6.3.2. La **courbure scalaire** en $a \in (X, g)$ est définie par

$$\mathrm{Scal}^g(a) := \sum_{i,j} g(R_{e_1,e_j}(e_i), e_j).$$

Théorème 6.3.1 (Cartan-Kähler)**.** Soient (X, g) et $(\tilde{X}, \tilde{g})$ deux variétés riemanniennes de même dimension. Admettons que il existe une carte $(\mathcal{U}, \varphi)$ de X avec $a \in \mathcal{U}$, et une carte $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\varphi})$ de $\tilde{X}$ avec $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{U}}$, telles que

$$g|_{\mathcal{U}} = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j$$

avec $g_{ij} \in C^{\omega}(\Omega)$ (analytique réelle) et

$$\tilde{g}|_{\tilde{\mathcal{U}}} = \sum_{i,j} \tilde{g}_{i,j}(\tilde{x}) d\tilde{x}_i \otimes d\tilde{x}_j$$

avec $\tilde{g}_{ij}(\tilde{x})$ analytiques réelles. Notons par R et $\tilde{R}$ les tenseurs de courbures respectives et par $\nabla^k R$ (resp. $\tilde{\nabla}^k \tilde{R}$) les dérivées covariantes. S'il existe $L : T_aX \longrightarrow T_{\tilde{a}}\tilde{X}$, linéaire, telle que

$$L((\nabla^k R)_a) = (\tilde{\nabla}^k \tilde{R})_{\tilde{a}}, \text{ pour tout } k = 0, 1, \dots$$

alors il existe une isométrie riemannienne $\Phi : \mathcal{U}_a \longrightarrow \tilde{U}_{\tilde{a}}$.

Cas spécial : Supposons que $\nabla R = 0$ ($\nabla^k R = 0$, $k = 1, 2, \dots$). Alors $(R)_a$ détermine la classe d'isométrie locale.

Définition 6.3.3. Une variété riemannienne que vérifie $\nabla R = 0$ s'appelle **localement symétrique**.

Si (X, g) est simplement connexe elle est localement symétrique ssi $X = G/H$, où $H \subseteq G$ est compact et H est simple.

Exemple 6.3.1. Étant donnée la métrique locale $g|_{\mathcal{U}} = e^{2u(x,y)}[dx \otimes dx + dy \otimes dy]$ sur $\mathbb{R}^2$, comment calculer R^g ?. Soit $V_1 = e^{-1}\frac{\partial}{\partial x}$ et $V_2 = e^{-u}\frac{\partial}{\partial y}$. Alors $\{V_1, V_2\}$ est une base orthonormale en tout point. Soit $\{\alpha = e^u dx, \beta = e^u dy\}$ la base duale. Posons $V = \alpha^{\#}$ et $W = \beta^{\#}$. Nous avons

$$\begin{aligned} g(\nabla_U V, V) + g(V, \nabla_U V) &= U(g(V, V)) \\ 2g(\nabla_U V, V) &= U(g(V, V)) = 0 \text{ car } ||V||_g^2 = 1, \\ g(\nabla_U V, V) &= 0 \text{ i.e. } \nabla_U V = \theta(U) W \iff (\nabla_U \alpha)(\tilde{U}) = \theta(U)\beta(\tilde{U}) \ (\nabla \alpha = \theta \otimes \beta). \end{aligned}$$

Trouvons θ :

$$\begin{aligned} g(\nabla_U V, W) + g(U, \nabla_U W) &= U(g(V, W)) = 0 \text{ car } g(V, W) = 0, \\ \nabla_U W &= -\theta(U) V \iff \nabla \beta = -\theta \otimes \alpha. \end{aligned}$$

Nous avons $\nabla\alpha = \theta \otimes \beta$ et $\beta = -\theta \otimes \alpha$, pour $\alpha = e^u dx$ et $\beta = e^u dy$. Donc

$$\begin{aligned}\theta \wedge \beta = d\alpha = e^u(u_y dy) \wedge dx = e^u \theta \wedge dy \Longrightarrow \theta_x = -u_y.\\ d\beta = e^u u_x dx \wedge dy = -e^u(\theta_x dx + \theta_y dy) \wedge dx + e^u \theta_y dx \wedge dy.\end{aligned}$$

Conclusion : $\theta = -u_y dx + u_x dy$.

Lemme 6.3.1. Si $\alpha \in \Omega^1(X)$ sur (X, g), $\nabla^2\alpha \in C^\infty(X, (T^*X)^{\otimes 3})$. Alors $(\nabla^2_{V,U} - \nabla^2_{U,V})(\alpha) = (R^g_{U,V}\alpha^\#)^\flat$ (**Identité de Ricci**).

Démonstration :

$$(\nabla^2_{V,U}\alpha)(W) = V((\nabla_U\alpha)(W)) - (\nabla_{\nabla_V U}\alpha)(W) - (\nabla_U\alpha)(\nabla_V W) = \nabla_V((\nabla_U\alpha)^\#) - (\nabla_{\nabla_V U}\alpha)^\#.$$

□

Remarque 6.3.1. Considérons l'application $d^\nabla : C^\infty(X, \Omega^k(T^*X)) \longrightarrow C^\infty(X, \Omega^{k+1}(T^*X))$. Pour $\alpha \in C^\infty(X, T^*X)$, $d^\nabla\alpha = \nabla\alpha \in C^\infty(X, \Omega^1(T^*X))$. Alors

$$d^\nabla \circ d^\nabla(\alpha) = \frac{1}{2}(\nabla^2_{V,U} - \nabla^2_{U,V})(\alpha) = -\frac{1}{2}R^\nabla_{U,V}(\alpha).$$

Par le lemme précédent :

$$(\nabla^2_{V,U} - \nabla^2_{U,V})(\alpha) = (R^g_{U,V}\alpha^\#)^\flat.$$

Rappelez que

$$\begin{cases} \nabla\alpha = \theta \otimes \beta, \\ \nabla\beta = -\theta \otimes \alpha, \\ \theta = -u_y dx + u_x dy. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \nabla^2_{V,U}\alpha &= \nabla\theta \otimes \beta + \theta \otimes \nabla\beta = \nabla\theta \otimes \beta - \theta \otimes \theta \otimes \alpha \\ (\nabla^2_{V,U} - \nabla^2_{U,V})(\alpha) &= 2d\theta(U, V)\beta = (R_{U,V}\alpha^\#)^\flat \\ (R_{U,V}\alpha^\#)^\flat &= -2d\theta(U, V)\beta \\ (R_{U,V}\alpha^\flat)^\flat &= -2[(u_{yy} + u_{xx})dx \wedge dy]_{U,V} \otimes \beta, \\ (R_{U,V}\beta^\#)^\flat &= 2[u_x + u_{yy}](dx \wedge dy)_{U,V} \otimes \alpha. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathrm{Scal}^g &= g(R_{e_1,e_2}e_1, e_2) + g(R_{e_2,e_1}e_2, e_1) \\ \mathrm{Scal}^g &= -2e^{-2u}[u_{xx} + u_{yy}] \ \left(\mathrm{Gauss} = \frac{1}{2}\mathrm{Scal}^g\right). \end{aligned}$$

Exemple 6.3.2.

(1) Pour $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$ sur $\mathbb{R}^2$: $\mathrm{Scal}^g = 0$.

(2) Considérons (S^2, g^{S^2}). Dans une carte stéréographique, nous avons

$$g^{S^2} = 4\frac{(dx \otimes dx + dy \otimes dy)}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
e^{2u} &= \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2},\\
u &= -\log(1+x^2+y^2) + \log(2),\\
\mathrm{Scal}^{g^{S^2}} &= -2\frac{(1+x^2+y^2)^2}{4}\left[-\frac{4}{1+x^2+y^2} + 4\frac{(x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\right] = 2,\\
u_x &= -\frac{2x}{1+x^+y^2},\\
u_{xx} &= -\frac{2}{1+x^2+y^2} + 4\frac{x^2}{(1+x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

(3) Pour $(\mathbb{D}, g)$, où $g = 4\frac{(dx\otimes dx + dy \otimes dy)}{(1-x^2-y^2)^2}$, on a $\mathrm{Scal}^g = -2$.

Remarque 6.3.2. $\mathrm{Scal}^g = \mathrm{const}$ ssi $\nabla^k R^g = 0$ (pour $n = 2$).

Théorème 6.3.2. Toute surface riemannienne à courbure scalaire constante $(= \pm 2, 0)$ est localement isométrique à un des trois modèles (1), (2) ou (3).

6.4 Formes harmoniques et le Théorème de Hodge

Définition 6.4.1. Soit (X, g) une variété riemannienne orientée. La forme volume riemannienne est $V^g \in \Lambda^n(T^*X)$ telle que :

(1) $V^g \in \mathrm{or}$.

(2) $||V^g||_g^2 = 1$.

Notation : (T_aX, g_a) est un espace euclidien, où $g_a : T_aX \longrightarrow T_a^*X$ est donnée par $v \mapsto v^\flat$, $v^\flat(u) := g(v,u)$. Aussi, (T_a^*X, g_a^*) est un espace euclidien où $g_a^*(\alpha, \beta) := g_a(\alpha^\#, \beta^\#)$. Alors T_q^pX est muni d'un produit scalaire g_a. En particulier, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Si $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_p \in \Lambda^p(T_a^*X)$, alors $g_a(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_p) := \det(g_a^*(\alpha_i, \beta_j))$.

(2) Si $\{e^1, \ldots, e^n\}$ est une base orthonormale de (T_a^*X, g_a^*) alors $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} : 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n\}$ est orthonormale.

Définition 6.4.2. $\mathrm{Vol}(X, g) := \int_X V^g$.

Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ coordonnées locales. Alors $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ est une base de T^*X. On a

$$g = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i \otimes dx_j.$$

Nous avons $V^g = k dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Qui est k ?.

Exercice 6.4.1. Soit (V, g) un espace euclidien. L'espace dual (V^*, g^*) est muni de la métrique induite. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de V, considérons la matrice $G = (g(v_i, v_j))$. Pour la base duale $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ de V^*, prouver que $G^* = G^{-1}$.

Pour la base $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$ de $\Lambda^n(TX)$, on a

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \det\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \det(g_{ij}(x)).$$

Pour la base $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ de $\Lambda^n(T^*X)$, on a

$$g(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \frac{1}{\det(g_{ij}(x))}.$$

Alors

$$V^g = \sqrt{\det(g_{ij}(x))} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Pour chaque $\beta \in \Lambda^{n-p}(T_a^*X)$, posons

$$\begin{aligned} f_\beta : \lambda^p(T_a^*X) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \alpha &\mapsto \frac{\beta \wedge \alpha}{V^g}. \end{aligned}$$

Donc $\beta \wedge \alpha = f_\beta(\alpha) V^g$. Notez que $f_\beta \in (\Lambda^p(T_a^*X))^*$ et $g_a : \Lambda^p(T_a^*X) \cong^{\#^{-1}} (\Lambda^p(T_a^*X))^*$. Nous avons $\beta \mapsto f_\beta^\# \in \Lambda^p(T_a^*X)$.

Définition 6.4.3. L'operateur de Hodge est l'application $*_g : \Lambda^p(T_a^*X) \longrightarrow \Lambda^{n-p}(T_a^*X)$ définie par

$$g(\alpha, \beta) V^g = \alpha \wedge (*_g(\beta)), \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \Lambda^p(T_a^*X).$$

Exemple 6.4.1.

(1) Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormale orientée positive. Posons $V^g = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$. Alors

$$*_g(e^1 \wedge \cdots \wedge e^p) = e^{\beta+1} \wedge \cdots \wedge e^n \text{ et } V^g = e^1 \wedge \cdots \wedge e^p \wedge *_g(\alpha).$$

Plus généralement

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} \wedge *(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}) = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} e^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e^{i_n},$$

où $\{e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}, e^{i_{p+1}}, \ldots, e^{i_n}\}$ est la base et $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} \wedge e^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e^{i_n} = V^g$.

(2) Pour $V \cong \mathbb{R}^3$, soit $\{e^1, e^2, e^3\}$ une base orthonormale. On a

$$*_g(e^1 \wedge e^2 + e^2 \wedge e^3) = e^3 + e^1.$$

Lemme 6.4.1. $*_g^2 = (-1)^{p\cdot(n-p)}$ où $*_g : \Lambda^p(T_a^*X) \longrightarrow \Lambda^{n-p}(T_a^*X)$, où

$$* :\ e^1 \wedge \cdots \wedge e^p \mapsto e^{p+1} \wedge \cdots \wedge e^n \mapsto (-1)^{p\cdot(n-p)} e^1 \wedge \cdots \wedge e^p.$$

Définition 6.4.4. Soit $d^* : \Omega^p(X) \longrightarrow \Omega^{p-1}(X)$ l'application

$$\alpha \mapsto (-1)^{np+n+1} *_g \circ d \circ *_g \circ \alpha.$$

Exemple 6.4.2. Considérons $\mathbb{R}^3$ avec la métrique euclidienne g_{euc}, et $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ la base de sections orthonormales. Pour $\alpha = df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, on a

$$\begin{aligned} d^*(df) &= - * \circ d \circ * \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) \\ &= - * \circ d \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \right) \\ &= - * \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\ &= -L^{\text{euc}}(f) \text{ (Laplacien de } f). \end{aligned}$$

Conclusion : $d^* df = -L^{\text{euc}}(f)$.

Définition 6.4.5. Le **Laplacien riemannien** est définie comme l'operateur $\Delta^g := d \circ d^* + d^* \circ d : \Omega^p(X) \longrightarrow \Omega^p(X)$, pour $p = 0, 1, \ldots, n$, avec $d^* : \omega^0(X) \longrightarrow \{0\}$.

Proposition 6.4.1. Soit (X, g) une variété riemannienne compacte et orientée.

(1) Si $\alpha \in \Omega^p(X)$ et $\beta \in \Omega^{p-1}(X)$, alors $\int_X (d^*\alpha, \beta)_g V^g = \int_X (\alpha, d\beta)_g V^g$.

(2) $\int_X (\Delta^g \alpha, \beta) V^g = \int_X (\alpha, \Delta^g \beta) V^g$ et $\int_X (\Delta^g \alpha, \alpha)_g V^g = \int_X (d\alpha, d\alpha)_g V^g + \int_X (d^*\alpha, d^*\alpha)_g V^g \geq 0$.

Démonstration :

(1)

$$\begin{aligned} \int_X (d^*\alpha, \beta)_g V^g &= (-1)^{np+n+1} \int_X (* \circ d \circ *\alpha, \beta)_g V^g = (-1)^{np+n+1} \int_X (\beta, * \circ d \circ *\alpha)_g V^g \\ &= (-1)^{np+n+1} \int_X \beta \wedge *(* \circ d \circ *\alpha) = (-1)^{np+n+1} \cdot (-1)^{n(np+n+1)+n+1} \int_X \beta \wedge d \circ *\alpha \\ &= (-1)^p \int_X \beta \wedge d \circ *\alpha, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d(\beta\wedge *\alpha) &= d\beta\wedge(*\alpha)+(-1)^{p-1}\beta\wedge d\circ *\alpha,\\
&\implies (-1)^p\beta\wedge(d\circ *\alpha) = d\beta\wedge(*\alpha)-d(\beta\wedge *\alpha)\\
&\implies (-1)^p\int_X \beta\wedge d\circ *\alpha = \int_X d\beta\wedge(\alpha\alpha)-\int_X d(\beta\wedge *\alpha)=\int_X d\beta\wedge(*\alpha)\ \text{(Stokes)}.
\end{aligned}
$$

$$
\int_X (d^*\alpha,\beta)_g V^g = \int_X d\beta\wedge(*\alpha) = \int_X (d\beta,\alpha)_g V^g = \int_X (d\beta,\alpha)_g V^g.
$$

(2) $\int_X(\Delta^g\alpha,\beta)V^g = \int_X(d\circ d^*\alpha + d^*\circ d\alpha,\beta)_g V^g = \int_X(\alpha,(d\circ d^*+d^*\circ d)\beta)_g V^g$, par (1). De plus,

$$
\begin{aligned}
\int_X((d\circ d^*+d^*\circ d)\alpha,\alpha)_g V^g &= \int_X(d\circ d^*\alpha,\alpha)_g V^g + \int_X(d^*\circ d\alpha,\alpha)_g V^g,\ \text{par (1)}\\
&= \int_X |d^*\alpha|_g^2 V^g + \int_X |d\alpha|_g^2 V^g,\ \text{par (1)}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Exemple 6.4.3. Soit $X=\mathbb{R}^3$ avec la métrique euclidienne g^{euc} et $\alpha = a_1(x)dx_1$. Computons $\Delta^g\alpha$:

$$
\begin{aligned}
d^*\alpha &= -*\circ d\circ *\alpha = -*\circ d(a_1dx_2\wedge dx_3) = -*\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\right) = -\frac{\partial a_1}{\partial x_1}.\\
d\circ d^*\alpha &= -\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1\partial x_2}dx_2 - \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1\partial x_3}dx_3 - \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2}dx_1 = d^*\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_2\wedge dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}dx_3\wedge dx_1\right)\\
&= *\circ d\circ *\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_2\wedge dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}dx_3\wedge dx_1\right) = *\circ d\left(-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_3 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}dx_2\right)\\
&= *\left(-\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1\partial x_2}dx_1\wedge dx_3 - \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2}dx_2\wedge dx_3 + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_3\partial x_1}dx_1\wedge dx_2 + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_3^2}dx_3\wedge dx_2\right)\\
&= \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1\partial x_2}dx_2 - \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2}dx_1 + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1\partial x_3}dx_3 - \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2}dx_1.\\
\Delta^{g^{\mathrm{euc}}}(a_1dx_1) &= -L^{\mathbb{R}^3}(a_1)dx_1.
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\Delta^{g^{\mathrm{euc}}}(a_1dx_1+a_2dx_2+a_3dx_3) = -L^{\mathbb{R}^3}(a_1)dx_1 - L^{\mathbb{R}^3}(a_2)dx_2 + -L^{\mathbb{R}^3}(a_3)dx_3$.

Remarque 6.4.1. Cas général : *Localement, $g|_{\mathcal{U}} = \sum_{i,j} g_{ij}(x)dx_i\otimes dx_j$. Calculons $\Delta^g(\alpha)|_{x=0}$. Après un changement linéaire de coordonnées, sans perte $g_{ij}(0)=\delta_{ij}$. Alors $\{dx_1|_0,\dots,dx_n|_0\}$ est une base orthonormale. Pour $\alpha=\sum_{i=1}^n a_i(x)dx_i$, on a*

$$
(\Delta^g\alpha)|_{x=0} = \sum_i\left(\sum_j \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j^2}(0)\right)dx_i.
$$

Définition 6.4.6. Soient $E\longrightarrow X$ et $F\longrightarrow X$ deux fibrés vectoriels d'ordre k. Un **opérateur différentielle** est une application linéaire $p: C^\infty(E)\longrightarrow C^\infty(F)$ telle que si $\varphi(a)=0$ et $d\varphi|_a\neq 0$, alors $p(\varphi^{k+1}S)_a=0$.

Théorème 6.4.1 (Petré)**.** Dans tout carte $(\mathcal{U}, \varphi)$,

$$p(S)_{\mathcal{U}} = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha \mathcal{U}(x),$$

où $D^\alpha \mathcal{U} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \mathcal{U}$.

Exemple 6.4.4. Δ^g est un opérateur différentielle linéaire d'ordre 2.

Définition 6.4.7. Pour $\zeta \in T_a^* X \backslash \{0\}$ soit $\varphi \in C^\infty(X)$ telle que $\varphi(a) = 0$ et $(d\varphi)_a = \zeta$. Le **symbol principal d;un opérateur différentiel d'ordre** r est définie par

$$\sigma_\zeta(p, a) := \frac{1}{k!} p(\varphi^k S)_a, \text{ pour } S \in C^\infty(E).$$

Dans une carte $\mathcal{U}$, on a $p|_{\mathcal{U}} = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha \mathcal{U}$. Alors

$$p(\varphi^k S) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) \zeta^\alpha, \text{ où } \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in T_a^* X.$$

Donc $\sigma_\zeta(p, a) \in E_a^* \otimes F_a$.

Fait : Soit (X, g) une variété riemannienne, alors

$$\sigma_\zeta(\Delta^g)|_a = -g_a(\zeta, \zeta)\mathrm{Id}.$$

Définition 6.4.8. Un opérateur $p : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est **elliptique** si pour tout a et pour tout $\zeta \neq 0$, le symbol $\sigma_\zeta(p, a) : E_a \longrightarrow F_a$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En particulier, $\Delta^g : \Omega^p(X) \longrightarrow \Omega^p(X)$ est elliptique. Si X est une variété compacte et $p : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est elliptique, alors

$$\mathrm{Ker}(p) = \{S \in C^\infty(E) : p(S) = 0\}$$

est de dimension finie.

Définition 6.4.9. Un forme $\alpha \in \Omega^p(X)$ est dite **harmonique** si $\Delta^g(\alpha) = 0$.

Proposition 6.4.2. Soit (X, g) une variété riemannienne compacte et orientée.

(1) $\alpha \Omega^p(X)$ est harmonique ssi $d\alpha = 0$ et $d^*\alpha = 0$.

(2) Dans toute classe de deRham il existe au maximum une forme harmonique.

Démonstration :

(1) $0 = \int_X (\Delta^g \alpha, \alpha)_g V^g = \int_X |d\alpha|_g^2 V^g + \int_X |d^*\alpha|_g^2 V^g = 0$ si α est harmonique. Alors $d\alpha = 0$ et $d^*\alpha = 0$. Si $d\alpha = 0$ et $d^*\alpha = 0$, alors $\Delta^g = d^* \circ d + d \circ d^*$ s'annule à α.

(2) Si $\alpha = \alpha' + d\beta$ et α et α' sont harmoniques, alors $d^*\alpha = d^*\alpha' = 0$ (par (1)). Par conséquent $d^* \circ d\beta = 0$ et

$$\int_X (d^* \circ d\beta, \beta)_g V^g = \int_X (d\beta, d\beta)_g V^g = 0.$$

On a $d\beta = 0$ et ceci implique $\alpha = \alpha'$.

□

Théorème 6.4.2 (Hodge)**.** Soit X une variété compacte et orientée. Soit $a \in H(X)$ et g une métrique riemannienne. Alors il existe une unique forme harmonique α telle que $\alpha \in a$.

Corollaire 6.4.1.

(1) Si X est compacte et orientée, alors $\dim(H(X)) < \infty$.

(2) Comme $*_g\Delta^g = \Delta^g *_g$, alors α est harmonique dans $\Omega^g(X)$ ssi $*_g\alpha$ est harmonique dans $\Omega^{n-p}(X)$. Par conséquent,

$$H^p(X) \cong^{*_g} H^{n-p}(X) \text{ (\textbf{Dualité de Poincaré})}.$$

(3) $\dim(\mathrm{Ker}(\Delta^g)) = \dim(H(X))$ n'est depend pas de g.

Comment on peut introduire de nouveaux invariantes topologiques à partir des opérateurs différentielles ? (Théorème d'indice d'Atiyah-Singer).

FIN

BIBLIOGRAPHIE

[1] Anderson, J. *Hyperbolic Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag. London (1999).

[2] Apostol, T. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Manila (1974).

[3] Boothby, W. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, Inc. Orlando (1986).

[4] Do Carmo, M. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser. Boston (1992).

[5] Fecko, M. *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. Cambridge University Press. Cambridge (2006).

[6] Iversen, B. *Hyperbolic Geometry. London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press. Cambridge (1992).

[7] Kriele, M. *Spacetime: foundations of general relativity and differential geometry*. Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag. Berlin (1999).

[8] Lee, John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Inc. New York. (2003).

[9] Naber, G. *Topology, Geometry and Gauge Fields: Foundations*. Springer-Verlag. New York (2010).

[10] Petersen, P. *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York (2006).

[11] Quan, P. M. *Introduction à la Géométrie des Variétés Différentiables*. Dunod. Paris (1969).

[12] Spivak, M. *A comprehensive Introduction to Differential Geometry. Volume One*. Publish or Perish, Inc. Berkeley (1979).

[13] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Gropus*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Inc. New York. (1983).