CÁLCULO VECTORIAL

TEMA 3

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

En el curso de CDI1V se estudian condiciones para que una función derivable de una variable sea localmente invertible, y con inversa derivable. Más específicamente, si tenemos $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en I y diferenciable en I°, y si $x_0 \in I^\circ$ es un punto tal que $f'(x_0) \neq 0$, entonces existe un entorno U de x_0 y un entorno V de $y_0 = f(x_0)$ tales que la restricción $f|_U\colon U \to V$ es una biyección diferenciable, con inversa $(f|_U)^{-1}\colon V \to U$ diferenciable y tal que

$$((f|_U)^{-1})'(y) = \frac{1}{f'((f|_U)^{-1}(y))}$$

para todo $y \in V$. A este resultado se le conoce como el *Teorema de la Función Inversa* para funciones de una variable, aunque pocas veces nos referimos a él de esta manera en el curso de CDI1V.

El objetivo de esta parte del curso, y en particular de estas notas, es presentar y demostrar la generalización de este teorema para campos vectoriales $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Del tema anterior (extremos absolutos y relativos de campos escalares) sabemos que el análogo vectorial a la derivada (de una función de una variable) es el diferencial de orden 1, o la matriz Jacobiana (de un campo vectorial). Volvamos a la condición $f'(x_0) \neq 0$. Esto quiere decir que $f'(x_0) > 0$ o que $f'(x_0) < 0$. Supongamos que estamos en la primera situación. Entonces, existe un entorno U de x_0 en el cual f es estrictamente monótona creciente, y por lo cual se puede invertir en dicho entorno de x_0. Por otro lado, que $f'(x_0) \neq 0$ significa que la transformación lineal $\Delta x \mapsto f'(x_0)\Delta x$ es invertible. Es decir, que una condición para invertir localmente una función es que la transformación lineal asociada a la derivada en un punto sea invertible. En términos de campos vectoriales $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, esta condición se traduce a pedir que la transformación lineal $\boldsymbol{dF_{x_0}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sea invertible (o equivalentemente, que $\det(J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0})) \neq 0$).

3.1 Función inversa y ejemplos

Comencemos con las definiciones de inversas globales y locales. En lo que sigue, dado un subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{Id}_U : U \to U$ denota la función identidad sobre U, es decir

$$\mathbf{Id}_U(\boldsymbol{x}) = \mathbf{Id}_U(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) = \boldsymbol{x}, \text{ para todo } \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U.$$

Definición 3.1.1. *Sea $\boldsymbol{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial, y $\boldsymbol{x_0} \in U^\circ$. Diremos que $\boldsymbol{F}$ es **localmente invertible en $\boldsymbol{x_0}$** si existen entornos $W \subseteq U$ de $\boldsymbol{x_0}$ y V de $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0})$ tales que la restricción $\boldsymbol{F}|_W : W \to V$ es una biyección, es decir, que existe la inversa $(\boldsymbol{F}|_W)^{-1} : V \to W$ (donde se cumple que $(\boldsymbol{F}|_W)^{-1} \circ \boldsymbol{F}|_W = \mathbf{Id}_W$ y $\boldsymbol{F}|_W \circ (\boldsymbol{F}|_W)^{-1} = \mathbf{Id}_V$).*

Como mencionamos en la introducción a estas notas, el teorema de la función inversa nos garantiza la posibilidad de hallar inversas locales bajo ciertas condiciones suficientes. Pero de hecho dice más que eso, a saber, si el campo vectorial que se nos da es de clase C^k, entonces su inversa local será de la misma naturaleza. A continuación enunciamos este teorema y veremos algunos ejemplos de inversas locales y globales. La demostración la dejaremos para la próxima sección.

Teorema 3.1.2 (de la función inversa)**.** *Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, \dots, F_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k (es decir, cada F_i tiene derivadas parciales continuas hasta el orden k), y sea $\boldsymbol{x_0} \in U^\circ$ un punto tal que $\det(J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0})) \neq 0$ (es decir, que la matriz $J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0})$ es invertible). Entonces $\boldsymbol{F}$ es localmente invertible en $\boldsymbol{x_0}$, y su inversa local $\boldsymbol{F}^{-1}$ es de clase C^k. Más aún,*

$$J_{\boldsymbol{F}^{-1}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0})) = (J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0}))^{-1},$$

es decir, la matriz Jacobiana de $\boldsymbol{F}^{-1}$ en $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0})$ es la inversa de la matriz Jacobiana de $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{x_0}$.

Ejemplo 3.1.3. *Analizamos los siguientes ejemplos tomados de las notas de Ana González. Hallaremos inversas locales cuando el teorema de la función inversa nos dé garantía de ello.*

1. *Veamos que el campo vectorial $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por*

   $$\boldsymbol{F}(x, y) = (\sin(x), \sin(y))$$

   es localmente invertible en $(0,0)$. Hallemos la matriz Jacobiana de $\boldsymbol{F}$ en $(0,0)$:

   $$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \cos(x), \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y} = \cos(y).$$

   Nos queda entonces

   $$J_{\boldsymbol{F}}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2},$$

   y esta matriz es claramente invertible. Por el teorema de la función inversa, $\boldsymbol{F}$ es localmente *invertible en* $(0,0)$*, con inversa local* $\boldsymbol{F}^{-1}$ *de clase* C^∞ *(ya que* $\boldsymbol{F}$ *es de clase* C^∞*), y además*

$$J_{\boldsymbol{F}^{-1}}(0,0) = J_{\boldsymbol{F}^{-1}}(\boldsymbol{F}(0,0)) = (J_{\boldsymbol{F}}(0,0))^{-1} = I_{2\times 2}.$$

El teorema de la función inversa nos garantiza la existencia de inversas locales, pero no nos dice cómo calcularlas. Esto último depende de la naturaleza de la función dada, es decir, de atributos como su dominio o la fórmula que la define. Llegados a este punto, lo que debemos hacer es ver cómo despejar $(x,y) \in W$ *a partir de la ecuación* $\boldsymbol{F}(x,y) = (u,v)$*, donde* W *y* V *son los entornos de* $(0,0)$ *y de* $\boldsymbol{F}(0,0)$ *donde* $\boldsymbol{F}|_W \colon W \to V$ *es invertible. En este proceso de despejar también nos daremos cuenta de cómo tomar* W *y* V*.*

Partiendo de $(\sin(x), \sin(y)) = \boldsymbol{F}(x,y) = (u,v)$*, tenemos que* $u = \sin(x)$ *y* $v = \sin(y)$*. Consideremos la primera igualdad. Sabemos que podemos invertir en un entorno de* $x = 0$*. Podemos tomar tal entorno como el intervalo abierto* $(\pi/2, \pi/2)$*, que contiene a* $x = 0$ *y sobre el cual sabemos que la función seno es invertible. Tenemos así que* $x = \arcsin(u)$*, donde* $u \in (-1,1)$*. De manera similar,* $y = \arcsin(v)$ *donde* $y \in (\pi/2, \pi/2)$ *y* $v \in (-1,1)$*. Lo anterior sugiere tomar* $W = (\pi/2, \pi/2) \times (\pi/2, \pi/2)$ *y* $V = (-1,1) \times (-1,1)$*, y*

$$\boldsymbol{F}^{-1} \colon (-1,1) \times (-1,1) \subseteq \mathbb{R}^2 \to (\pi/2, \pi/2) \times (\pi/2, \pi/2) \subseteq \mathbb{R}^2$$

viene dada por

$$\boldsymbol{F}^{-1}(u,v) = (\arcsin(u), \arcsin(v)),$$

para todo $(u,v) \in (-1,1) \times (-1,1)$*.*[1]

2. *El campo vectorial* $\boldsymbol{G} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dado por*

$$\boldsymbol{G}(x,y) = (x^2, y)$$

no es localmente invertible en $(0,0)$*. Para notar esto, basta darse cuenta que la primera componente* $x \mapsto x^2$ *no es localmente invertible en* $x = 0$*. Poe este mismo razonamiento,* $\boldsymbol{G}$ *no es localmente invertible en ningún punto ubicado a lo largo del eje* Y*. Sin embargo,* $\boldsymbol{G}$ *es localmente invertible en cualquier punto* (x_0, y_0) *con* $x_0 \neq 0$*. En efecto:*

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial G_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial G_2}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial G_2}{\partial y} = 1,$$

por lo cual

$$J_{\boldsymbol{G}}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1]Como observaciones, puede darse la tarea de calcular $J_{\boldsymbol{F}^{-1}}(0,0)$ a partir de la fórmula anterior y darse cuenta que coincide con $I_{2\times 2}$, tal como arrojaba el teorema de la función inversa. Note también que la elección de los entornos W y V no es única, pues cualesquiera entornos $W' \subseteq W$ y $V' \subseteq V$ de $(0,0)$ y de $\boldsymbol{F}(0,0)$, donde $\boldsymbol{F}|_{W'} \colon W' \to V'$ es invertible, también sirven.

La matriz anterior es invertible ya que $\det(J_{\boldsymbol{G}}(x_0, y_0)) = 2x_0 \neq 0$ *(pues* $x_0 \neq 0$*). Por el teorema de la función inversa, tenemos que* $\boldsymbol{G}$ *es localmente invertible en* (x_0, y_0)*. Para calcular la inversa local, supongamos que estamos en el caso donde* $x_0 > 0$ *(el caso* $x_0 < 0$ *es similar). Podemos despejar* $u = x^2$ *para cualquier* $x > 0$*, a saber,* $x = \sqrt{u}$*. Por otro lado,* $v = y$ *ya nos da un despeje inmediato para cualquier* $y \in \mathbb{R}$*. Entonces, podemos tomar* $W = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ *y* $V = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$*. La restricción*

$$\boldsymbol{G}|_W \colon (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to (0, +\infty) \times \mathbb{R}$$

es invertible, con inversa $\boldsymbol{G}^{-1} \colon (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ *dada por:*[2]

$$\boldsymbol{G}^{-1}(u, v) = (\sqrt{u}, v).$$

3. *Consideremos el campo vectorial* $\boldsymbol{H} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dado por*

$$\boldsymbol{H}(x, y) = (x, x^2 + y).$$

Calculemos la matriz Jacobiana en cualquier punto (x, y)*:*

$$J_{\boldsymbol{H}}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que $\det(J_{\boldsymbol{H}}(x, y)) = 1 \neq 0$*, por lo cual* $J_{\boldsymbol{H}}(x, y)$ *es invertible para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*. El teorema de la función inversa nos dice que* $\boldsymbol{H}$ *es localmente invertible alrededor de cualquier punto de su dominio. En este caso, las fórmulas que definen a todas las inversas locales coinciden entre sí, y esto es porque* $\boldsymbol{H}$ *es un campo* ***globalmente invertible*** *o* ***con inversa global****. En efecto, si consideramos la igualdad* $\boldsymbol{H}(x, y) = (u, v)$*, es decir,* $u = x$ *y* $v = x^2 + y$*, vemos que es muy fácil despejar* x *e* y *en términos de* u *y de* v*. Tenemos que* $x = u$ *e* $y = v - u^2$*. Por lo tanto, la inversa global* $\boldsymbol{H}^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *de* $\boldsymbol{H}$ *viene dada por:*

$$\boldsymbol{H}^{-1}(u, v) = (u, v - u^2).$$

4. *Consideremos el campo vectorial* $\boldsymbol{Q} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dado por*

$$\boldsymbol{Q}(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

A diferencial del ejemplo anterior, esta función claramente no es biyectiva, por lo que solo será posible hallar inversas locales, como mucho. En efecto, esto es posible en cualquier punto (x, y)*. Primero notamos que la matriz Jacobiana de* $\boldsymbol{Q}$ *viene dada por*

$$J_{\boldsymbol{Q}}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix}.$$

[2]Para el caso $x_0 < 0$, notamos que la inversa local viene $\boldsymbol{G}^{-1} \colon (-\infty, 0) \times \mathbb{R} \to (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$ viene dada por $\boldsymbol{G}^{-1}(u, v) = (-\sqrt{u}, v)$. Esto indica que la fórmula que define a una inversa local puede cambiar para puntos diferentes en los cuales el campo vectorial dado es localmente invertible.

Esta matriz es invertible ya que $\det(J_{\boldsymbol{Q}}(x,y)) = e^{2x} > 0$. Por el teorema de la función inversa, podemos hallar un entorno W de (x,y) y un entorno V de $\boldsymbol{Q}(x,y)$ tales que $\boldsymbol{Q}|_U \colon U \to V$ es biyectiva y con inversa $(\boldsymbol{Q}|_U)^{-1}$ de clase C^∞.

Para no complicar tanto este ejemplo, hallemos una inversa local en $(0,0)$. Queremos despejar las variables x e y de la igualdad $\boldsymbol{Q}(x,y) = (u,v)$, para pares (x,y) cerca de $(0,0)$, y (u,v) cerca de $(1,0) = \boldsymbol{Q}(0,0)$. Tenemos las igualdades

$$\begin{cases} u = e^x \cos(y), \\ v = e^x \sin(y). \end{cases}$$

Podemos despejar primero x usando propiedades de las funciones trigonométricas, y notando que

$$u^2 + v^2 = e^{2x}.$$

Como $e^{2x} > 0$, tenemos que $(u,v) \neq (0,0)$, por lo que $u > 0$ o $u < 0$.[3] Tomemos por ejemplo $u > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} 2x &= \log(u^2 + v^2) \\ x &= \log(\sqrt{u^2 + v^2}). \end{aligned}$$

Ahora podemos despejar v usando la segunda igualdad:[4]

$$\begin{aligned} e^x \sin(y) &= v \\ e^{\log(\sqrt{u^2+v^2})} \sin(y) &= v \\ \sqrt{u^2 + v^2} \sin(y) &= v \\ \sin(y) &= \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ y &= \arcsin\left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right). \end{aligned}$$

Para que el despeje anterior tenga sentido, se debe tomar $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, de donde $v \in \mathbb{R}$. Note además que x puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$. Tenemos de esta manera que $W = \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ y $V = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, donde $\boldsymbol{Q}|_W \colon W \to V$ es invertible, con inversa $\boldsymbol{Q}^{-1} \colon V \to W$ dada por

$$\boldsymbol{Q}^{-1}(u,v) = \left(\log(\sqrt{u^2 + v^2}), \arcsin\left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)\right).$$

[3] El caso $u = 0$ y $v \neq 0$ no puede ocurrir en la situación anterior, ya que nos quedaría $0 = u = e^x \cos(y)$, es decir, $y = \pm\pi/2$, lo cual queremos evitar pues estamos buscando inyectividad en un entorno de $(0,0)$.

[4] Ya que elegimos $u > 0$, no podemos usar la igualdad $e^x \cos(y) = u$ para despejar y, pues $\cos(y)$ no es inyectiva para y cerca de 0.

3.2 Demostración del teorema de la función inversa (opcional)

Necesitaremos el siguiente lema para poder probar el teorema de la función inversa. Recordemos que un rectángulo en $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto de la forma $R = I_1 \times \cdots \times I_n$, donde cada I_k es un intervalo.

Lema 3.2.1. *Sea $R \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo y $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_n)\colon R \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k. Si existe un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right| \leq M$ para todo $\boldsymbol{x_0} \in R^\circ$, entonces*

$$||\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})|| \leq n^2 M ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$$

para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R$.

La demostración del lema anterior y los detalles faltantes en el bosquejo que sigue pueden encontrarse en el libro de Michael Spivak, *Cálculo en Variedades*.

Bosquejo de la demostración del teorema de la función inversa: Solamente probaremos el caso donde $\boldsymbol{F}$ es diferenciable. Consideremos un punto $\boldsymbol{x_0} \in U^\circ$ donde $\det(J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0})) \neq 0$. Tenemos entonces que el operador lineal definido por $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{dF_{x_0}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es invertible.

- Se puede suponer que $\boldsymbol{T}$ es el operador identidad: En efecto, tenemos que

  $$d(\boldsymbol{T}^{-1} \circ \boldsymbol{F})_{\boldsymbol{x_0}} = \boldsymbol{dT^{-1}_{F(x_0)}} \circ \boldsymbol{dF_{x_0}} = \boldsymbol{T}^{-1} \circ \boldsymbol{dF_{x_0}} = \mathbf{id}.$$

  Por otro lado, la conclusión del teorema es cierta para $\boldsymbol{F}$ si, y solo si, es cierta para $\boldsymbol{T}^{-1} \circ \boldsymbol{F}$. Por lo tanto, podemos suponer que $\boldsymbol{dF_{x_0}}$ es el operador identidad.

- $\boldsymbol{F}$ es localmente inyectiva: En este paso hallamos un entorno de $\boldsymbol{x_0}$ sobre el cual $\boldsymbol{F}$ es inyectiva. En efecto, como $\boldsymbol{F}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x_0}$, tenemos que

  $$\lim_{\boldsymbol{\Delta x} \to \boldsymbol{0}} \frac{||\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Delta x} + \boldsymbol{x_0}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}) - \mathbf{id}(\boldsymbol{\Delta x})||}{||\boldsymbol{\Delta x}||} = \lim_{\boldsymbol{\Delta x} \to \boldsymbol{0}} \frac{||\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Delta x} + \boldsymbol{x_0}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}) - \boldsymbol{dF_{x_0}}(\boldsymbol{\Delta x})||}{||\boldsymbol{\Delta x}||} = 0.$$

  Lo anterior implica que existe un entorno U_0 de $\boldsymbol{x_0}$ tal que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0})$, para todo $\boldsymbol{x} \in U_0$. En efecto, si suponemos lo contrario, es decir, que para cualquier entorno de $\boldsymbol{x_0}$ existe $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(x_0)$, entonces el límite anterior se convierte en

  $$\lim_{\boldsymbol{\Delta x} \to \boldsymbol{0}} \frac{||\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Delta x} + \boldsymbol{x_0}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}) - \mathbf{id}(\boldsymbol{\Delta x})||}{||\boldsymbol{\Delta x}||} = \lim_{\boldsymbol{\Delta x} \to \boldsymbol{0}} \frac{||\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}) - \boldsymbol{\Delta x}||}{||\boldsymbol{\Delta x}||} = \lim_{\boldsymbol{\Delta x} \to \boldsymbol{0}} \frac{||-\boldsymbol{\Delta x}||}{||\boldsymbol{\Delta x}||} = 1,$$

  lo cual es una contradicción.

- $\boldsymbol{F}$ es localmente sobreyectiva: Se considera un rectángulo cerrado R contenido en el entorno U_0 anterior, y tal que $\boldsymbol{x_0} \in R$. A partir del lema anterior, se puede probar la siguiente desigualdad

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|| \leq 2||\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x'})||, \text{ para todo } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'} \in R. \tag{i}$$

Considerando la frontera ∂R, la cual es un conjunto compacto, tenemos que $\boldsymbol{F}(\partial R)$ es también compacto (por ser $\boldsymbol{F}$ continua). Luego, existe $d > 0$ tal que

$$||\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0})|| \geq d, \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in \partial R.$$

Se toma entonces

$$V = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0})|| < \frac{d}{2} \right\}.$$

Para tal V, se puede probar que para todo $\boldsymbol{y} \in V$ existe $\boldsymbol{x} \in R^\circ$ tal que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, es decir, $\boldsymbol{F}$ es sobreyectiva si nos restringimos al entorno V de $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0})$.

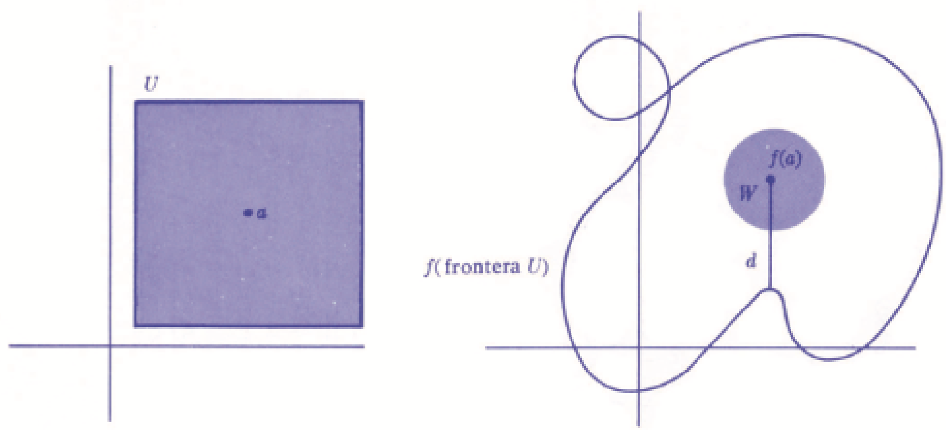

Figura 3.1: Caso $n = 2$. `(Imagen tomada de Cálculo en Variedades - Spivak)`

- Continuidad de la inversa local: Tomando $W = R^\circ \cap \boldsymbol{F}^{-1}(V)$, tenemos entonces una biyección $\boldsymbol{F}|_W : W \to V$, con inversa $\boldsymbol{F}^{-1}$. Veamos primero que $\boldsymbol{F}^{-1}$ es continua. En efecto, por (i) se tiene que

$$||\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'})|| \leq 2||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y'}||, \text{ para todo } \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y'} \in V,$$

es decir, $\boldsymbol{F}^{-1}$ es continua Lipschitz (y por tanto continua).

- Diferenciabilidad de la inversa local: Veamos que $\boldsymbol{F}^{-1}$ es diferenciable en todo punto $\boldsymbol{y} \in V$. Sea $\boldsymbol{x} \in W$ tal que $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$. Debemos probar que existe una transformación lineal $\boldsymbol{L}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y un campo vectorial $\boldsymbol{\rho}$ en un entorno de $\boldsymbol{y}$ tal que:

$$\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'}) = \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y'}-\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{y'}-\boldsymbol{y}), \qquad \text{y} \qquad \lim_{\boldsymbol{y'}\to\boldsymbol{y}} \frac{||\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{y'}-\boldsymbol{y})||}{||\boldsymbol{y'}-\boldsymbol{y}||} = 0.$$

Sabemos que existe un operador lineal $\boldsymbol{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y un campo vectorial $\boldsymbol{r}$ en un entorno de $\boldsymbol{x}$ tales que:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x'}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x}), \qquad \text{y} \qquad \lim_{\boldsymbol{x'}\to\boldsymbol{x}} \frac{||\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x})||}{||\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x}||} = 0. \tag{ii}$$

Como $\boldsymbol{T}$ es invertible, podemos considerar $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{T}^{-1}$. Aplicando $\boldsymbol{L}$ a (ii) nos queda:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x'}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) &= \boldsymbol{L}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x})) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x})) \\
\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y'}-\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x})) \\
\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y'}-\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{x})) \\
\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'}) - \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y'}-\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'}) - \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y})),
\end{aligned}$$

siendo $\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x'})$. Entonces, basta probar que

$$\lim_{\boldsymbol{y'}\to\boldsymbol{y}} \frac{||\boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'}) - \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}))||}{||\boldsymbol{y'}-\boldsymbol{y}||} = 0. \tag{iii}$$

En efecto:

$$\lim_{\boldsymbol{y'}\to\boldsymbol{y}} \frac{||\boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'}) - \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}))||}{||\boldsymbol{y'}-\boldsymbol{y}||} = \lim_{\boldsymbol{y'}\to\boldsymbol{y}} \frac{||\boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'}) - \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}))||}{||\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'}) - \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y})||} \cdot \frac{||\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'}) - \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y})||}{||\boldsymbol{y'}-\boldsymbol{y}||},$$

donde

$$\lim_{\boldsymbol{y'}\to\boldsymbol{y}} \frac{||\boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'}) - \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}))||}{||\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'}) - \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y})||} = \lim_{\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'})\to\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y})} \frac{||\boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'}) - \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y}))||}{||\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'}) - \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y})||} = 0$$

ya que $\boldsymbol{F}^{-1}$ es continua; y por otro lado,

$$\frac{||\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y'}) - \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y})||}{||\boldsymbol{y'}-\boldsymbol{y}||} \leq 2\frac{||\boldsymbol{y'}-\boldsymbol{y}||}{||\boldsymbol{y'}-\boldsymbol{y}||} = 2.$$

Por lo tanto, se cumple (iii).

$\square$

Escrito en LaTeX por **Marco A. Pérez**.

Material consultado:
- Cálculo Vectorial, notas de Ana González.
- Cálculo en Variedades, de Spivak.

Última actualización: `31 de Agosto de 2020`.