CÁLCULO VECTORIAL

TEMA 4

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

En el tema anterior estudiamos el teorema de la función inversa, que nos daba una condición suficiente para poder invertir de manera local un campo vectorial $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^k. Específicamente, si tenemos $\boldsymbol{x_0} \in U$ tal que $\det(J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0})) \neq 0$, entonces tenemos garantizada la posibilidad de hallar una inversa para $\boldsymbol{F}$ en un entorno de $\boldsymbol{x_0}$. Sin embargo, este teorema no nos dice cómo hallar tal inversa local. Esto se debe por un lado al dominio U, y por otro lado a la fórmula que define al campo $\boldsymbol{F}$. Es decir, que dar una fórmula para $\boldsymbol{F}^{-1}$ depende de las propiedades de las funciones elementales que definen $\boldsymbol{F}(x, y)$, para poder despejar x e y en la igualdad $\boldsymbol{F}(x, y) = (u, v)$.

Esta situación de despejar una o más variables en función de otras, puede presentarse de una manera más general, para campos vectoriales de la forma $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Empecemos a explicar esto con un ejemplo sencillo. Consideremos la ecuación de la circunferencia unitaria S^1, es decir, $x^2 + y^2 = 1$. Esta ecuación no representa la gráfica de una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sin embargo, si tomamos un punto $(x_0, y_0) \in S^1$ tal que $(x_0, y_0) \neq (-1, 0), (1, 0)$, entonces es posible despejar y en función de x en un entorno U de (x_0, y_0), de tal manera que $S^1 \cap U$ sí represente la gráfica de una función de variable real a valores reales. Por ejemplo, si consideramos el caso $(x_0, y_0) = (0, 1)$, entonces tomando $U = (-1, 1) \times \mathbb{R}^+$ podemos despejar y en función de x como $y = \varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$, y además, la gráfica de esta función viene dada por $S^1 \cap U$. Lo anterior no puede hacerse para los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, ya que no importa qué entornos coloquemos en ellos, la intersección de los mismos con S^1 siempre dará una curva que no es una función de la forma $x \mapsto \varphi(x)$. Sin embargo, en esta situación sí podemos despejar x en función de y haciendo un análisis análogo al anterior.

La función $\varphi(x)$ aparece de forma implícita en la ecuación $x^2+y^2=1$, y para esta ecuación particular se puede hallar una fórmula que defina a φ dependiendo de dónde esté el punto $(x_0, y_0) \in S^1$ (también puede ocurrir que $\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2}$ si $(x_0, y_0) = (0, -1)$).

El propósito de estas notas es entender condiciones suficientes para poder despejar una o más variables en función de otras dentro de un conjunto dado de ecuaciones, o dicho de otra manera, garantizar la existencia de funciones implícitas que representen estos despejes. Tales condiciones suficientes estarán dadas en el llamado teorema de la función implícita. Por otro lado, estos despejes no siempre pueden hacerse o son muy complicados de hacer en la práctica, es decir, a veces no podemos encontrar una fórmula $y = \varphi(x)$ dada como combinación de funciones elementales. Para varios problemas hacer esto último no es necesario, y nos bastará con saber que $\varphi(x)$ existe y con cómo calcular $\varphi'(x)$.

4.1 Función implícita. Ejemplos

Considere el ejemplo de la circunferencia unitaria mencionado en la introducción. Podemos notar que la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ puede verse como el conjunto de ceros del campo escalar $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. En el caso en el que podemos despejar y en función de x mediante $y = \varphi(x)$ en un entorno de $(x_0, y_0) \in S^1$, tenemos que $f(x, \varphi(x)) = 0$; es decir, que $\varphi(x)$ está implícita en la relación $f(x, y) = 0$. Esta situación puede darse de manera más general, pero comenzaremos con el enunciado del teorema de la función implícita para el caso más sencillo. Después de analizar algunos ejemplos, enunciaremos y demostraremos el enunciado general.

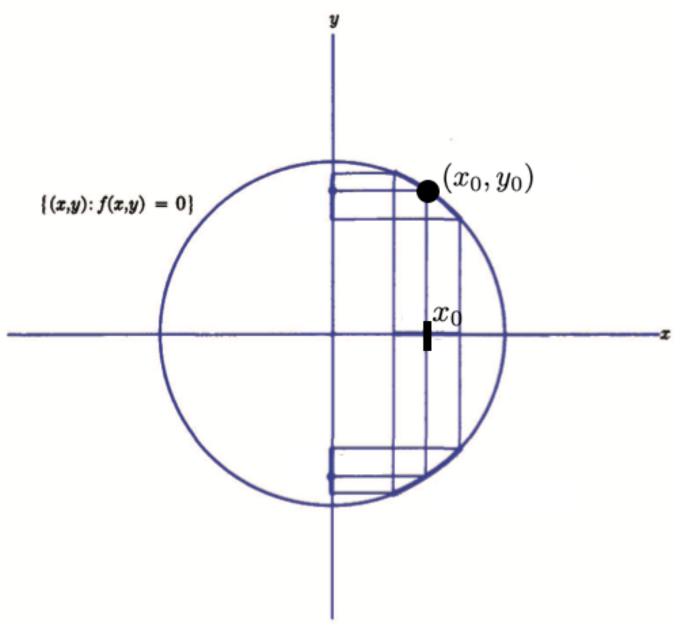

Figura 4.1: `(Imagen basada en Cálculo en Variedades - Spivak)`

Teorema 4.1.1 (de la función implícita - caso para campos escalares de dos variables)**.** *Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^k en U tal que $f(x_0, y_0) = 0$ con $(x_0, y_0) \in U^\circ$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces existe un rectánculo abierto $I \times J \subseteq U$ de centro (x_0, y_0) y una función $\varphi\colon I \to J$ de clase C^k tales que para todo $(x, y) \in I \times J$:*

$$f(x, y) = 0 \text{ si, y solo si, } y = \varphi(x).$$

En otras palabras, $f^{-1}(0) \cap I \times J$[1] es el gráfico de una función $\varphi\colon I \to J$. Más aún,

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

Ejemplo 4.1.2.

1. *Consideremos nuevamente el ejemplo de la introducción. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar de clase C^∞ dado por*

   $$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

   Consideremos el punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Entonces $f(0, 1) = 0$. Además,

   $$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0.$$

   Por el teorema de la función implícita, existe un rectángulo abierto $I \times J$ con centro en $(0, 1)$ y una función $\varphi\colon I \to J$ de clase C^∞ tal que $x^2 + y^2 = 1$ si, y solo si, $y = \varphi(x)$ para todo $(x, y) \in I \times J$.

   El teorema de la función implícita solo garantiza la existencia de un entorno $I \times J$ y de una función implícita $\varphi\colon I \to J$ que satisface $f(x, \varphi(x)) = 0$. Sin embargo, no se nos dice cómo determinar I, J y φ. Esto depende mucho de la fórmula que define la relación $f(x, y) = 0$. En este caso, podemos tomar $I \times J = (-1, 1) \times (0, 2)$ y $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

   Aunque la fórmula para $\varphi(x)$ no se deduce del teorema de la función implícita, éste sí nos dice cómo calcular su derivada. En este caso,

   $$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} = -\frac{2x}{2\varphi(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

   para todo $x \in (-1, 1)$. Por supuesto que lo anterior se puede obtener derivando directamente la fórmula de $\varphi(x)$, pero tenga en cuenta que no siempre es posible hallar una fórmula para $\varphi(x)$.

[1] Acá, $f^{-1}(0)$ denota la imagen inversa de 0, es decir, la curva de nivel 0 del campo escalar f.

Otra manera de obtener $\varphi'(x)$ es "derivando" respecto a x la igualdad $x^2 + (\varphi(x))^2 = 1$. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) &= 0 \\ 2\varphi(x)\varphi'(x) &= -2x \\ \varphi(x) &= -\frac{x}{\varphi(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

El procedimiento anterior se conoce como ***derivación implícita****. En una situación más general donde $f(x,\varphi(x)) = 0$, podemos derivar también respecto a x, teniendo en cuenta que $f(x,\varphi(x))$ es la composición de $f(x,y)$ con el campo vectorial $x \mapsto (x,\varphi(x))$. Por la regla de la cadena, tenemos que*

$$\begin{aligned} (f(x,\varphi(x)))' &= 0 \\ \nabla f(x,\varphi(x)) \cdot \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}' &= 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(x) \end{pmatrix} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x) &= 0 \\ \varphi'(x) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}. \end{aligned}$$

Como observación, el cuadrado abierto $I \times J$ no tiene por qué ser único. Por ejemplo, se puede tomar $I \times J = (-1/2, 1/2) \times (1/2, 3/2)$, y φ con la misma fórmula de antes. Además, la fórmula $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ puede cambiar si variamos el punto (x_0, y_0). Por ejemplo, para $(x_0, y_0) = (0, -1)$ tenemos $\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2}$ definida, por ejemplo, en $I \times J = (-1, 1) \times (-2, 0)$.

Podemos notar además que el teorema de la función implícita no se puede aplicar para los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. En efecto, podemos notar que $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$. Sin embargo, sí es posible despejar x en función de y en ciertos cuadrados abiertos centrados en estos puntos. Esto se justifica en esta situación y similares modificando ligeramente el enunciado del teorema de la función implícita:

- *Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^k en U tal que $f(x_0, y_0) = 0$ con $(x_0, y_0) \in U^\circ$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces existe un rectánculo abierto $I \times J \subseteq U$ de centro (x_0, y_0) y una función $\psi\colon I \to J$ de clase C^k tales que $f(x,y) = 0$ si, y solo si, $x = \psi(y)$, para todo $(x,y) \in I \times J$.*

En este ejemplo, para $(1, 0)$ por ejemplo, tenemos que $\psi\colon I \to J$ viene dada por $\psi(y) = \sqrt{1-y^2}$, donde $I = (-1, 1)$ y $J = (0, 2)$.

2. *Como mencionamos en el ejemplo anterior, no siempre es posible hallar una fórmula para la función implícita $\varphi(x)$ mediante un despeje, o este despeje puede resultar complicado de hacer. Tampoco es necesario hallar una fórmula para $\varphi(x)$ es determinados problemas. Por ejemplo, consideremos por la ecuación*

$$x^3y^2 - 3xy + 2 = 0,$$

y supongamos que queremos hallar la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 2)$ (note que este punto satisface la igualdad anterior). Ciertamente uno puede intentar despejar y en función de x en $x^3y^2 - 3xy + 2 = 0$. Por ejemplo, pasamos 2 al lado derecho, dividir ambos lados de la igualdad resultante por x^3, y luego hacer una completación de cuadrados (solo que en lugar de completar sumando el cuadrado de un número, sería el cuadrado de una función que depende de x). Sin embargo, para el problema que se nos plantea no es necesario hacer esto. La pendiente de la recta tangente a la curva $x^3y^2 - 3xy + 2 = 0$ en el punto $(1, 2)$ viene dada por el valor $\varphi'(1)$, donde $\varphi(x)$ es una función implícita que cumple $x^3\varphi^2(x) - 3x\varphi(x) + 2 = 0$ en un entorno de $(1, 2)$.

Apliquemos el teorema de la función implícita para ver esto último. Consideremos el campo escalar $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(x, y) = x^3y^2 - 3xy + 2.$$

Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 3x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 6, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Como $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) \neq 0$, por el teorema de la función implícita tenemos que existe un rectángulo abierto $I \times J$ con centro en $(1, 2)$ y una función $\varphi\colon I \to J$ de clase C^∞ (ya que f es de clase C^∞) tal que $x^3\varphi^2(x) - 3x\varphi(x) + 2 = 0$ para todo $x \in I$, además

$$\varphi'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)} = -\frac{6}{1} = -6.$$

El resultado anterior también se puede obtener derivando implícitamente respecto a x la igualdad $x^3\varphi^2(x) - 3x\varphi(x) + 2 = 0$. Entonces, tenemos que la recta tangente a la curva $x^3y^2 - 3xy + 2 = 0$ en el punto $(1, 2)$ viene dada por $y = -6x + 8$.

Hasta el momento hemos trabajado problemas de la forma $f(x, y) = 0$. Vamos a generalizar un poco el teorema de la función implícita agregando un número arbitrario de variables, para poder tratar problemas de la forma $f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.

Teorema 4.1.3 (de la función implícita - 2da. generalización a campos escalares). *Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^k en U tal que $f(\boldsymbol{x_0}, y_0) = 0$ con $(\boldsymbol{x_0}, y_0) \in U^\circ$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x_0}, y_0) \neq 0$. Entonces existe un rectánculo abierto $I \times J \subseteq U$ de centro $(\boldsymbol{x_0}, y_0)$ (donde $I \subseteq \mathbb{R}^n$ es un entorno de $\boldsymbol{x_0} = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ y J es un entorno de y_0) y un campo escalar $\varphi\colon I \subseteq \mathbb{R}^n \to J$ de clase C^k tales que para todo $(\boldsymbol{x}, y) = (x_1, \ldots, x_n, y) \in I \times J$:*

$$f(\boldsymbol{x}, y) = f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \text{ si, y solo si, } y = \varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Más aún,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n))}.$$

Ejemplo 4.1.4. *Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $x^3z - z^3yx = 0$ en el punto $(1,1,1)$.*

La idea es poder escribir $z = \varphi(x, y)$ en un entorno de $(1,1,1)$. Tenga en cuenta que en este problema no se nos pide dar una fórmula para φ, pues para hallar el plano tangente solo necesitamos las derivadas parciales de φ, las cuales podemos calcular usando la versión anterior del teorema de la función implícita. Consideremos entonces el campo escalar $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(x, y, z) = x^3z - z^3yx.$$

Note que f es un campo escalar de clase C^∞ y que $f(1,1,1) = 0$. Además,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^3 - 3xyz^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 1 - 3 = -2 \neq 0.$$

Entonces, por el teorema de la función implícita existe un campo escalar $\varphi\colon I \subseteq \mathbb{R}^2 \to J \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x^3\varphi(x, y) - xy\varphi^3(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in I$. Además,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))} = -\frac{3x^2\varphi(x, y) - y\varphi^3(x, y)}{x^3 - 3xy\varphi^2(x, y)},$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))} = -\frac{-x\varphi^3(x, y)}{x^3 - 3xy\varphi^2(x, y)} = \frac{x\varphi^3(x, y)}{x^3 - 3xy\varphi^2(x, y)}.$$

Sabiendo que $\varphi(1,1) = 1$, tenemos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,1) = -\frac{3\varphi(1,1) - \varphi^3(1,1)}{1 - 3\varphi^2(1,1)} = \frac{3-1}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1) = \frac{\varphi^3(1,1)}{1 - 3\varphi^2(1,1)} = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}.$$

Recordando que la ecuación del plano tangente en $(1,1,1)$ a la gráfica de $\varphi(x,y)$ viene dado por

$$z-1=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,1)(y-1),$$

sustituyendo tenemos que

$$\begin{aligned} z-1 &= -1(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)=-x-\frac{y}{2}+\frac{3}{2} \\ x+\frac{y}{2}+z &= \frac{5}{2} \\ 2x+y+2z &= 5. \end{aligned}$$

Teorema 4.1.5 (de la función implícita - 2da. generalización a campos vectoriales)**.** *Sea $\boldsymbol{F}\colon U\subseteq\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^m$ un campo vectorial de clase C^k, y $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})\in U^\circ$ un punto tal que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})=\mathbf{0}$ y*

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0}) \end{pmatrix}\neq 0.$$

Entonces, existen entornos abiertos $W_1\subseteq\mathbb{R}^n$ de $\boldsymbol{x_0}$ y $W_2\subseteq\mathbb{R}^m$ de $\boldsymbol{y_0}$, con $W_1\times W_2\subseteq U$, y un campo vectorial $\boldsymbol{\Phi}\colon W_1\to W_2$ de clase C^k tales que para todo $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in W_1\times W_2$:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathbf{0}\text{ si, y solo si, }\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}).$$

Observación 4.1.6. *Consideremos $\boldsymbol{F}$ y $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ como en el enunciado anterior. La relación $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathbf{0}$ puede reescribirse, haciendo $\boldsymbol{F}=(F_1,\dots,F_m)$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$ e $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_m)$, como un sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0, \\ F_2(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0. \end{cases}$$

Cada igualdad $F_k(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0$ es una hípersuperficie en $\mathbb{R}^{n+m}$ de dimensión $n+m-1$, y la intersección de estas hípersuperficies (es decir, la solución del sistema anterior en caso de haberla) es una hípersuperficie de dimensión $\leq n+m-1$.

La versión general del teorema de la función implícita puede interpretarse como el poder representar localmente, en un entorno de $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$, esta intersección en función de las variables $x_1,\dots,x_n$. La condición $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})=\mathbf{0}$ nos dice que la intersección de las hípersuperficies es no vacía.

Ejemplo 4.1.7. *Considere la esfera unitaria S^2 de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y el cilindro $x^2 + y^2 - y = 0$ de centro $(0, 1/2, 0)$ y radio $1/2$. Demuestre que alrededor del punto $(0, 0, 1)$ la intersección de estas superficies es una curva de la forma $x \mapsto (x, y(x), z(x))$, y calcule la ecuación de la recta tangente a esta curva en $(0, 0, 1)$.*

Las superficies anteriores se pueden representar como $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$ para el campo vectorial $\boldsymbol{F} \colon \mathbb{R}^{3=1+2} \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z)) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 - y).$$

Notamos que $\boldsymbol{F}(0, 0, 1) = (0, 0)$, y que $\boldsymbol{F}$ es de clase C^∞. Además,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = 2y - 1, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0.$$

Luego,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(0, 0, 1) = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z}(0, 0, 1) = 2,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial y}(0, 0, 1) = -1, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z}(0, 0, 1) = 0.$$

Tenemos así que

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Entonces, por el teorema de la función implícita, se tiene que existen entornos abiertos W_1 de 0 y W_2 de $(0, 1)$, y un campo vectorial $\boldsymbol{\Phi} \colon W_1 \subseteq \mathbb{R} \to W_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tales que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 - y = 0$ si, y solo si, $(y, z) = \boldsymbol{\Phi}(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x))$ para todo $(x, y, z) \in W_1 \times W_2$. Tenemos así que la intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 - y = 0$ en un entorno de $(0, 0, 1)$ es una curva $\boldsymbol{\sigma} \colon W_1 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = (x, \Phi_1(x), \Phi_2(x)).$$

Para hallar la recta tangente a esta curva en $(0, 0, 1)$, necesitamos los valores $\Phi_1'(0)$ y $\Phi_2'(0)$, los cuales podemos hallar derivando implícitamente las ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + \Phi_1^2(x) + \Phi_2^2(x) = 1, \\ x^2 + \Phi_1^2(x) - \Phi_1(x) = 0. \end{cases}$$

En efecto,

$$\begin{cases} 2x + 2\Phi_1(x)\Phi_1'(x) + 2\Phi_2(x)\Phi_2'(x) = 0, \\ 2x + 2\Phi_1(x)\Phi_1'(x) - \Phi_1'(x) = 0. \end{cases}$$

Ahora sustituimos en $x = 0$:

$$\begin{cases} 0 = 2\Phi_1(0)\Phi_1'(0) + 2\Phi_2(0)\Phi_2'(0) = 2 \cdot 0 \cdot \Phi_1'(0) + 2 \cdot 1 \cdot \Phi_2'(0) = 2\Phi_2'(0), \\ 0 = 2\Phi_1(0)\Phi_1'(0) - \Phi_1'(0) = 2 \cdot 0 \cdot \Phi_1'(0) - \Phi_1'(0) = -\Phi_1'(0). \end{cases}$$

Entonces, $\Phi_1'(0) = 0$ y $\Phi_2'(0) = 0$. Luego, $\boldsymbol{\sigma}'(0) = (1,0,0)$. Por lo tanto, la ecuación paramétrica de la recta tangente a $\boldsymbol{\sigma}$ en $(0,0,1)$ viene dada por $(x,y,z) = t(1,0,0) + (0,0,1) = (t,0,1)$.

4.2 Demostración del teorema de la función implícita

Dedicaremos esta sección a demostrar el teorema de la función implícita (la versión más general) a partir del teorema de lam función inversa.

Demostración del teorema de la función implícita: Como hipótesis tenemos un campo vectorial $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ de clase C^k, y $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) \in U^\circ$ un punto tal que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = \boldsymbol{0}$ y

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Recordemos que la idea de esta demostración es aplicar en teorema de la función inversa, por lo que necesitamos un campo vectorial $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ de clase C^k, para algún $p \geq 1$. A partir del campo $\boldsymbol{F}$ podemos construir un campo $\boldsymbol{G}\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ dado por

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})).$$

Claramente $\boldsymbol{G}$ es de clase C^k. Además,

$$\begin{aligned} \det(J_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})) &= \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) & \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) \end{array}\right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) \end{pmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Entonces, por el teorema de la función inversa, tenemos que existe un entorno W_1 de $\boldsymbol{x_0}$, un entorno W_2 de $\boldsymbol{y_0}$, un entorno V de $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}))$ tales que la restricción $\boldsymbol{G}|_{W_1 \times W_2}\colon W_1 \times W_2 \to V$ es localmente invertible. Denotemos por $\boldsymbol{H}\colon V \to W_1 \times W_2$ a la inversa local. Tal $\boldsymbol{H}$ es de la forma $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{H_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{H_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$.

Además,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{H_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{H_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{H_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{H_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{H_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))), \quad \text{(i)}$$

de donde nos queda que $\boldsymbol{H_1}$ es la proyección $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x}$. Entonces podemos escribir $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ como

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{H_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})).$$

Además, al entorno V podemos escribirlo como $V = W_1 \times V_2$. Todo esto sugiere definir $\boldsymbol{\Phi} \colon W_1 \to W_2$ como

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}), \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in W_1.^2$$

Claramente $\boldsymbol{\Phi}$ es de clase C^k, pues $\boldsymbol{H_2}$ lo es y el campo de inclusión $\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^{n+m}$ también lo es. Probemos finalmente la equivalencia

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \text{ si, y solo si, } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$$

para todo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in W_1 \times W_2$. Supongamos primero que $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$. A partir de la igualdad (i) se tiene que

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{H_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}))),$$

de donde $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{H_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Ahora supongamos que se cumple $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$. Queremos probar que $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$. Esto se sigue del hecho que $\boldsymbol{H} \circ \boldsymbol{G} = \mathbf{id}$. En efecto,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{H_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})),$$

de donde $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H_2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$. $\square$

4.3 Equivalencia entre el teorema de la función inversa y el teorema de la función implícita

En la sección anterior demostramos el teorema de la función implícita a partir del teorema de la función inversa. En esta sección probaremos que el teorema de la función inversa se puede deducir a partir del teorema de la función implícita, probando de esta manera que ambos teoremas son en cierto sentido equivalentes.

Teorema de la función implícita $\Longrightarrow$ Teorema de la función inversa: Sea $\boldsymbol{F} \colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k y $\boldsymbol{x_0} \in U^\circ$ un punto tal que $\det(J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0})) \neq 0$. Queremos ver que $\boldsymbol{F}$ es localmente invertible, es decir, queremos un entorno W de $\boldsymbol{x_0}$ y un entorno V de $\boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0})$ tales que $\boldsymbol{F}|_W$ tiene inversa $\boldsymbol{G} \colon V \to W$. La igualdad $\boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0})$ podemos escribirla como $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}) - \boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{0}$, es decir, que $(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{x_0})$ es un cero del campo vectorial $\boldsymbol{H} \colon \mathbb{R}^{n+n} \to \mathbb{R}^n$ dado por $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{x}$.

[2] Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $\mathbf{0} \in V_2$.

Apliquemos el teorema de la función implícita a $\boldsymbol{H}$, que claramente es de clase C^k. Ya sabemos que $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{x_0}) = \mathbf{0}$. Notamos que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &= (H_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), \dots, H_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)) \\ &= (F_1(y_1, \dots, y_n) - x_1, \dots, F_n(y_1, \dots, y_n) - x_n).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial H_1}{\partial y_n}(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{x_0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_n}{\partial y_1}(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial H_n}{\partial y_n}(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{x_0}) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(\boldsymbol{x_0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(\boldsymbol{x_0}) \end{pmatrix} = J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0}) \neq 0.$$

Por el teorema de la función implícita, tenemos que existe un entorno $\boldsymbol{x_0}$ de V y un entorno W de $\boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0})$, junto con un campo vectorial $\boldsymbol{G} \colon V \to W$ de clase C^k tales que

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0} \text{ si, y solo si, } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$$

para todo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in V \times W$. Es decir,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \text{ si, y solo si, } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}).$$

Luego, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}))$, por lo que $\boldsymbol{G}$ es una inversa local de $\boldsymbol{F}$. $\square$

Escrito en LaTeX por **Marco A. Pérez**.

Material consultado:
- Cálculo Vectorial, notas de Ana González.
- Cálculo en Variedades, de Michael Spivak.

Última actualización: `21 de Septiembre de 2020`.