

Recordemos la fórmula probada en el Teorema de Green:

$$\oint_{\partial D} (P, Q) \cdot ds = \oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \text{rot}(P, Q, 0) \cdot \mathbf{k} dx dy,$$

donde D es una región plana y ∂D su frontera (orientada positivamente). En estas notas, probaremos una versión más general de esta fórmula, donde D se cambiará por una superficie S en \mathbb{R}^3 , y ∂D por ∂S . Este resultado se conoce como el Teorema de Stokes.

13.1 Teorema de Stokes

El Teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada simple \mathcal{C} en \mathbb{R}^3 con una integral sobre una superficie S cuya frontera es \mathcal{C} . Es una generalización del Teorema de Green, en el sentido de que se pasa de objetos geométricos en \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 .

Teorema 13.1.1 (de Stokes). *Supongamos que $S = \mathbf{X}(U)$ es una superficie orientable en \mathbb{R}^3 con parametrización regular e inyectiva $\mathbf{X}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde U es una región de tipo I, II o III en el plano uv tal que su frontera ∂U es una curva cerrada simple y regular a trozos. Supongamos además que \mathbf{X} es inyectiva y de clase C^1 en un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 que contiene a $U \cup \partial U$. Sea $\mathcal{C} = \mathbf{X}(\partial U)$, y sea $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial de clase C^1 de clase C^1 en un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^3$ que contiene a $S \cup \partial S$. Entonces,*

$$\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds.$$

Es importante recordar algunas cosas sobre orientaciones de una superficie y su borde. Supongamos que $\mathbf{N}: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una orientación de \mathcal{S} . El **borde** de \mathcal{S} se define como la curva $\partial\mathcal{S} = \mathbf{X}(\partial U)$. Si $\alpha(t)$ es una parametrización de ∂U que preserva orientación (es decir, que recorre ∂U de tal manera que U queda del lado izquierdo a la dirección de recorrido), entonces $\mathbf{X}(\alpha(t))$ es una parametrización de $\partial\mathcal{S}$, con orientación inducida por $\alpha(t)$. Esta orientación es **coherente** o **compatible** con la orientación \mathbf{N} de \mathcal{S} si al andar sobre el borde $\partial\mathcal{S}$ (describiendo un movimiento según indica $\mathbf{X}(\alpha(t))$) con el vector normal a la superficie apuntando “a la cabeza”, la superficie queda “a la izquierda”. Le recomendamos al lector la última parte de las notas de superficies paramétricas (Tema 10) para ver el significado más detallado y formal de orientación en el borde.

En la siguiente demostración, asumiremos que $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$ tiene orientación compatible con la orientación de \mathcal{S} .

Demostración: En lo que sigue, usemos la notación $\mathbf{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Sea $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ una parametrización de ∂U con las condiciones antes mencionadas. Entonces, $\mathbf{X}(\alpha(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$. Por definición de integral de superficie e integral de línea, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right), \\ \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_U \left\langle \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\mathbf{X}(u, v)) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\mathbf{X}(u, v)), \frac{\partial P}{\partial z}(\mathbf{X}(u, v)) - \frac{\partial R}{\partial x}(\mathbf{X}(u, v)), \frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{X}(u, v)) - \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{X}(u, v)) \right), \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right\rangle dudv \\ &= \iint_U \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\mathbf{X}(u, v)) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\mathbf{X}(u, v)) \right) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial P}{\partial z}(\mathbf{X}(u, v)) - \frac{\partial R}{\partial x}(\mathbf{X}(u, v)) \right) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{X}(u, v)) - \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{X}(u, v)) \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) dudv \\ &= \iint_U \left(\frac{\partial P}{\partial z}(\mathbf{X}(u, v)) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{X}(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right) dudv \\ &\quad + \iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{X}(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\mathbf{X}(u, v)) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \right) dudv \\ &\quad + \iint_U \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\mathbf{X}(u, v)) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial R}{\partial x}(\mathbf{X}(u, v)) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right) dudv \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot ds = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \oint_C Pdx + \oint_C Qdy + \oint_C Rdz.$$

La idea ahora es aplicar el Teorema de Green en los sumandos anteriores para obtener la integral de línea $\oint_C \mathbf{F} \cdot ds$. Es decir, la prueba se reduce entonces a probar las igualdades

$$\begin{aligned} \iint_U \left(\frac{\partial P}{\partial z}(\mathbf{X}(u, v)) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{X}(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right) dudv &= \oint_C Pdx, \\ \iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{X}(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\mathbf{X}(u, v)) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \right) dudv &= \oint_C Qdy, \\ \iint_U \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\mathbf{X}(u, v)) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial R}{\partial x}(\mathbf{X}(u, v)) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right) dudv &= \oint_C Rdz. \end{aligned}$$

Solamente probaremos la primera igualdad, ya que las otras dos se siguen de manera análoga.

Calculemos la integral de línea $\oint_C Pdx$. Sea $\mathbf{X}(u(t), v(t))$ una parametrización de ∂S , con orientación compatible con la orientación de S , y con $t \in [a, b]$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \oint_C Pdx &= \int_a^b \left\langle (P(\mathbf{X}(u(t), v(t))), 0, 0), \frac{d}{dt}(\mathbf{X}(u(t), v(t))) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle (P(\mathbf{X}(u(t), v(t))), 0, 0), \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right) \left(\frac{du}{dt} \quad \frac{dv}{dt} \right) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle (P(\mathbf{X}(u(t), v(t))), 0, 0), \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b P(\mathbf{X}(u(t), v(t))) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left(P(\mathbf{X}(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + P(\mathbf{X}(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left\langle \left(P(\mathbf{X}(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial u}, P(\mathbf{X}(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial v} \right), \left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right) \right\rangle dt \\ &= \oint_{\partial U} \left((P \circ \mathbf{X}) \frac{\partial x}{\partial u}, (P \circ \mathbf{X}) \frac{\partial x}{\partial v} \right) \cdot ds. \end{aligned}$$

Como ∂U es una curva en el plano uv , podemos aplicar el Teorema de Green al campo $\left((P \circ \mathbf{X}) \frac{\partial x}{\partial u}, (P \circ \mathbf{X}) \frac{\partial x}{\partial v} \right)$, de donde

$$\oint_{\partial U} \left((P \circ \mathbf{X}) \frac{\partial x}{\partial u}, (P \circ \mathbf{X}) \frac{\partial x}{\partial v} \right) \cdot ds = \iint_U \left(\frac{\partial}{\partial u} \left((P \circ \mathbf{X}) \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left((P \circ \mathbf{X}) \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) dudv.$$

Calculemos las derivadas parciales que aparecen del lado derecho:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} \left((P \circ \mathbf{X}) \frac{\partial x}{\partial v} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} (P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))) \frac{\partial x}{\partial v} + P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \\
&= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \\
\frac{\partial}{\partial v} \left((P \circ \mathbf{X}) \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \\
&= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \\
\frac{\partial}{\partial u} \left((P \circ \mathbf{X}) \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left((P \circ \mathbf{X}) \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\
&= \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\
&= \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} P dx &= \iint_U \left(\frac{\partial}{\partial u} \left((P \circ \mathbf{X}) \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left((P \circ \mathbf{X}) \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) dudv \\
&= \iint_U \left(\frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right) dudv,
\end{aligned}$$

de donde se tiene el resultado. □

13.2 Ejemplos y aplicaciones

Empezaremos esta sección con algunos ejemplos de cálculo, para luego mostrar algunas aplicaciones del Teorema de Stokes en electromagnetismo.

Ejemplo 13.2.1. *Evaluar la integral de línea*

$$\oint_{\mathcal{C}} -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

donde \mathcal{C} es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$.

Para aplicar el Teorema de Stokes, lo primero a notar es que la curva \mathcal{C} encierra a la superficie \mathcal{S} dada por

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ y } z = 1 - x - y\}.$$

Entonces, \mathcal{S} es la gráfica de la función $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 1 - x - y$. Damos a \mathcal{S} la orientación $\mathbf{N}: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{N}(\mathbf{p}) = (1, 1, 1)$ para todo $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$, y a \mathcal{C} la orientación compatible con \mathbf{N} . Por el Teorema de Stokes, tenemos que

$$\oint_{\mathcal{C}} -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(-y^3, x^3, -z^3) \cdot d\mathbf{S}.$$

La superficie \mathcal{S} tiene por parametrización $\mathbf{X}(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$ donde (x, y) pertenece al disco unitario D . En este caso es fácil notar que $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y} = (1, 1, 1)$. Luego, como

$$\text{rot}(-y^3, x^3, -z^3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2 + 3y^2),$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(-y^3, x^3, -z^3) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \langle (0, 0, 3x^2 + 3y^2), (1, 1, 1) \rangle dx dy = 3 \iint_D x^2 + y^2 dx dy \\ &= 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr = 6\pi \int_0^1 r^3 dr = 6\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Como ejercicio, el lector puede verificar este resultado evaluando la integral de línea directamente.

En el ejemplo anterior resultaba más complicado calcular la integral de línea en el borde de la superficie que la integral de superficie. Veamos ahora un ejemplo donde pasa lo contrario.

Ejemplo 13.2.2. Sea \mathcal{S} la superficie cilíndrica con tapa mostrada en la siguiente figura:

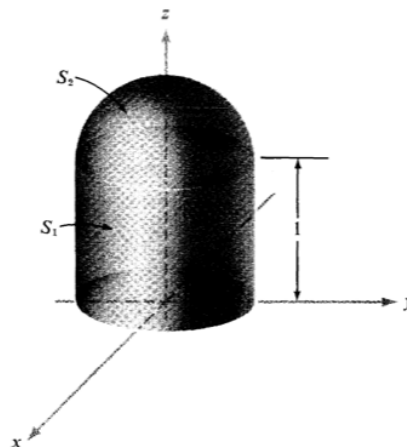


Figura 13.1: Unión de \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 .

Es decir, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, donde \mathcal{S}_1 es el cilindro de base $x^2 + y^2 = 1$ y altura 1, y \mathcal{S}_2 es el hemisferio norte de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$. Se nos pide calcular la integral $\iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot dS$, para el campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz + y^2z + x, xyz^3 + y, x^2z^4).$$

Sabemos por el Teorema de Stokes que

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot dS = \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot ds.$$

Sin embargo, tenemos que tener cierto cuidado con la afirmación anterior. Recordemos que el Teorema de Stokes visto cubre solamente el caso donde \mathcal{S} es una superficie paramétrica, cubierta con una parametrización regular e inyectiva. La superficie que tenemos es un poco más general, pues es la unión de dos superficies para las cuales se aplica el Teorema de Stokes. Sin embargo, versiones más generales de este teorema cubren este caso, e inclusive otros donde la superficie \mathcal{S} es más general (por ejemplo superficies regulares o variedades diferenciales, estudiadas en geometría diferencial).

Como \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 se intersectan únicamente en sus bordes, tenemos por la propiedad de aditividad en el dominio de integración para integrales de superficie que

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot dS = \iint_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot dS = \iint_{\mathcal{S}_1} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot dS + \iint_{\mathcal{S}_2} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot dS.$$

Ahora, en las superficies \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 sí podemos aplicar el Teorema de Stokes:

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot dS = \oint_{\partial\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot ds \quad \text{y} \quad \iint_{\mathcal{S}_2} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot dS = \oint_{\partial\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot ds.$$

Primero consideremos parametrizaciones de \mathcal{S}_1 y de \mathcal{S}_2 para poder calcular los bordes. Sean $\mathbf{X}_1: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{X}_2: [0, 2\pi] \times [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ las parametrizaciones de \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(\theta, z) &= (\cos(\theta), \sin(\theta), z), \\ \mathbf{X}_2(u, v) &= (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v)). \end{aligned}$$

Para calcular $\partial\mathcal{S}_1$, consideramos $\partial([0, 2\pi] \times [0, 1])$ (el cuadrado de lados $[0, 2\pi]$ y $[0, 1]$). Recordemos que $\partial\mathcal{S}_1 = \mathbf{X}_1(\partial([0, 2\pi] \times [0, 1]))$. Luego,

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{S}_1 &= \mathbf{X}_1([0, 2\pi] \times 0) \cup \mathbf{X}_1(2\pi \times [0, 1]) \cup \mathbf{X}_1([0, 2\pi] \times 1) \cup \mathbf{X}_1(0 \times [0, 1]) \\ &= \{(\cos(\theta), \sin(\theta), 0) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \cup \{(1, 0, z) : 0 \leq z \leq 1\} \\ &\quad \cup \{(\cos(\theta), \sin(\theta), 1) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \cup \{(1, 0, z) : 0 \leq z \leq 1\}. \end{aligned}$$

Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ y \mathcal{C}_4 los respectivos miembros de la unión anterior. Damos a \mathcal{S}_1 la orientación con vectores normales apuntando "hacia afuera" del cilindro. Ahora le damos a $\partial\mathcal{S}_1$ una orientación

compatible con la orientación de \mathcal{S}_1 . Para ello, recorremos $\partial([0, 2\pi] \times [0, 1])$ en sentido antihorario, de lo que resulta que C_1 se recorra en sentido antihorario, C_2 de abajo hacia arriba, C_3 en sentido horario, y C_4 de arriba hacia abajo. Entonces, usando la aditividad en el dominio de integración para integrales de línea, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot ds &= \oint_{C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^- \cup C_4^-} \mathbf{F} \cdot ds \\
 &= \oint_{C_1^+} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{C_2^+} \mathbf{F} \cdot ds + \oint_{C_3^-} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{C_4^-} \mathbf{F} \cdot ds \\
 &= \oint_{C_1^+} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{C_2^+} \mathbf{F} \cdot ds - \oint_{C_3^+} \mathbf{F} \cdot ds - \int_{C_2^+} \mathbf{F} \cdot ds \\
 &= \oint_{C_1^+} \mathbf{F} \cdot ds - \oint_{C_3^+} \mathbf{F} \cdot ds.
 \end{aligned}$$

La orientación de $\partial\mathcal{S}_2$ es mucho más evidente. Primero, damos a \mathcal{S}_2 también la orientación de los vectores normales apuntando "hacia afuera" del hemisferio. Tenga en cuenta que si escogemos la otra orientación, rompemos la continuidad del campo normal definido sobre $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Para tal orientación de \mathcal{S}_2 , tenemos que $\partial\mathcal{S}_2 = C_3^+$. Entonces,

$$\oint_{\partial\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot ds = \oint_{C_3^+} \mathbf{F} \cdot ds.$$

Por lo tanto,

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C_1^+} \mathbf{F} \cdot ds - \oint_{C_3^+} \mathbf{F} \cdot ds + \oint_{C_3^+} \mathbf{F} \cdot ds = \oint_{C_1^+} \mathbf{F} \cdot ds,$$

y el problema se reduce a calcular $\oint_{C_1^+} \mathbf{F} \cdot ds$, donde $\partial\mathcal{S} = C_1^+$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_1^+} \mathbf{F} \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\cos(\theta), \sin(\theta), 0), (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) \rangle d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \langle (\cos(\theta), \sin(\theta), 0), (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) \rangle d\theta = 0.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 13.2.3 (aplicaciones en Física).

1. **Ley de Faraday:** En teoría electromagnética, la ley de inducción electromagnética o ley de Faraday establece que el voltaje en un circuito cerrado es directamente proporcional a la rapidez con que cambia en el tiempo el flujo de campo magnético que atraviesa cualquier superficie que tenga a dicho circuito como borde. En otras palabras, si $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ y $\mathbf{B}(x, y, z, t)$

denotan el campo eléctrico y magnético en una partícula (x, y, z) y en el instante t , entonces

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Aquí, $\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ mide el voltaje alrededor del circuito ∂S , mientras que $\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ mide el flujo magnético que atraviesa la superficie S .

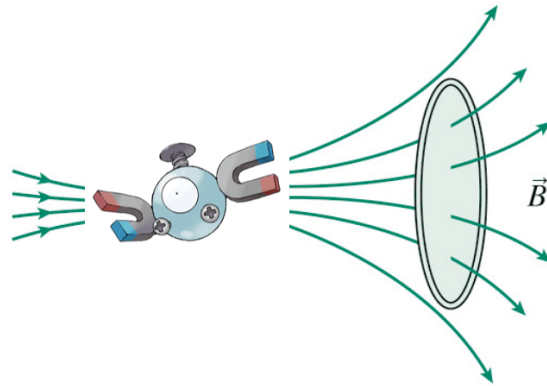


Figura 13.2: Ley de Faraday: El flujo magnético que atraviesa la superficie es generado por una fuente externa.

Esta ley se puede probar a partir de el Teorema de Stokes y de una de las ecuaciones de Maxwell, a saber

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Integrando la igualdad anterior y aplicando el Teorema de Stokes, tenemos

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot}(\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si además suponemos que \mathbf{B} es de clase C^1 , se cumple

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Por lo tanto, se sigue la Ley de Faraday.

2. **Ley de Ampère:** A diferencia de la ley anterior, la ley de Ampère mide la circulación de un campo magnético a lo largo de un circuito cerrado. Ésta explica que la circulación de la intensidad del campo magnético en tales circuitos es directamente proporcional a la corriente que atraviesa el área encerrada por éstos.

Si \mathbf{I} denota la intensidad de corriente eléctrica, y \mathbf{B} es el campo magnético inducido por dicha corriente, entonces para una superficie S con borde ∂S se tiene que

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot ds = \mu_0 \iint_S \mathbf{I} \cdot dS.$$

Aquí, $\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot ds$ es la circulación del campo magnético inducido a lo largo de ∂S , $\iint_S \mathbf{I} \cdot dS$ es la corriente eléctrica total que atraviesa S , y μ_0 es una constante conocida como **permeabilidad magnética del vacío**.

Así como ocurre con la ley de Faraday, la ley de Ampère se puede deducir a partir del Teorema de Stokes y de otra de las ecuaciones de Maxwell, a saber,

$$\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{I}.$$

Luego, al integrar nos queda:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot ds = \iint_S \text{rot}(\mathbf{B}) \cdot dS = \mu_0 \iint_S \mathbf{I} \cdot dS.$$

A continuación daremos una aplicación en un plano más teórico. Recordemos un resultado que quedó pendiente su demostración en las notas de rotacional y divergencia (Tema 9), a saber, la equivalencia entre ser un campo de gradientes y ser un campo irrotacional.

Teorema 13.2.4. Sea $\mathbf{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 , donde U es un conjunto simplemente conexo (es decir, abierto, conexo y toda curva cerrada contenida en U es homotópica a un punto). Entonces, \mathbf{F} es un campo de gradientes si, y sólo si, es irrotacional.

Demostración: La implicación (\Rightarrow) ya se demostró en notas anteriores. Había quedado pendiente demostrar que si \mathbf{F} es irrotacional, entonces es de gradientes (con U como se indica en la hipótesis).

En las notas sobre campos gradientes (Tema 8), se demostró que un campo vectorial con dominio abierto y conexo es de gradientes si, y sólo si, tiene circulación nula sobre cualquier curva cerrada y regular a trozos contenida en su dominio. Entonces, sea \mathcal{C} una curva cerrada simple y regular a trozos contenida en U . Sea S una superficie contenida en U con borde \mathcal{C} (la cual existe porque U es simplemente conexo). Entonces, si le damos a S y a \mathcal{C} orientaciones compatibles, tenemos por el Teorema de Stokes y del hecho que $\text{rot}(\mathbf{F}) = 0$ lo siguiente:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot ds = \iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot dS = \iint_S \mathbf{0} \cdot dS = 0.$$

Por lo tanto, como la curva \mathcal{C} es arbitraria, tenemos que \mathbf{F} es un campo de gradientes. \square

Escrito en \LaTeX por **Marco A. Pérez**.

Material consultado:

- Cálculo Vectorial, de Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba.
- Calculus Vol. 2, de Tom Apostol.
- Cálculo Vectorial, notas de A. González.

Última actualización: 12 de Noviembre de 2020.