

Empezaremos nuestro estudio de las relaciones entre integrales de línea, integrales de superficie e integrales múltiples. La primera de éstas la describe el Teorema de Green, que expresa la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva paramétrica como cierta integral doble sobre la región encerrada por dicha curva. Este teorema data de la primera mitad del siglo XIX, apareciendo en el estudio de la teoría de potenciales gravitacionales y eléctricos. Entre una de las ventajas de este resultado, tenemos la posibilidad de calcular una integral de línea de manera más sencilla, convirtiéndola en una integral doble, o viceversa. Por otro lado, también podemos conocer el comportamiento de un campo vectorial a lo largo de una curva a partir de información conocida en la región encerrada por ésta.

12.1 Teorema de Green

Antes de enunciar y demostrar el teorema de Green, debemos revisar el concepto de orientación de curvas paramétricas. Sea \mathcal{C} una curva plana (contenida en \mathbb{R}^2) paramétrica cerrada simple, de clase C^1 a trozos. Sabemos que a \mathcal{C} le pedimos asignar dos orientaciones, a saber, recorrer \mathcal{C} en sentido horario y antihorario. Normalmente, se toma la orientación antihoraria como positiva, y la horaria como negativa. Si elegimos la orientación positiva (resp., negativa) usaremos la notación \mathcal{C}^+ (resp., \mathcal{C}^-) para indicar que la curva se recorre con dicha orientación.

Además de la anterior, también se usa otra convención para asignarle orientación positiva a una curva plana \mathcal{C} , a saber: que la región encerrada por \mathcal{C} quede del lado izquierdo cuando recorremos \mathcal{C} . En este curso, solamente consideraremos el caso donde las regiones encerradas son de tipo I, II o III. Recordemos que una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es de tipo I si existen

funciones continuas $\phi_1, \phi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y derivables en (a, b) con $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$ tales que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \text{ con } a \leq x \leq b\}.$$

Por otro lado, una región $R \subseteq \mathbb{R}^2$ es de tipo II si existen funciones continuas $\psi_1, \psi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ y derivables en (c, d) con $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$ tales que

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \text{ con } c \leq y \leq d\}.$$

Finalmente, una región es de tipo III si es de tipo I y II.

Teniendo en cuenta las convenciones anteriores, enunciemos el Teorema de Green.

Teorema 12.1.1 (de Green). *Sea C una curva cerrada simple y regular a trozos, orientada positivamente, en \mathbb{R}^2 , y sea D la unión de C con la región encerrada por C , y de tipo III. Si $F = (P, Q): U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 , donde U es un conjunto abierto que contiene a D , entonces*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot ds = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Dividiremos la demostración de este teorema en los siguientes dos lemas.

Lema 12.1.2. *Sea C una curva cerrada simple y regular a trozos, orientada positivamente, en \mathbb{R}^2 , y sea D la unión de C con la región encerrada por C . Si D es de tipo I y $P: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^1 , donde U es un conjunto abierto que contiene a D , entonces*

$$\oint_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Demostración: Por un lado, recordemos que $\oint_C P dx$ es la notación abreviada para la integral de línea del campo vectorial $(P, 0, 0)$. Ahora, para probar la igualdad entre la integral anterior y $-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$, la idea es dividir la curva C en cuatro tramos según la región de tipo I, para que sea fácil parametrizar a trozos. Observe tal división en la siguiente figura.

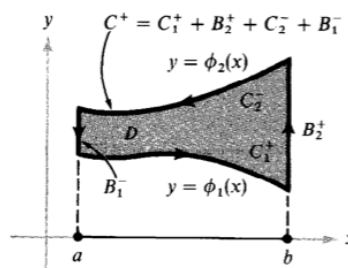


Figura 12.1: C a trozos - (imagen tomada de Cálculo Vectorial - Marsden & Tromba) .

En la figura, C_1 y C_2 son el piso y techo de la región D , con las orientaciones indicadas, mientras que B_1 y B_2 son los lados izquierdo y derecho. Las parametrizaciones de estos trozos vienen dadas por:

- C_1^+ : $\alpha_1(x) = (x, \phi_1(x))$ con $a \leq x \leq b$.
- C_2^+ : $\alpha_2(x) = (x, \phi_2(x))$ con $a \leq x \leq b$.
- B_1^+ : $\beta_1(x) = (a, x)$ con $\phi_1(a) \leq x \leq \phi_2(a)$.
- B_2^+ : $\beta_2(x) = (b, x)$ con $\phi_1(b) \leq x \leq \phi_2(b)$.

Ahora, por la aditividad de la integral de línea respecto al dominio de integración, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \oint_{C^+} P dx &= \int_{C_1^+} P dx + \int_{B_2^+} P dx + \int_{C_2^-} P dx + \int_{B_1^-} P dx \\
 &= \int_a^b \langle (P(x, \phi_1(x), 0), 0, 0), (1, \phi_1'(x), 0) \rangle dx + \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} \langle (P(b, x, 0), 0, 0), (0, 1, 0) \rangle dx \\
 &\quad - \int_a^b \langle (P(x, \phi_2(x), 0), 0, 0), (1, \phi_2'(x), 0) \rangle dx - \int_{\phi_1(a)}^{\phi_2(a)} \langle (P(a, x, 0), 0, 0), (0, 1, 0) \rangle dx \\
 &= \int_a^b P(x, \phi_1(x), 0) dx - \int_a^b P(x, \phi_2(x), 0) dx = - \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx \\
 &= - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.
 \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que la penúltima igualdad se debe a la Regla de Barrow. □

El siguiente lema se prueba de manera similar.

Lema 12.1.3. *Sea C una curva cerrada simple y regular a trozos, orientada positivamente, en \mathbb{R}^2 , y sea D la unión de C con la región encerrada por C . Si D es de tipo II y $Q: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^1 , donde U es un conjunto abierto que contiene a D , entonces*

$$\oint_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

Demostración del Teorema de Green: Por los lemas anteriores, tenemos que

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_C Q dy + \oint_C P dx = \oint_C \mathbf{F} \cdot ds.$$

De nuevo, $\oint_C P dx$ es la integral de línea del campo $(P, 0, 0)$, y $\oint_C Q dy$ es la integral de línea del campo $(0, Q, 0)$, de donde se sigue el resultado. □

Una curiosidad del Teorema de Green es que el integrando $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ luce como uno de los factores del vector rotacional de un campo vectorial. En efecto, el campo en este caso se trata de $(\mathbf{F}, 0) = (P, Q, 0)$. Entonces,

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \text{rot}(\mathbf{F}, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Luego, siendo \mathbf{k} el vector $(0, 0, 1)$, tenemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \langle \text{rot}(\mathbf{F}), \mathbf{k} \rangle.$$

Esto nos da otra forma de enunciar del Teorema de Green.

Teorema 12.1.4 (de Green - forma vectorial). *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región plana de tipo III y ∂D su frontera, orientada en sentido positivo. Supongamos además que ∂D es una curva cerrada simple regular a trozos. Si $\mathbf{F} = (P, Q): U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 , donde U es un conjunto abierto que contiene a D , entonces*

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot ds = \iint_D \langle \text{rot}(\mathbf{F}), \mathbf{k} \rangle dx dy.$$

Ejemplo 12.1.5.

1. Calculemos el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ al mover una partícula a lo largo de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$. Lo primero a tener en cuenta es que la elipse dada C es una curva regular cerrada simple con parametrización $\alpha(\theta) = (\cos(\theta), 2 \sin(\theta))$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces, como en este caso $P(x, y) = y + 3x$ y $Q(x, y) = 2y - x$, se tiene que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2$. Luego, por el Teorema de Green,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot ds = \iint_D -2 dx dy = -2a(D) = -2(1 \cdot 2 \cdot \pi) = -4\pi.$$

En el último paso de la igualdad, tenga en cuenta que el área de la región encerrada por una elipse de ecuación $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ está dada por $ab\pi$.

2. Hallemos el valor de la integral $\oint_C (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy$ donde C es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Esta curva es cerrada simple y regular a trozos. Por otro lado, podemos separar la integral que se nos pide en

$$\oint_C (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy = \oint_C (5 - xy - y^2) dx - \oint_C (2xy - x^2) dy,$$

donde cada sumando se puede calcular usando los lemas anteriores.

Tenemos:

$$\begin{aligned}\oint_C (5 - xy - y^2) dx &= - \iint_D \frac{\partial}{\partial y} (5 - xy - y^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 (2y + x) dx dy \\ &= \int_0^1 \left(2xy + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right) dy = \int_0^1 \left(2y + \frac{1}{2} \right) dy = y^2 + \frac{y}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2}, \\ \oint_C (2xy - x^2) dy &= \iint_D \frac{\partial}{\partial x} (2xy - x^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 2y - 2x dx dy \\ &= \int_0^1 (2xy - x^2 \Big|_0^1) dy = \int_0^1 (2y - 1) dy = y^2 - y \Big|_0^1 = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\oint_C (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy = \frac{3}{2}$.

Uno de los corolarios importantes del Teorema de Green tiene que ver con otra forma de calcular áreas de regiones planas.

Corolario 12.1.6. Sea C una curva cerrada simple regular a trozos, que encierra una región de tipo I, II o III. Sea D la unión de esta región con C . Entonces,

$$a(D) = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

Demostración: Tenemos el campo vectorial $(P, Q) = (-y, x)$, de clase C^1 y con dominio \mathbb{R}^2 , que por supuesto contiene a D . Entonces, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$, de donde

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 2a(D).$$

Por otro lado, el Teorema de Green nos dice que

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C x dy - y dx,$$

de donde se sigue el resultado. □

Ejemplo 12.1.7. Calculemos el área de la región encerrada por la curva hipocicloide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

con $a > 0$, la cual tiene parametrización $\alpha(\theta) = (a \cos^3(\theta), a \sin^3(\theta))$, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

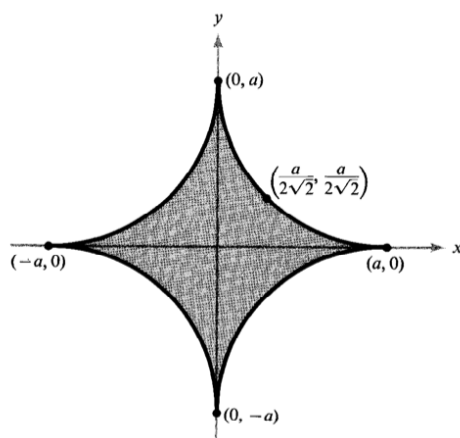


Figura 12.2: Región encerrada por la hipocicloide - (imagen tomada de Cálculo Vectorial - Marsden & Tromba) .

Por el corolario anterior, $a(D) = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx$, donde C es la curva hipocicloide. Esta curva es cerrada simple y regular a trozos. Sin embargo, no hace falta separar la integral de línea en suma de integrales sobre cada trozo de curva, porque todos tienen la misma parametrización (sólo cambia el rango de variación del ángulo). Entonces,

$$\begin{aligned}
 a(D) &= \frac{1}{2} \oint_C (-y, x) \cdot ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle (-a \sin^3(\theta), a \cos^3(\theta)), (-3a \cos^2(\theta) \sin(\theta), 3a \sin^2(\theta) \cos(\theta)) \rangle d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3a^2 \sin^4(\theta) \cos^2(\theta) + 3a^2 \cos^4(\theta) \sin^2(\theta)) d\theta \\
 &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) d\theta \\
 &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) d\theta = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(\theta) \cos(\theta))^2 d\theta = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(2\theta)}{4} d\theta \\
 &= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta) d\theta = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(4\theta)}{2} d\theta = \frac{3a^2\pi}{8} - \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} \cos(4\theta) d\theta \\
 &= \frac{3a^2\pi}{8} - \frac{3a^2\pi}{16} \frac{\sin(4\theta)}{4} \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \frac{3a^2\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

Note que en este caso es más fácil calcular la integral de línea que la integral múltiple.

12.2 Teorema de Green generalizado

Cerramos estas notas probando una generalización del Teorema de Green que involucra regiones delimitadas por varias curvas cerradas.

Teorema 12.2.1 (de Green - generalizado). Sean C_1, \dots, C_n curvas cerradas simples regulares a trozos, orientadas positivamente, tales que las siguientes condiciones se cumplen:

1. C_i y C_j no se cortan para $i \neq j$.
2. C_i está en la región encerrada por C_1 , para todo $2 \leq i \leq n$.
3. C_i está en el exterior de la región encerrada por C_j , para $i \neq j$ y con $i, j = 2, \dots, n$.

Sea R la unión de C_1 , con la región encerrada por C_1 y que no está dentro de ninguna de las curvas C_i , con $i = 2, \dots, n$ (como se muestra en la figura).

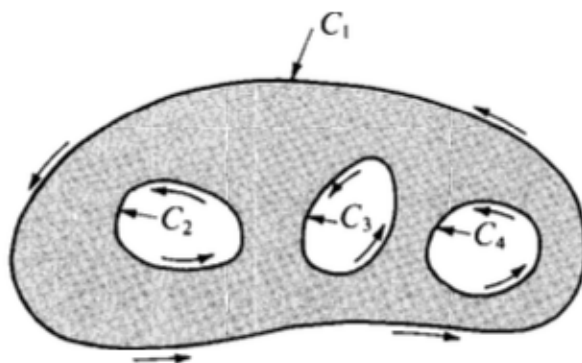


Figura 12.3: Región múltiplemente conexa - (imagen tomada de Calculus Vol. II - Apostol).

Si $\mathbf{F} = (P, Q): U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 , donde U contiene a R , entonces

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot ds - \sum_{j=2}^n \oint_{C_j} \mathbf{F} \cdot ds.$$

Demostración: Probaremos únicamente el caso $n = 2$. El caso más general se prueba por inducción. Tenemos entonces que para $n = 2$, R es la región formada por las curvas C_1 y C_2 , y la región comprendida entre ellas. La idea es dividir R en dos regiones donde podamos aplicar el Teorema de Green. Tal división la hacemos como se muestra en la siguiente figura:

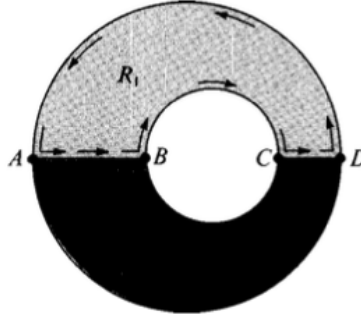


Figura 12.4: División de R - (imagen tomada de Calculus Vol. II - Apostol).

Sea R_1 la región de color gris, y R_2 la de color negro. Tenemos que $R = R_1 \cup R_2$, donde la intersección de R_1 con R_2 son los segmentos de recta \overline{AB} y \overline{CD} , por lo que podemos aplicar la aditividad en el dominio de integración y obtener

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Ahora, ∂R_1 es una curva regular a trozos, formada por $C_{1,\text{sup}}^+$ (arco superior resultante de la división de C_1), \overline{AB}^+ , $C_{2,\text{sup}}^-$ (arco superior resultante de la división de C_2) y \overline{CD}^+ . De manera similar, ∂R_2 es una curva regular a trozos recorrida en $C_{1,\text{inf}}^+$, \overline{CD}^- , $C_{2,\text{inf}}^-$ y \overline{AB}^- . Por el Teorema de Green, tenemos que:

$$\begin{aligned} \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\partial R_1} \mathbf{F} \cdot ds = \int_{C_{1,\text{sup}}^+} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{\overline{AB}^+} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{C_{2,\text{sup}}^-} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{\overline{CD}^+} \mathbf{F} \cdot ds \\ &= \int_{C_{1,\text{sup}}^+} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{\overline{AB}^+} \mathbf{F} \cdot ds - \int_{C_{2,\text{sup}}^+} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{\overline{CD}^+} \mathbf{F} \cdot ds, \\ \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\partial R_2} \mathbf{F} \cdot ds = \int_{C_{1,\text{inf}}^+} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{\overline{CD}^-} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{C_{2,\text{inf}}^-} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{\overline{AB}^-} \mathbf{F} \cdot ds \\ &= \int_{C_{1,\text{inf}}^+} \mathbf{F} \cdot ds - \int_{\overline{CD}^+} \mathbf{F} \cdot ds - \int_{C_{2,\text{inf}}^+} \mathbf{F} \cdot ds - \int_{\overline{AB}^+} \mathbf{F} \cdot ds, \\ \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{C_{1,\text{sup}}^+} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{\overline{AB}^+} \mathbf{F} \cdot ds - \int_{C_{2,\text{sup}}^+} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{\overline{CD}^+} \mathbf{F} \cdot ds \\ &\quad + \int_{C_{1,\text{inf}}^+} \mathbf{F} \cdot ds - \int_{\overline{CD}^+} \mathbf{F} \cdot ds - \int_{C_{2,\text{inf}}^+} \mathbf{F} \cdot ds - \int_{\overline{AB}^+} \mathbf{F} \cdot ds \\ &= \int_{C_1^+} \mathbf{F} \cdot ds - \int_{C_2^+} \mathbf{F} \cdot ds. \end{aligned}$$

□

Un corolario del teorema de Green generalizado es el hecho de que la integral de línea es invariante bajo homotopías para campos irrotacionales. La demostración de esto es un caso particular del $n = 2$ en el teorema anterior.

Corolario 12.2.2 (invariancia de la integral de línea bajo homotopías). Sea $\mathbf{F} = (P, Q): U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 sobre un conjunto abierto U , tal que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ en U (es decir, \mathbf{F} es irrotacional). Sean C_1 y C_2 dos curvas cerradas simples y regulares a trozos, contenidas en U y orientadas positivamente, que cumplen las siguientes condiciones:

1. C_2 está en la región contenida por C_1 .
2. La región comprendida entre las curvas C_1 y C_2 está contenida en U .

Entonces,

$$\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot ds = \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot ds.$$

Ejemplo 12.2.3. Sea $I_k = \oint_{C_k} Pdx + Qdy$, donde

$$P(x, y) = -y \left(\frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} \right),$$

$$Q(x, y) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}.$$

En la siguiente figura, C_1 es la circunferencia menor $x^2 + y^2 = 1/8$ orientada positivamente, C_2 es la circunferencia mayor $x^2 + y^2 = 4$ orientada positivamente, y C_3 es la unión de las tres circunferencias $(x-1)^2 + y^2 = 1/4$, $x^2 + y^2 = 1/4$ y $(x+1)^2 + y^2 = 1/4$ dibujada en los sentidos que se indican en la figura. Si $I_2 = 6\pi$ e $I_3 = 2\pi$, hallar el valor de I_1 .

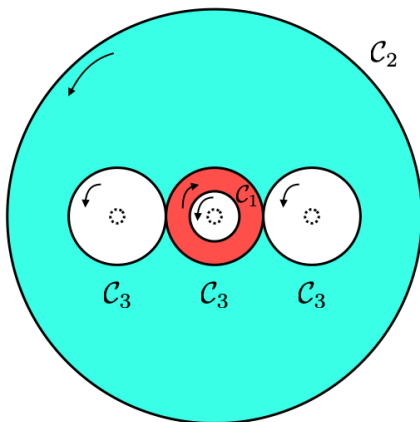


Figura 12.5: Circunferencias mayores y menores.

Lo primero a notar es que (P, Q) define un campo vectorial de clase C^1 con dominio \mathbb{R}^2 a excepción de los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Como ejercicio, el lector debe verificar que este campo es irrotacional. Ahora bien, el teorema de invariancia lo podemos aplicar únicamente en las regiones pintadas en azul y rojo, debido a las discontinuidades que presenta (P, Q) . En el caso de la región roja, tenemos que

$$I_1 = \oint_{C_1^+} Pdx + Qdy = \oint_{C_{3-b}^+} Pdx + Qdy.$$

La curva C_{3-b}^+ indicada es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1/4$ orientada positivamente. Por otro lado, para aplicar el teorema de invariancia en la región azul, no podemos usar la curva C_3 con la orientación dada. Debemos usar en su lugar la curva $C_{3-a}^+ \cup C_{3-b}^+ \cup C_{3-c}^+$ correspondiente a las circunferencias $(x-1)^2 + y^2 = 1/4$, $x^2 + y^2 = 1/4$ y $(x+1)^2 + y^2 = 1/4$, todas con orientación positiva. Entonces:

$$\begin{aligned} 6\pi &= \oint_{C_2^+} Pdx + Qdy = \oint_{C_{3-a}^+ \cup C_{3-b}^+ \cup C_{3-c}^+} Pdx + Qdy \\ &= \oint_{C_{3-a}^+} Pdx + Qdy + \oint_{C_{3-b}^+} Pdx + Qdy + \oint_{C_{3-c}^+} Pdx + Qdy \\ &= \oint_{C_{3-a}^+} Pdx + Qdy + I_1 + \oint_{C_{3-c}^+} Pdx + Qdy \\ \oint_{C_{3-a}^+} Pdx + Qdy + \oint_{C_{3-c}^+} Pdx + Qdy &= 6\pi - I_1. \end{aligned}$$

Por otro lado, $C_3 = C_{3-a}^+ \cup C_{3-b}^- \cup C_{3-c}^+$ por lo cual

$$\begin{aligned} 2\pi &= \oint_{C_3} Pdx + Qdy = \oint_{C_{3-a}^+ \cup C_{3-b}^- \cup C_{3-c}^+} Pdx + Qdy \\ &= \oint_{C_{3-a}^+} Pdx + Qdy - \oint_{C_{3-b}^-} Pdx + Qdy + \oint_{C_{3-c}^+} Pdx + Qdy \\ &= \left(\oint_{C_{3-a}^+} Pdx + Qdy + \oint_{C_{3-c}^+} Pdx + Qdy \right) - I_1 \\ &= 6\pi - I_1 - I_1 \\ &= 6\pi - 2I_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $I_1 = 2\pi$.

Escrito en L^AT_EX por Marco A. Pérez.

Material consultado:

- Cálculo Vectorial, de Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba.
- Calculus Vol. 2, de Tom Apostol.
- Cálculo Vectorial, notas de A. González.

Última actualización: 12 de Noviembre de 2020.