

En estas notas estudiaremos la última de las relaciones entre integrales múltiples e integrales de superficie, descrita por el Teorema de Gauss. Este resultado, también conocido como teorema de la divergencia, establece que si se tiene una superficie cerrada  $\mathcal{S}$ , es decir, que encierra un volumen  $V$ , y orientable con orientación normal exterior, entonces el flujo de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  a través de esa superficie es igual a la integral triple sobre  $V$  de la divergencia de  $\mathbf{F}$ .

En física, este resultado tiene su interpretación en teoría electromagnética, conocida como la Ley de Gauss. Esta ley establece que si se tiene una superficie cerrada  $\mathcal{S}$  que encierra una carga puntual  $Q$ , entonces el flujo eléctrico total del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  generado por  $Q$  que atraviesa a  $\mathcal{S}$  es igual a  $Q$ .

## 14.1 Teorema de la divergencia de Gauss

Empecemos dando el enunciado del Teorema de Gauss. Luego explicaremos los elementos que aparecen en el enunciado, para después dar la demostración. La parte de ejemplos y aplicaciones la dejaremos para la siguiente sección.

**Teorema 14.1.1** (de la divergencia de Gauss). *Sea  $V$  una región en  $\mathbb{R}^3$  de tipo IV. Sea  $\mathcal{S} = \partial V$  la superficie cerrada definida por la frontera de  $V$ , que acota a  $V$ , y orientable con orientación dada por el campo normal unitario exterior a  $\mathcal{S}$ . Si  $\mathbf{F} = (P, Q, R): U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  en un abierto  $U$  que contiene a  $\mathcal{S} \cup V$ , entonces*

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz.$$

Primero, recordemos que si  $\mathbf{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo vectorial de clase  $C^1$ , entonces la divergencia de  $\mathbf{F}$  es un campo escalar  $\text{div}(\mathbf{F}): U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  continuo, el cual está definido por

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \langle \nabla, \mathbf{F} \rangle = \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), (P, Q, R) \right\rangle = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Al ser  $\text{div}(\mathbf{F})$  continuo (por ser  $\mathbf{F}$  de clase  $C^1$ ), se puede calcular  $\iiint_V \text{div}(\mathbf{F}) dx dy dz$ . Por otro lado, recordemos del curso de CDIVV que las integrales triples las llegamos a definir para ciertos tipos de regiones  $V$ , conocidas como regiones de tipo I, II, III y IV (guardando cierta analogía al tipo de regiones planas consideradas en los dominios para las integrales dobles).

Recordemos además que una región  $V$  en  $\mathbb{R}^3$  es de tipo I, o  $xy$ -proyectable, si existen funciones  $f, g: T \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  con  $f(x, y) \leq g(x, y)$  para todo  $(x, y) \in T$ , tales que para todo punto  $(x, y, z) \in V$  se tiene  $(x, y) \in T$  y

$$f(x, y) \leq z \leq g(x, y).$$

Las regiones de tipo II ( $xz$ -proyectables) y de tipo III ( $yz$ -proyectables) se definen de manera similar. Finalmente, decimos que una región  $V$  es de tipo IV si es de tipo I, II y III. Probaremos a continuación el Teorema de Gauss para este tipo de regiones, sin embargo, aclaramos que este resultado también se cumple para sólidos más generales.

**Demostración:** Lo primero que haremos será reescribir las integrales  $\iiint_V \text{div}(\mathbf{F}) dx dy dz$  y  $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  para separar la demostración en varias partes (de manera similar a como se hizo en las demostraciones de los teoremas de Green y Stokes). Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \iiint_V \text{div}(\mathbf{F}) dx dy dz &= \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz + \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz + \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$

Por otro lado, recordemos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left\langle \mathbf{F} \circ \mathbf{X}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right\rangle du dv,$$

donde  $\mathbf{X}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización de  $S$  que preserva la orientación exterior  $\mathbf{n}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Entonces, podemos escribir  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}$  como

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = \mathbf{n}(\mathbf{X}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right\|.$$

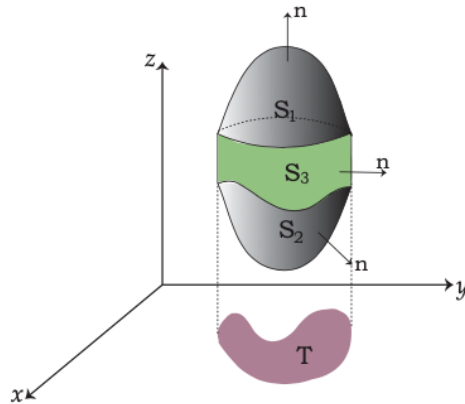
Luego,

$$\begin{aligned}
 \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \langle \mathbf{F} \circ \mathbf{X}, \mathbf{n}(\mathbf{X}(u, v)) \rangle \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right\| dudv \\
 &= \iint_D \langle (P(\mathbf{X}(u, v)), Q(\mathbf{X}(u, v)), R(\mathbf{X}(u, v))), (n_1(\mathbf{X}(u, v)), n_2(\mathbf{X}(u, v)), n_3(\mathbf{X}(u, v))) \rangle \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right\| dudv \\
 &= \iint_D \left( P(\mathbf{X}(u, v))n_1(\mathbf{X}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right\| + Q(\mathbf{X}(u, v))n_2(\mathbf{X}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right\| + R(\mathbf{X}(u, v))n_3(\mathbf{X}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right\| \right) dudv \\
 &= \iint_D P(\mathbf{X}(u, v))n_1(\mathbf{X}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right\| dudv + \iint_D Q(\mathbf{X}(u, v))n_2(\mathbf{X}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right\| dudv + \iint_D R(\mathbf{X}(u, v))n_3(\mathbf{X}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right\| dudv \\
 &= \iint_S Pn_1 dS + \iint_S Qn_2 dS + \iint_S Rn_3 dS.
 \end{aligned}$$

La demostración se reduce a probar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz &= \iint_S Pn_1 dS, \\
 \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz &= \iint_S Qn_2 dS, \\
 \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_S Rn_3 dS.
 \end{aligned}$$

Sólo probaremos la tercera igualdad, ya que las otras dos son análogas. Para tal fin, debemos considerar a  $V$  como una región de tipo I (que se puede hacer por ser de tipo IV). Gráficamente, se puede representar  $V$  y  $S$  como se muestra en la siguiente figura:



**Figura 14.1:**  $V$  pensada como región de tipo I.  
(Imagen tomada de las notas de Ana González).

Entonces, usando la propiedad de aditividad de integrales de superficie para campos escalares, se tiene que

$$\iint_S Rn_3 dS = \iint_{S_1} Rn_3 dS + \iint_{S_2} Rn_3 dS + \iint_{S_3} Rn_3 dS.$$

Con respecto a la sección cilíndrica  $S_3$ , se tiene que  $\mathbf{n}$  es paralelo al plano  $XY$ , de donde  $n_3 = 0$ . Entonces,  $\iint_{S_3} Rn_3 dS = 0$ . Luego,

$$\oiint_S Rn_3 dS = \iint_{S_1} Rn_3 dS + \iint_{S_2} Rn_3 dS.$$

Por otro lado, la sección  $S_1$  que corresponde al techo de  $V$  se puede parametrizar como  $\mathbf{X}_1(x, y) = (x, y, g(x, y))$  donde  $(x, y) \in T$ . Así,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} Rn_3 dS &= \iint_T R(x, y, g(x, y))n_3(x, y, g(x, y)) \left\| \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial y} \right\| dx dy \\ &= \iint_T R(x, y, g(x, y))n_3(x, y, g(x, y)) \left\| \left( -\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) \right\| dx dy \\ &= \iint_T R(x, y, g(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

De manera similar, como  $\mathbf{X}_2(x, y) = (x, y, f(x, y))$  revierte la orientación  $\mathbf{n}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} Rn_2 dS &= \iint_T R(x, y, g(x, y))n_2(x, y, g(x, y)) \left\| \frac{\partial \mathbf{X}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{X}_2}{\partial y} \right\| dx dy \\ &= \iint_T R(x, y, g(x, y))n_2(x, y, g(x, y)) \left\| \left( -\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) \right\| dx dy \\ &= - \iint_T R(x, y, g(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando la Regla de Barrow, se tiene que:

$$\begin{aligned} \oiint_S Rn_3 dS &= \iint_{S_1} Rn_3 dS + \iint_{S_2} Rn_3 dS = \iint_T R(x, y, g(x, y)) dx dy - \iint_T R(x, y, f(x, y)) dx dy \\ &= \iint_T [R(x, y, g(x, y)) - R(x, y, f(x, y))] dx dy = \iint_T \int_{f(x, y)}^{g(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dz dx dy \\ &= \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

□

Así como ocurre con el Teorema de Green, el Teorema de Gauss se puede generalizar a volúmenes en  $\mathbb{R}^3$  con "huecos" en su interior. Omitiremos la prueba de esta generalización debido a su similitud con la demostración del Teorema de Green generalizado.

**Teorema 14.1.2** (de la divergencia de Gauss - generalizado). Sean  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n$  superficies cerradas en  $\mathbb{R}^3$  tales que:

1.  $\mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n$  están dentro del volumen encerrado por  $\mathcal{S}_1$ .
2.  $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j \neq \emptyset$  para todo  $i \neq j$ . Además,  $\mathcal{S}_i$  es exterior a  $\mathcal{S}_j$  para todo  $i \neq j$  y  $2 \leq i, j \leq n$ .
3.  $\mathcal{S}_1$  tiene orientación normal unitaria exterior.
4. Sea  $V$  el volumen comprendido entre las superficies  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n$ . Entonces,  $\mathcal{S}_i$  tiene orientación normal saliente a  $V$ , para cada  $2 \leq i \leq n$ .

Si  $\mathbf{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  en un abierto  $U$  que contiene a la unión  $V \cup \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_n$ , entonces

$$\iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^n \iint_{\mathcal{S}_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

**Corolario 14.1.3** (cálculo de volúmenes). Sea  $V$  una región en  $\mathbb{R}^3$  de tipo IV. Sea  $\mathcal{S} = \partial V$  la superficie cerrada definida por la frontera de  $V$ , que acota a  $V$ , y orientable con orientación dada por el campo normal unitario exterior a  $\mathcal{S}$ . Entonces, el volumen de  $V$  viene dado por

$$\operatorname{vol}(V) = \iiint_V 1 dx dy dz = \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{id} \cdot d\mathbf{S},$$

donde  $\mathbf{id}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es el campo identidad  $\mathbf{id}(x, y, z) = (x, y, z)$ .

De manera más general, si  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$  son como en el teorema anterior, y  $V$  es el volumen comprendido entre estas superficies, entonces

$$\operatorname{vol}(V) = \iiint_V 1 dx dy dz = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \iint_{\mathcal{S}_i} \mathbf{id} \cdot d\mathbf{S}.$$

## 14.2 Ejemplos y aplicaciones

Hagamos primero un par de ejemplos de cálculo.

**Ejemplo 14.2.1.** Considere el campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))$  y sea  $\mathcal{S}$  el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , con tapa inferior  $z = 0$  y tapa superior  $y + z = 2$ . Hallar el valor de la integral

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Esta integral puede calcularse a partir de la definición de integral de superficie. Sin embargo, esto puede resultar bastante tedioso. Primero, notamos que el campo vectorial dado es complicado. Segundo, la superficie  $S$  tenemos que separarla en tres superficies, correspondientes a la sección cilíndrica, a la tapa inferior y a la tapa superior.

Por otro lado, como  $S$  se trata de una superficie cerrada y  $\mathbf{F}$  es de clase  $C^1$  en todo  $\mathbb{R}^3$ , podemos aplicar el teorema de la divergencia de Gauss para simplificar el cálculo de la integral. En efecto, lo primero que notamos es que

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin(xy)) = y + 2y = 3y,$$

es una expresión más sencilla que el campo  $\mathbf{F}$ . En cuanto al volumen sobre el cual integrar, es una región de tipo I dada por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - y, \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Por el Teorema de la divergencia de Gauss, se tiene que

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V 3y dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2-y} 3y dz dy dx.$$

Esta integral se puede simplificar aún más haciendo un cambio a coordenadas cilíndricas

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta) \quad y \quad z = z,$$

donde  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq z \leq 2 - r \sin(\theta)$ . Este cambio de variables tiene determinante Jacobiano dado por  $r$ , por lo cual

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2-y} 3y dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-r \sin(\theta)} 3r^2 \sin(\theta) dz d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r^2 \sin(\theta)(2 - r \sin(\theta)) d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (6r^2 \sin(\theta) - 3r^3 \sin^2(\theta)) d\theta dr \\ &= \int_0^1 \left( 6r^2 \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta - 3r^3 \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) dr = \int_0^1 -3r^3 \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta dr \\ &= \int_0^1 -3r^3 \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta dr = \int_0^1 -3r^3 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta dr \\ &= \int_0^1 -3r^3 \left( \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta \right) dr = \int_0^1 -3\pi r^3 dr = -3\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= -\frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo, vamos a aplicar el Teorema de Gauss generalizado para ciertos volúmenes.

**Ejemplo 14.2.2.** Considere el elipsoide en  $\mathbb{R}^3$  de centro  $(0, 0, 0)$  y ejes  $a, b$  y  $c$  (positivos). Recuerde que esta superficie tiene por ecuación algebraica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

1. Sea  $E$  la región encerrada por el elipsoide anterior. Demuestre que  $\text{vol}(E) = abc\frac{4}{3}\pi$  sin hallar directamente la integral triple  $\iiint_E 1 dx dy dz$ .
2. Considere la esfera centrada en el origen y radio  $r$ , con  $0 < r < \min\{a, b, c\}$ . Calcule el volumen de la región comprendida entre esta esfera y el elipsoide anterior, usando el Teorema de Gauss generalizado.

Para la parte 1., por el teorema de la divergencia, tenemos que

$$\text{vol}(E) = \frac{1}{3} \oiint_S \mathbf{id} \cdot dS,$$

donde  $S$  denota el elipsoide. Recordemos que esta superficie tiene la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} x &= a \cos(u) \sin(v), \\ y &= b \sin(u) \sin(v), \\ z &= c \cos(v), \end{aligned}$$

donde  $0 \leq u \leq 2\pi$  y  $0 \leq v \leq \pi$ . Para

$$\mathbf{X}(u, v) = (a \cos(u) \sin(v), b \sin(u) \sin(v), c \cos(v))$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} &= (-a \sin(u) \sin(v), b \cos(u) \sin(v), 0), \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} &= (a \cos(u) \cos(v), b \sin(u) \cos(v), -c \sin(v)), \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin(u) \sin(v) & b \cos(u) \sin(v) & 0 \\ a \cos(u) \cos(v) & b \sin(u) \cos(v) & -c \sin(v) \end{vmatrix} \\ &= (-bc \cos(u) \sin^2(v), -ac \sin(u) \sin^2(v), -ab \cos(v) \sin(v)). \end{aligned}$$

El vector  $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}$  apunta hacia el centro del elipsoide, por lo que tomaremos en su lugar el vector  $\mathbf{n} = -\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}$  para tener orientación normal exterior sobre el elipsoide.

Como

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{id}, \mathbf{n} \rangle &= \langle (a \cos(u) \sin(v), b \sin(u) \sin(v), c \cos(v)), -(-bc \cos(u) \sin^2(v), -ac \sin(u) \sin^2(v), -ab \cos(v) \sin(v)) \rangle \\ &= abc \sin(v),\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\text{vol}(E) &= \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{id} \cdot dS = \frac{1}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} abc \sin(v) du dv = abc \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi \sin(v) dv = abc \frac{2}{3} \pi [-\cos(v)]_0^\pi \\ &= abc \frac{4}{3} \pi.\end{aligned}$$

Para la parte 2., tenemos por el Teorema de Gauss generalizado que

$$\text{vol}(V) = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{id} \cdot dS + \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{E}} \mathbf{id} \cdot dS$$

donde  $V$  es la región comprendida entre la esfera  $\mathcal{E}$  y el elipsoide  $S$ . Recordemos que la segunda integral de superficie en la expresión anterior se calcula con campo normal saliente del volumen. Teniendo esto en cuenta, junto a la parte 1., tenemos que

$$\frac{1}{3} \iint_{\mathcal{E}} \mathbf{id} \cdot dS = -\text{vol}(\text{esfera}) = -r \cdot r \cdot r \frac{4}{3} \pi = -r^3 \frac{4}{3} \pi,$$

pues nuestra esfera es una elipse con  $a = b = c = r$ . Entonces,

$$\text{vol}(V) = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{id} \cdot dS + \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{E}} \mathbf{id} \cdot dS = abc \frac{4}{3} \pi - r^3 \frac{4}{3} \pi = (abc - r^3) \frac{4}{3} \pi.$$

Cerramos estas notas con una aplicación del teorema de Gauss en electromagnetismo.

**Ejemplo 14.2.3** (ley de Gauss). Sea  $Q$  una carga eléctrica colocada en el punto  $(0, 0, 0)$ , y encerrada por una superficie  $S$ . Para cada punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  no nulo, se define el potencial eléctrico en  $(x, y, z)$  debido a  $Q$  como el campo escalar

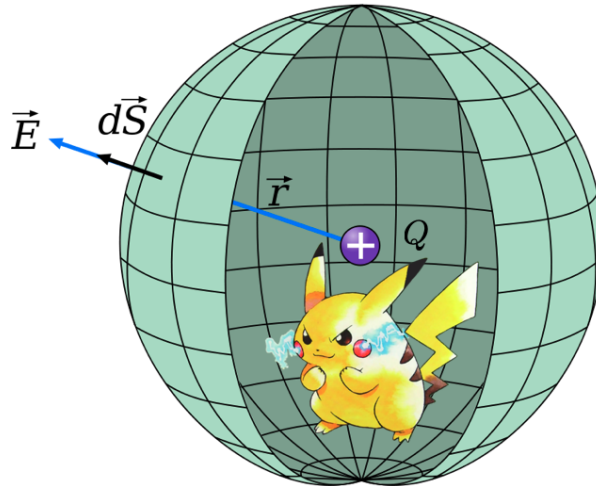
$$\phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

El campo eléctrico correspondiente se define entonces como

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\nabla \phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z).$$



Ahora, tenga en cuenta que no podemos aplicar el Teorema de Gauss para el volumen encerrado por  $S$ , ya que el campo eléctrico no es continuo en  $(0, 0, 0)$ .



**Figura 14.2:** Campo eléctrico que atraviesa  $S$ .

Entonces, debemos aislar esta discontinuidad con una superficie cerrada  $S'$ . Sea  $V$  el volumen comprendido entre  $S$  y  $S'$ . Por el Teorema de la divergencia de Gauss generalizado, se tiene que

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{E}) dx dy dz,$$

donde  $S$  y  $S'$  tienen orientaciones salientes del volumen  $V$ . Como ejercicio, el lector debe demostrar que

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \operatorname{div}(-\nabla\varphi) = -\nabla^2\varphi = 0,$$

es decir, que el Laplaciano del potencial eléctrico debido a  $Q$  es cero. Nos queda entonces

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\oiint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{S''} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S},$$

donde  $S''$  es la misma superficie  $S'$  pero con orientación contraria. Entonces, todo se reduce a calcular  $\oiint_{S''} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$  para hallar el campo eléctrico que atraviesa a  $S$ . Como  $S''$  es arbitraria, podemos escoger una superficie sencilla y encerrada por  $S$ . Supongamos que  $S$  es lo suficientemente grande para contener a la esfera unitaria  $S^2$ . En caso contrario, simplemente se toma una esfera centrada en el origen con radio lo suficientemente pequeño, pero hacemos esta suposición para simplificar algunos cálculos. Para  $S^2$  tenemos la parametrización

$$\mathbf{X}(u, v) = (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v))$$

donde  $0 \leq u \leq 2\pi$  y  $0 \leq v \leq \pi$ .

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} &= (-\sin(u) \sin(v), \cos(u) \sin(v), 0), \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} &= (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), -\sin(v)), \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin(u) \sin(v) & \cos(u) \sin(v) & 0 \\ \cos(u) \cos(v) & \sin(u) \cos(v) & -\sin(v) \end{vmatrix} \\ &= (-\cos(u) \sin^2(v), -\sin(u) \sin^2(v), -\sin(v) \cos(v))\end{aligned}$$

Ahora tomemos  $-\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}$  (tengamos en cuenta la orientación), y así

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \circ \mathbf{X}(u, v) &= \frac{Q}{4\pi} (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v)), \\ \left\langle \mathbf{E} \circ \mathbf{X}(u, v), -\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right\rangle &= \frac{Q}{4\pi} \langle (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v)), (\cos(u) \sin^2(v), \sin(u) \sin^2(v), \sin(v) \cos(v)) \rangle \\ &= \frac{Q}{4\pi} \sin(v).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S''} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\langle \mathbf{E} \circ \mathbf{X}(u, v), -\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right\rangle dudv \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin(v) dudv = \frac{Q}{4\pi} 2\pi \int_0^\pi \sin(v) dv = \frac{Q}{2} [-\cos(v)]_0^\pi \\ &= Q.\end{aligned}$$

Hemos probado entonces que el flujo eléctrico del campo generado por  $Q$  que atraviesa a una superficie cerrada  $S$  es igual a la carga que ésta encierra. Este enunciado se conoce como la **ley de Gauss**.

Escrito en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X por Marco A. Pérez.

Material consultado:

- Cálculo Vectorial, de Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba.
- Cálculo Vectorial, notas de A. González.

Última actualización: 18 de Noviembre de 2020.