CÁLCULO VECTORIAL

TEMA 9

ROTACIONAL Y DIVERGENCIA

En nuestro estudio de campos de gradientes, vimos que una condición que debe cumplir un campo vectorial $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) \colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 para que sea un campo de gradientes es que:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0. \tag{i}$$

En otras palabras, es necesario que el vector

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

se anule para que $\boldsymbol{F}$ sea un campo de gradientes. Más aún, para cierto tipo de dominios U (por ejemplo, si U es simplemente conexo o si U es convexo), ser un campo de gradientes es equivalente a la condición anterior. Entonces, podemos afirmar con cierta seguridad que ya conocemos los campos vectoriales que cumplen con (i). Ahora, es natural preguntarse qué ocurre con aquellos campos para los cuales

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \neq (0, 0, 0).$$

Esto último tiene que ver con el fenómeno de rotación estudiado en mecánica, como explicaremos más adelante.

9.1 Rotacional y transformación gradiente

Una de las cosas que pudimos apreciar en las notas anteriores es que, dado un campo escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, el gradiente de f define un campo vectorial $\nabla f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1. Hablando en el lenguaje del álgebra lineal, tenemos una transformación lineal $\nabla\colon f \mapsto \nabla f$ que va del $\mathbb{R}$-espacio vectorial de campos escalares de clase C^2 al $\mathbb{R}$-espacio vectorial de campos vectoriales de clase C^1. La linealidad de ∇ se sigue de la linealidad de las derivadas parciales. Si usamos notación matricial, tenemos

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

A ∇ la llamaremos *transformación gradiente*.[1] Esta transformación se puede extender a campos vectoriales a través de una transformación conocida como rotor o rotacional.

Definición 9.1.1. *Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1, se define el **rotor** o **rotacional** de $\boldsymbol{F}$ como:*

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) = \nabla \times \boldsymbol{F} := \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

*Si $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) = \mathbf{0}$, se dice que $\boldsymbol{F}$ es **irrotacional**.*

Ejemplo 9.1.2. *En los siguientes ejemplos, el primero tiene el propósito de mostrar simplemente cómo se trabajan las cuentas a la hora de calcular un rotacional. Mientras que en los siguientes dos, además de cálculos, daremos algunas interpretaciones físicas de cada rotacional.*

1. *Calculemos el rotacional del campo vectorial*

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xy^2z^2, z^2\sin(y), x^2e^y).$$

En este caso, tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z & z^2\sin(y) & x^2e^y \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2e^y) - \frac{\partial}{\partial z}(z^2\sin(y)), \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2e^y), \frac{\partial}{\partial x}(z^2\sin(y)) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2z) \right) \\ &= (x^2e^y - 2z\sin(y), xy^2 - 2xe^y, -2xyz). \end{aligned}$$

[1] En parte de la bibliografía existente, se suele usar el término *operador gradiente* u *operador nabla*. Creemos que este término no es conveniete, porque en álgebra lineal se reserva la palabra “operador” para transformaciones lineales de un espacio vectorial en sí mismo.

2. *La idea de rotacional puede llevarse a campos vectoriales de la forma $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$, agregando $F_3 = 0$, es decir, $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, 0)$. Por ejemplo, vamos a calcular el rotacional del campo vectorial $\boldsymbol{F} \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por*

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

donde $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) \\
&= \left(\frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \left(0, 0, \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\
&= (0, 0, 0).
\end{aligned}$$

En este caso, el campo $\boldsymbol{F}$ es irrotacional. Se puede aprovechar este ejemplo para darle una interpretación física a la palabra "irrotacional". Coloquemos en cada punto (x, y) el vector de fuerza $\boldsymbol{F}(x, y)$.

Figura 9.1: Flujo de $\boldsymbol{F}$. `(Imagen tomada de Math Stack Exchange)`

Podemos pensar en el flujo de vectores $\boldsymbol{F}(x, y)$ pintados en azul como la corriente de un río. Si colocamos un bote en dicho río, con un timón como en la figura de abajo, entonces por la dirección que tiene el flujo $\boldsymbol{F}$, el bote se moverá pero no rotará.

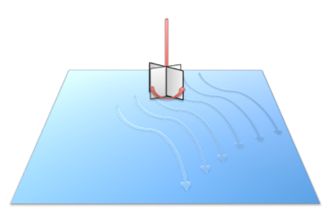

Figura 9.2: Bote con timón formado por dos paletas cruzadas.

3. *Supongamos que tenemos un objeto rígido girando sobre su eje, por ejemplo el planeta Tierra. Su movimiento de rotación se describe de la siguiente manera. Supongamos que el origen de nuestro sistema de coordenadas lo fijamos en el centro de la Tierra. Ésta gira con rapidez angular $||\boldsymbol{\omega}||$, donde el vector $\boldsymbol{\omega}$ es paralelo al eje de rotación (eje Z), y apunta hacia "arriba" para corresponder con el sentido de rotación según la regla de la mano derecha. Sabiendo eso, es posible calcular la velocidad tangencial en cada punto de la Tierra (ya sea en su superficie o en cualquiera de sus mantos). Sea (x, y, z) un punto de la Tierra, que podemos ver también como vector de posición. Sea θ el ángulo que forma (x, y, z) con el eje Z. Luego, la distancia del punto (x, y, z) al eje Z viene dada por $||(x, y, z)|| \sin(\theta)$, y la rapidez tangencial en (x, y, z) está dada por*

$$||\boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{\omega}||||(x, y, z)|| \sin(\theta).$$

Al ser $\boldsymbol{v}$ tangencial a (x, y, z) y perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$, tenemos que

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = \boldsymbol{\omega} \times (x, y, z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & ||\boldsymbol{\omega}|| \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-||\boldsymbol{\omega}||y, ||\boldsymbol{\omega}||x, 0).$$

Si calculamos el rotacional al campo de velocidades $\boldsymbol{v}(x, y, z)$, obtenemos

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}(x, y, z)) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -||\boldsymbol{\omega}||y & ||\boldsymbol{\omega}||x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2||\boldsymbol{\omega}||) = 2\boldsymbol{\omega}.$$

Entonces, hay una estrecha relación entre la velocidad angular de un cuerpo rígido que gira sobre su eje y el rotacional de su campo de velocidades tangenciales. Conociendo la velocidad angular del cuerpo podemos calcular el rotacional del campo de velocidades tangenciales. Recíprocamente, conociendo el rotacional de este campo podemos determinar la velocidad angular o de rotación.

Teniendo ahora un poco más claro qué información nos da el campo $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F})$, estudiemos algunas de sus propiedades.

Proposición 9.1.3 (propiedades del rotacional). *Sean $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} \colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campos vectoriales de clase C^1 y $f \colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1. Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. ***Linealidad:*** $\operatorname{rot}(a\boldsymbol{F} + b\boldsymbol{G}) = a \operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) + b \operatorname{rot}(\boldsymbol{G})$, *para todo $a, b \in \mathbb{R}$.*

2. $\operatorname{rot}(f \cdot \boldsymbol{F}) = f \cdot \operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) + \nabla f \times \boldsymbol{F}$.

Demostración:

1. Haciendo $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ y $\boldsymbol{G} = (G_1, G_2, G_3)$, tenemos

$$a\boldsymbol{F} + b\boldsymbol{G} = (aF_1 + bG_1, aF_2 + bF_2, aF_3 + bG_3).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(a\boldsymbol{F} + b\boldsymbol{G}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ aF_1 + bG_1 & aF_2 + bG_2 & aF_3 + bG_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(aF_3 + bG_3) - \frac{\partial}{\partial z}(aF_2 + bG_2), \frac{\partial}{\partial z}(aF_1 + bG_1) - \frac{\partial}{\partial x}(aF_3 + bG_3), \right. \\
&\qquad \left. \frac{\partial}{\partial x}(aF_2 + bG_2) - \frac{\partial}{\partial y}(aF_1 + bG_1) \right) \\
&= \left(a\frac{\partial F_3}{\partial y} - a\frac{\partial F_2}{\partial z} + b\frac{\partial G_3}{\partial y} - b\frac{\partial F_2}{\partial z}, a\frac{\partial F_1}{\partial z} - a\frac{\partial F_3}{\partial x} + b\frac{\partial G_1}{\partial z} - b\frac{\partial G_3}{\partial x}, \right. \\
&\qquad \left. a\frac{\partial F_2}{\partial x} - a\frac{\partial F_1}{\partial y} + b\frac{\partial G_2}{\partial x} - b\frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \\
&= a\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\
&\qquad + b\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \\
&= a\operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) + b\operatorname{rot}(\boldsymbol{G}).
\end{aligned}$$

2. Haciendo nuevamente $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, tenemos que $f\boldsymbol{F} = (fF_1, fF_2, fF_3)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(f\boldsymbol{F}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fF_1 & fF_2 & fF_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(fF_3) - \frac{\partial}{\partial z}(fF_2), \frac{\partial}{\partial z}(fF_1) - \frac{\partial}{\partial x}(fF_3), \frac{\partial}{\partial x}(fF_2) - \frac{\partial}{\partial y}(fF_1) \right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot F_3 + f \cdot \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot F_2 - f \cdot \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} \cdot F_1 + f \cdot \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot F_3 - f \cdot \frac{\partial F_3}{\partial x}, \right. \\
&\qquad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \cdot F_2 + f \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot F_1 - f \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\
&= f\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\
&\qquad + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot F_3 - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot F_2, \frac{\partial f}{\partial z} \cdot F_1 - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot F_3, \frac{\partial f}{\partial x} \cdot F_2 - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot F_1 \right)
\end{aligned}$$

$$= f \cdot \operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = f \cdot \operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) + \nabla f \times \boldsymbol{F}.$$

$\square$

Proposición 9.1.4 (condición necesaria para que un campo vectorial sea de gradientes)**.** *Si $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^2, entonces*

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}.$$

En otras palabras, todo campo de gradientes de clase C^1 es irrotacional.

Demostración: Esta prueba ya se hizo en las notas anteriores, cuando demostramos la condición necesaria para que un campo fuera de grandientes. Sin embargo, vamos a reescribir los argumentos según la notación de rotacional.

Sabemos que $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$. Al ser f de clase C^2, las derivadas parciales de f de orden 2 existen y son continuas, por lo que en particular se tiene $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$. Entonces, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\nabla f) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

$\square$

La proposición anterior indica que, si queremos ver que un campo no es de gradientes, entonces basta con verificar que no es irrotacional.

Ejemplo 9.1.5. *Demostremos que el campo vectorial $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por*

$$\boldsymbol{F}(x, y) = (y, -x)$$

no es un campo de gradientes. Calculemos su rotacional: $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -2).$

Como $\text{rot}(\boldsymbol{F}) \neq (0,0,0)$*, el campo es rotacional, por lo que no se trata de un campo de gradientes. Podemos notar además que* $\boldsymbol{F}$ *es un flujo que hace rotar al plano* XY *alrededor del eje* Z*, con rapidez angular igual a 1 y en sentido horario.*

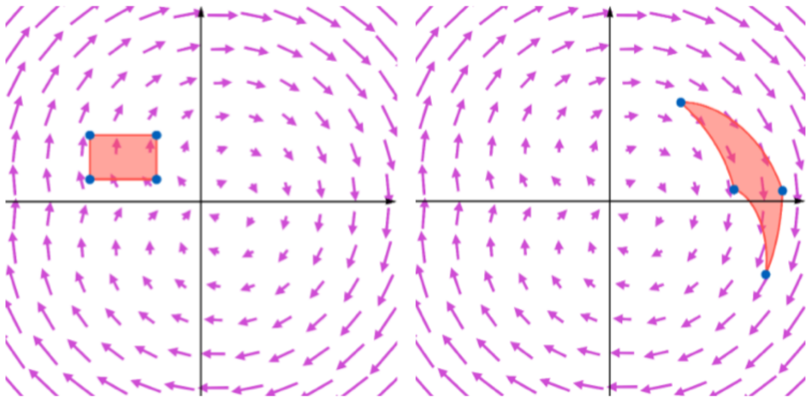

Figura 9.3: Flujo de $\boldsymbol{F}$.

Bajo ciertas condiciones adicionales, va a ser válido el recíproco de la proposición anterior, extendiendo así la caracterización de campos de gradientes de clase C^1 vista en las notas anteriores. Estas condiciones tienen que ver con el dominio del campo a considerar, a saber, si éste es convexo o simplemente conexo.

Teorema 9.1.6. *Sea* $\boldsymbol{F} \colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un campo vectorial de clase* C^1*, donde* U *es un conjunto simplemente conexo, o abierto y convexo. Entonces,* $\boldsymbol{F}$ *es un campo de gradientes (es decir, conservativo) si, y solo si,* $\text{rot}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{0}$.

Este teorema también vale para campos vectoriales de dos variables, y de manera más general, para cualquier campo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Nos interesarán los casos $n = 2$ y $n = 3$.

La implicación ($\Rightarrow$) es la proposición anterior. Por otro lado, la prueba de que $\boldsymbol{F}$ es un campo de gradientes a partir de $\text{rot}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{0}$ se verá más adelante cuando estudiemos el Teorema de Stokes, para el caso donde U es simplemente conexo. El caso donde U es convexo se puede probar sin usar este teorema, pero la demostración es algo larga y la omitiremos. El lector interesado la puede encontrar en el volumen II del libro *Calculus*, de Tom Apostol (Teorema 12.4).

Cerramos esta sección definiendo lo que son conjuntos convexos y simplemente conexos.

Definición 9.1.7. *Un conjunto* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *es* ***convexo*** *si, para cualesquiera par de puntos* $\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1} \in U$*, el segmento de recta que conecta a* $\boldsymbol{x_0}$ *con* $\boldsymbol{x_1}$ *está contenido en* U*, es decir,* $\boldsymbol{x_0} + t(\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_0}) \in U$ *para todo* $t \in [0,1]$.

Definición 9.1.8. *Un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es **simplemente conexo** si es abierto, conexo, y si toda curva cerrada contenida en U es homotópica a un punto.*

¿Qué significa que una curva sea homotópica a un punto? Intuitivamente, significa que la curva puede deformarse continuamente (es decir, sin romperla) hasta convertirla en un punto. Matemáticamente, la definición es la siguiente: una curva cerrada $\mathcal{C}$ contenida en U, con parametrización $\boldsymbol{\alpha}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, es *homotópica a un punto* $\boldsymbol{x_0} \in U$ si existe una función continua $H\colon [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned} H(0,t) &= \boldsymbol{\alpha}(t), \text{ para todo } t \in [a,b] \\ H(1,t) &= \boldsymbol{x_0}, \text{ para todo } t \in [a,b], \text{ y} \\ H(s,a) &= H(s,b), \text{ para todo } s \in [0,1]. \end{aligned}$$

Dejaremos los ejemplos de curvas homotópicas a puntos y de conjuntos simplemente conexos para más adelante. Pasemos al estudio de la divergencia de campos vectoriales.

9.2 Divergencia

En la sección anterior estudiamos la transformación lineal rotacional que envía un campo vectorial $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ en otro campo vectorial dado por $\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$. En esta sección estudiaremos la transformación lineal conocida como divergencia, que envía a $\boldsymbol{F}$ en un campo escalar.

Definición 9.2.1. *Sea $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1. Se define la **divergencia de $\boldsymbol{F}$** como el campo escalar $\operatorname{div}(\boldsymbol{F})\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado, para todo $\boldsymbol{x} \in U$, por*

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}).$$

Observación 9.2.2.

1. *En particular, para el caso $n = 3$, la divergencia de $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ luce de la siguiente manera para todo $(x,y,z) \in U$:*

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F})(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z).$$

2. *La transformación de divergencia puede denotarse como un producto escalar simbólico, así como pasaba con la transformación de rotacional y el producto vectorial, de la siguiente manera:*

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = \langle \nabla, \boldsymbol{F} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}.$$

Así como ocurría con el rotacional, la divergencia de un campo vectorial también tiene una interpretación física. Podemos pensar en $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ como un campo de velocidades de un fluido. Entonces, $\frac{\partial F_1}{\partial x}(\boldsymbol{x})$ mide la tasa de cambio instantánea en dirección $(1,0,0)$ de la componente del flujo $\boldsymbol{F}$ en esa misma dirección (a saber, F_1) y en el punto $\boldsymbol{x} \in U$. En otras palabras, $\frac{\partial F_1}{\partial x}(\boldsymbol{x})$ mide la tasa de expansión del fluido en dirección $(1,0,0)$ y en el punto $\boldsymbol{x}$. Por otro lado, para las componentes del flujo F_2 y F_3 en direcciones $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ tenemos interpretaciones similares. Luego, $\operatorname{div}(\boldsymbol{F})$ mide la tasa total de expansión del fluido en el punto $\boldsymbol{x}$. Si $\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) > 0$, tenemos que el fluido tiene una tasa de expansión positiva de unidad de volumen por unidad de tiempo. En cambio, si $\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) < 0$, tenemos que el fluido tiene una tasa de expansión negativa, es decir, que se comprime.

Ejemplo 9.2.3. *Calcular la divergencia de los siguientes campos vectoriales:*

1. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. *Tenemos que*

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F})(x,y,z) = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), (x,y,z) \right\rangle = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

   Entonces, si $\boldsymbol{F}$ representa la velocidad de un fluido, tenemos que éste se expande a 3 unidades cúbicas de volumen por unidad de tiempo, en cualquier punto.

2. $\boldsymbol{F} = (xy^2z^2, z^2\sin(y), x^2e^y)$. *Tenemos que*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{F}) &= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), (xy^2z^2, z^2\sin(y), x^2e^y) \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(z^2\sin(y)) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2e^y) \\ &= y^2z^2 + z^2\cos(y). \end{aligned}$$

Anteriormente nos hemos referido a $\operatorname{div}(-)$ como una transformación lineal. Esto lo vamos a probar a continuación, dentro del conjunto de propiedades que tiene la divergencia.

Proposición 9.2.4 (propiedades de la divergencia)**.** *Las siguientes propiedades se cumplen para cualesquiera campos vectoriales $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} \colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y cualesquiera campos escalares $f \colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1.*

1. $\operatorname{div}(a\boldsymbol{F} + b\boldsymbol{G}) = a\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) + b\operatorname{div}(\boldsymbol{G})$*, para todo $a, b \in \mathbb{R}$. En otras palabras,* div *es una transformación lineal del espacio vectoriales de los campos vectoriales de clase C^1 en el espacio vectorial de los campos escalares continuos.*

2. $\operatorname{div}(f\boldsymbol{F}) = f\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) + \langle \nabla f, \boldsymbol{F} \rangle$.

3. *Para $n = 3$, si además $\boldsymbol{F}$ es de clase C^2, entonces* $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\boldsymbol{F})) = 0$.

Demostración: Solamente probaremos 2. y 3., mientas que 1. se deja como ejercicio.

2. Escribimos $\boldsymbol{F} = (F_1, \dots, F_n)$. Entonces, $f\boldsymbol{F} = (fF_1, \dots, fF_n)$ es claramente un campo vectorial de clase C^1, por lo que podemos calcular su divergencia:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f\boldsymbol{F}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(fF_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(f\frac{\partial F_k}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_k} F_k \right) \\ &= f\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} F_k \\ &= f\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) + \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), (F_1, \dots, F_n) \right\rangle \\ &= f\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) + \langle \nabla f, \boldsymbol{F} \rangle.\end{aligned}$$

3. Al ser $\boldsymbol{F}$ de clase C^2 se puede calcular su rotacional, $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F})$, que resulta en un campo vectorial de clase C^1, y por ende podemos calcular su divergencia:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\boldsymbol{F})) = \operatorname{div}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} = 0.\end{aligned}$$

$\square$

El campo vectorial $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F})$ de la proposición anterior pertenece a una familia especial de campos vectoriales que tienen divergencia nula.

Definición 9.2.5. *Un campo $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 es **solenoidal** si $\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = 0$.*

Ejemplo 9.2.6.

1. *El campo dado por $\boldsymbol{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$, es solenoidal. En efecto, tenemos que*

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{y}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x - \frac{x}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y = 0.$$

2. *Encuentre los valores de n para los cuales $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2)^{n/2}(x, y, z)$ es un campo solenoidal.*

Lo primero es notar que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x(x^2+y^2+z^2)^{n/2}) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}((1+n)x^2+y^2+z^2),\\
\frac{\partial F_2}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(y(x^2+y^2+z^2)^{n/2}) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}(x^2+(1+n)y^2+z^2),\\
\frac{\partial F_3}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(z(x^2+y^2+z^2)^{n/2}) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}(x^2+y^2+(1+n)z^2).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}((3+n)x^2+(3+n)y^2+(3+n)z^2).$$

Por lo tanto, $\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = 0$ *si, y solo si,* $n = -3$.

En la sección anterior, vimos que, para campos vectoriales $\boldsymbol{F}$ de clase C^2 en dominios simplemente conexos (o también en abiertos y convexos), $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) = \mathbf{0}$ si, y solo si, $\boldsymbol{F}$ es un campo de gradientes, es decir, se puede encontrar un potencial escalar f tal que $\boldsymbol{F} = \nabla f$. La condición $\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = 0$ que define a los campos solenoidales guarda un paralelismo con lo anterior. En lo que sigue, nuestro objetivo será demostrar que $\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = 0$ si, y solo si, existe un campo vectorial $\boldsymbol{G}$ de clase C^1 tal que $\boldsymbol{F} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{G})$.

Definición 9.2.7. *Un campo vectorial* $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de clase* C^1 *se dice* ***de rotores*** *si existe un campo vectorial* $\boldsymbol{G}\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de clase* C^2 *tal que* $\boldsymbol{F} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{G})$. *Al campo* $\boldsymbol{G}$ *se le denomina* ***potencial vector*** *de* $\boldsymbol{F}$.

Así como vimos que los potenciales escalares de un campo vectorial difieren en una función constante, probaremos una propiedad similar para los potenciales vectores.

Proposición 9.2.8. *Sea* $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un campo vectorial de clase* C^1, *donde* U *es simplemente conexo. Si* $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *son potenciales vectores de* $\boldsymbol{F}$, *entonces* $\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} = \nabla f$, *para algún campo escalar* $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *de clase* C^3.

Demostración: Tenemos que $\operatorname{rot}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{F} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{H})$. Por la linealidad del rotacional, tenemos que $\operatorname{rot}(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H}) = \mathbf{0}$, es decir, $\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H}$ es un campo irrotacional en un dominio simplemente conexo. Por el Teorema 9.1.6, tenemos que $\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H}$ es un campo de gradientes, es decir, que existe un campo escalar $f\colon U \to \mathbb{R}$ de clase C^3 (pues $\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H}$ es de clase C^2) tal que $\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} = \nabla f$. $\square$

A la hora de probar si un campo vectorial $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es de rotores, debemos hallar un campo vectorial $\boldsymbol{G} = (G_1, G_2, G_3)$ de clase C^2 tal que

$$(F_1, F_2, F_3) = \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right).$$

Es decir, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = F_1, \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = F_2, \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = F_3. \end{cases}$$

Este sistema se trata de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, donde F_1, F_2 y F_3 son funciones dadas, mientras que G_1, G_2 y G_3 son funciones incógnitas. Veamos un ejemplo para entender cómo resolver esto, y el método general lo presentaremos en el teorema que está más adelante.

Ejemplo 9.2.9. *Sea $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xz, -yz, y)$. Sabiendo que $\boldsymbol{F}$ es de rotores, hallar un potencial vector para $\boldsymbol{F}$.*

Planteamos el sistema de ecuaciones en derivadas parciales a resolver:

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = xz, \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = -yz, \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = y. \end{cases}$$

Tengamos en cuenta que necesitamos hallar alguna terna (G_1, G_2, G_3) que satisfaga lo anterior, no todas, por lo que podemos asumir $G_3 = 0$ para simplificar un poco el problema. Entonces, la primera y segunda ecuación se convierten en

$$\frac{\partial G_2}{\partial z} = -xz \qquad y \qquad \frac{\partial G_1}{\partial z} = -yz.$$

Luego, $G_2(x,y,z) = -\frac{xz^2}{2} + g_2(x,y)$ y $G_1(x,y,z) = -\frac{yz^2}{2} + g_1(x,y)$. Entonces, la tercera ecuación se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= y \\ -\frac{z^2}{2} + \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{z^2}{2} - \frac{\partial g_1}{\partial y} &= y \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} &= y. \end{aligned}$$

La ecuación anterior resultante podemos simplificarla haciendo $g_1 = 0$, de donde

$$g_2(x,y) = xy + h_2(y),$$

donde podemos hacer también $h_2 = 0$ y tener finalmente $g_2(x,y) = xy$. Entonces:

$$\begin{aligned} G_1(x,y,z) &= -\frac{yz^2}{2}, \\ G_2(x,y,z) &= -\frac{xz^2}{2} + xy, \\ G_3(x,y,z) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{G}(x,y,z) = \left(-\frac{yz^2}{2}, -\frac{xz^2}{2} + xy, 0\right)$$

es un potencial vector de $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xz, -yz, y)$*.*

Teorema 9.2.10. *Sea* $\boldsymbol{F}\colon I \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un campo vectorial de clase* C^1*, donde* $I = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2) \times (c_1, c_2)$ *es un intervalo abierto de* $\mathbb{R}^3$ *(en particular, I puede ser el mismo* $\mathbb{R}^3$*). Entonces,* $\boldsymbol{F}$ *es un campo de rotores si, y solo si,* $\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = 0$*.*

Demostración: La implicación (⇒) ya fue probada en el conjunto de propiedades anteriores. Ahora supongamos que $\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = 0$. Como se dijo antes, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = F_1, \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = F_2, \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = F_3. \end{cases}$$

Nuevamente, podemos simplificar el problema haciendo $G_3 = 0$. Entonces, el sistema anterior se convierte en:

$$\begin{cases} \frac{\partial G_2}{\partial z} = -F_1, \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} = F_2, \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = F_3. \end{cases}$$

Hallar G_1 y G_2 se convierte en un problema de primitivas. Entonces, por el teorema fundamental del cálculo, tenemos que:

$$G_2(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} F_1(x,y,t)dt + g_1(x,y) \quad \text{y} \quad G_1(x,y,z) = \int_{z_0}^{z} F_2(x,y,t)dt + g_2(x,y),$$

donde $c_1 \leq z_0 \leq c_2$. Ahora hacemos $g_2 = 0$ para hallar una solución. Luego, de la tercera ecuación del sistema se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= F_3 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(-\int_{z_0}^{z} F_1(x,y,t)dt + g_1(x,y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{z_0}^{z} F_2(x,y,t)dt\right) &= F_3. \end{aligned}$$

Por un resultado de cálculo en varias variables, las funciones $\int_{z_0}^{z} F_2(x,y,t)dt$ y $\int_{z_0}^{z} F_1(x,y,t)dt$ tienen derivada parcial respecto a x y a y, respectivalemte, y se puede permutar la derivación con el símbolo de integral. Entonces:

$$
\begin{aligned}
-\int_{z_0}^{z} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,t)dt - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,t)dt + \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) &= F_3 \\
\int_{z_0}^{z} \left(-\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,t) - \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,t) \right) dt + \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) &= F_3.
\end{aligned}
$$

Ahora, por hipótesis, sabemos que $\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,t) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,t) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,t) = 0$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,t) \right) dt + \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) &= F_3(x,y,z) \\
F_3(x,y,z) - F_3(x,y,z_0) + \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) &= F_3(x,y,z) \\
\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) &= F_3(x,y,z_0) \\
g_1(x,y) &= \int_{x_0}^{x} F_3(s,y,z_0)ds,
\end{aligned}
$$

para algún $a_1 \leq s \leq a_2$. Por lo tanto, se tiene que una solución del sistema viene dada por

$$
\boldsymbol{G}(x,y,z) = \left(\int_{z_0}^{z} F_2(x,y,t)dt, -\int_{z_0}^{z} F_1(x,y,t)dt + \int_{x_0}^{x} F_3(s,y,z_0)ds, 0 \right).
$$

$\square$

Escrito en LaTeX por **Marco A. Pérez**.

Material consultado:
- Cálculo Vectorial, de Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba.
- Calculus Vol. 2, de Tom Apostol.
- Cálculo Vectorial, notas de A. González.

Última actualización: `19 de Octubre de 2020`.