CÁLCULO VECTORIAL

TEMA 1

REPASO DE DIFERENCIABILIDAD

El curso de *Cálculo Vectorial* de la Facultad de Ingeniería continúa con el estudio de funciones de varias variables iniciado en el curso de *Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables*. En esta oportunidad, dicho estudio estará centrado en el cálculo sobre curvas y superficies. En cuanto a la parte diferencial, profundizaremos sobre el concepto de función diferenciable y retomaremos el estudio de extremos absolutos y relativos de una función a valores reales. La búsqueda de extremos la vamos a complementar agregando funciones de varias variables sujetas a restricciones. Agregaremos además a nuestro banco de teoremas un par que son muy importantes: los teoremas de la función inversa y función implícita.

En el anterior curso de cálculo la parte de diferenciabilidad estuvo más enfocada en funciones de varias variables a valores reales, a las cuales llamaremos *campos escalares*. En este curso nos enfocaremos también en funciones de varias variables a valores vectoriales, también llamadas *campos vectoriales*. Estas funciones son muy importantes en áreas estudiadas en ingeniería como la mecánica y el electromagnetismo. Varios conceptos de estas áreas se explican mediante operaciones sobre campos escalares y vectoriales, como los son el gradiente, la divergencia y rotacional.

Finalmente, la parte del cálculo integral la extenderemos a generalizaciones de las integrales simples y dobles, conocidas como integrales curvilíneas e integrales de superficie. Veremos además la relación entre estas integrales con las integrales dobles y triples, a través de los Teoremas de Green, Stokes y Gauss.

Motivación del curso

Como mencionamos hace apenas un momento, los conceptos y resultados que estudiaremos a lo largo de este curso tienen su importancia en áreas como la mecánica y el electromagnetismo. Hablando en términos muy generales, nuestra motivación será entender, escribir y manipular el lenguaje matemático que subyace detrás de estos campos de la física. Por ejemplo, las cuatro *ecuaciones de Maxwell* que describen toda la teoría electromagnética están escritas en el lenguaje del cálculo vectorial. Está entre estas ecuaciones la *Ley de Gauss para el campo eléctrico*, que describe el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada S como la integral de superficie sobre S del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ que la atraviesa; y (2) la *ley del Gauss para el campo magnético*, que dice que sobre una superficie cerrada S la divergencia del campo magnético $\boldsymbol{B}$ es cero, o equivalentemente, que la integral de superficie de $\boldsymbol{B}$ sobre S es cero. También la *ley de Faraday* y la *ley de Ampère* describen fenómenos electromagnéticos en términos de integrales curvilíneas y de superficie.

1.1 Continuidad

Los resultados expuestos en estas notas se enuncian sin demostración, ya que las mismas corresponden al curso anterior.

Comencemos nuestro repaso con el concepto de continuidad. Para acostumbrarnos a los campos vectoriales, repasaremos éste y los siguientes conceptos para tales funciones, haciendo las observaciones correspondientes para campos vectoriales.

Definición 1.1.1. *Un **campo escalar** es una función $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

*Un **campo vectorial** es una función $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde $m \geq 2$. Usualmente se representa a $\boldsymbol{F}$ como una m-upla $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_m)$ donde cada $F_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $1 \leq k \leq m$, es un campo escalar. Siguiendo esta notación, si $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, entonces*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Definición 1.1.2 (continuidad)**.** *Dado un campo vectorial $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y un punto $\boldsymbol{x}_0 \in U$ en su dominio, diremos que $\boldsymbol{F}$ es **continua en $\boldsymbol{x}_0$** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|| < \delta \text{ y } \boldsymbol{x} \in U \Longrightarrow ||\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)|| < \varepsilon.$$

En otras palabras, si queremos acercarnos a $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)$ a una distancia menor que un $\varepsilon > 0$ fijo, formando una bola abierta $B(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$, entonces podemos acercarnos a $\boldsymbol{x}_0$ dentro de alguna bola abierta $B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ tal que $\boldsymbol{F}(B(\boldsymbol{x}_0, \delta) \cap U) \subseteq B(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$.

Usando la notación de límites, tenemos que $\boldsymbol{F}$ es continua en $\boldsymbol{x}_0$ si

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0).$$

*Finalmente, diremos que $\boldsymbol{F}$ es **continua en U** si es continua en todo punto de U.*

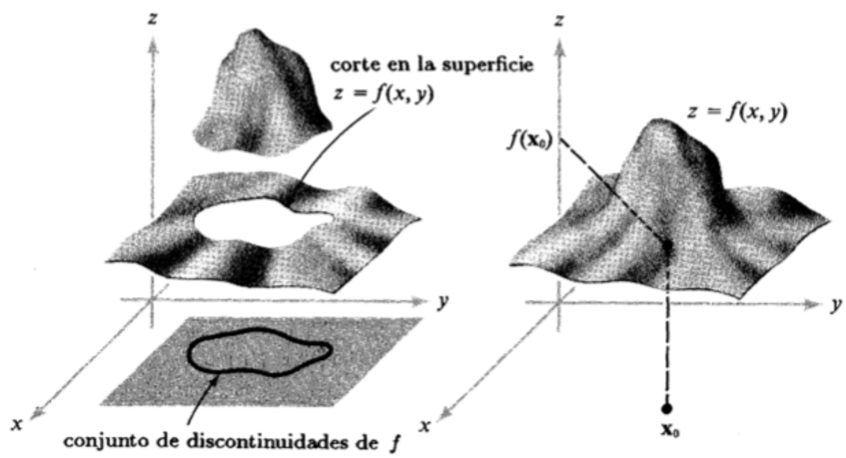

Figura 1.1: Para campos escalares de dos variables, hablamos intuitivamente de continuidad cuando su gráfica representa una superficie en $\mathbb{R}^3$ sin hoyos ni cortes.

`(Imagen tomada de Cálculo Vectorial - Marsden & Tromba)`

Observación 1.1.3. *El símbolo $||-||$ que aparece en la definición anterior corresponde a la norma 2 de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, según sea el caso. No se especifica esto en la notación para no sobrecargarla.*

Teorema 1.1.4 (propiedades sobre límites). *Las siguientes propiedades se cumplen para campos escalares y vectoriales:*

1. *Un campo vectorial $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_m) \colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continuo en $\boldsymbol{x}_0 \in U$ si, y solo si, cada campo escalar $F_k \colon U \to \mathbb{R}$ es continuo en $\boldsymbol{x}_0$.*

2. ***Homogeneidad:** Si $\boldsymbol{F} \colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continuo en $\boldsymbol{x}_0 \in U$, entonces $\lambda\boldsymbol{F}$ es continuo en $\boldsymbol{x}_0$ para todo escalar real $\lambda \in \mathbb{R}$.*

3. ***Aditividad:** Si $\boldsymbol{F} \colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{G} \colon V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son continuos en $\boldsymbol{x}_0 \in U \cap V$[1], entonces $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$ es continuo en $\boldsymbol{x}_0$.*

4. ***Propiedad para el producto:** Si $\boldsymbol{F} \colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{G} \colon V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son campos escalares continuos en $\boldsymbol{x}_0 \in U \cap V$, entonces $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}$ es continuo en $\boldsymbol{x}_0$.*

[1]Se asume que $U \cap V$ contiene una bola abierta de $\boldsymbol{x_0}$.

5. ***Propiedad para el cociente:*** *Si* $\boldsymbol{F}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $\boldsymbol{G}: V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *son campos escalares continuos en* $\boldsymbol{x}_0 \in U \cap V$ *y* $\boldsymbol{G}$ *es diferente de cero en un entorno de* $\boldsymbol{x}_0$*, entonces* $\boldsymbol{F}/\boldsymbol{G}$ *es continuo en* $\boldsymbol{x}_0$*.*

6. ***Propiedad para la composición:*** *Si* $\boldsymbol{F}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $\boldsymbol{G}: V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *son campos vectoriales tales que* $\boldsymbol{F}$ *es continuo en* $\boldsymbol{x}_0 \in U$*,* V *contiene a la imagen de* $\boldsymbol{F}$*, y* $\boldsymbol{G}$ *es continuo en* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0})$*, entonces* $\boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{F}$ *es continuo en* $\boldsymbol{x}_0$*.*

1.2 Derivadas parciales y direccionales

Cuando estudiamos el análogo de derivadas para funciones de varias variables, nos encontramos con varios problemas a la hora de hallar un concepto adecuado. Se empieza estudiando los conceptos de derivadas parciales y direccionales, para luego presentar la noción de diferenciabilidad. Esta última es el análogo apropiado en varias variables a las funciones derivables de una variable. Por apropiado nos referimos a que la mayoría de las propiedades de derivabilidad se transfieren a la generalización de diferenciabilidad. Por ejemplo, todo campo escalar diferenciable en un punto va a ser continuo en dicho punto. Pero por otro lado, el hecho de que existan las derivadas direccionales de un campo escalar en un punto no implica que el campo sea continuo el tal punto. A pesar de esto, entender los conceptos de derivadas parciales y direccionales en fundamental para asimilar el de diferenciabilidad. Hagamos a continuación un recordatorio de estas nociones y de las relaciones más importantes que hay entre ellos.

Definición 1.2.1 (derivadas parciales)**.** *Sea* $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar y* $\boldsymbol{x_0} = (x_0^1, \ldots, x_0^n) \in U$*. Si para* $1 \leq i \leq n$ *existe el límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_0^1, \ldots, x_0^n)}{h},$$

entonces al mismo se le conoce como la ***i-ésima derivada parcial de*** $\boldsymbol{f}$ ***en*** $\boldsymbol{x}_0$*, y es denotado como* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x_0})$*.*

Un concepto un poco más general que el anterior es el siguiente.

Definición 1.2.2 (derivadas direccionales)**.** *Sea* $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar,* $\boldsymbol{x_0} = (x_0^1, \ldots, x_0^n) \in U$ *y* $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ *un vector de dirección (es decir,* $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ *y* $v_1^2 + \cdots + v_n^2 = 1$*). Si existe el límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x_0} + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x_0})}{h},$$

entonces al mismo se le conoce como la ***derivada direccional de*** $\boldsymbol{f}$ ***en*** $\boldsymbol{x_0}$ ***y en dirección*** $\boldsymbol{v}$*, y se denota por* $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x_0})$*.*

1.3 Diferenciabilidad

Definición 1.3.1 (diferenciabilidad). *Sea $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial. Se dice que $\boldsymbol{F}$ es **diferenciable en $\boldsymbol{x_0}$** si existe una transformación lineal $T_{\boldsymbol{x_0}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lim_{\boldsymbol{\Delta x} \to \boldsymbol{0}} \frac{||\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Delta x} + \boldsymbol{x_0}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}) - T_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{\Delta x})||}{||\boldsymbol{\Delta x}||} = 0.$$

Equivalentemente, $\boldsymbol{F}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x_0}$ si existe una transformación lineal $T_{\boldsymbol{x_0}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y una campo vectorial $\boldsymbol{r}$ definido en un entorno de $\boldsymbol{x_0}$ y con valores en $\mathbb{R}^m$ tal que

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Delta x} + \boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}) + T_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{\Delta x}) + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Delta x})$$

y donde $\lim_{\boldsymbol{\Delta x} \to \boldsymbol{0}} \frac{||\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Delta x})||}{||\boldsymbol{\Delta x}||} = 0$.

Diremos que $\boldsymbol{F}$ es diferenciable en U cuando sea diferenciable en todo punto de U.

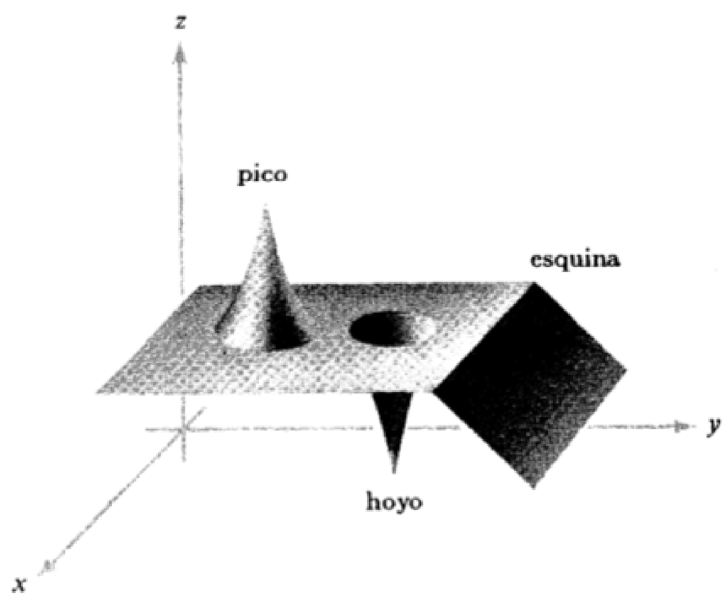

Figura 1.2: Para campos escalares de dos variables, hablamos intuitivamente de diferenciabilidad cuando su gráfica representa una superficie en $\mathbb{R}^3$ sin picos, hoyos y esquinas.
(Imagen tomada de Cálculo Vectorial - Marsden, & Tromba)

Observación 1.3.2. *Hacemos los siguientes comentarios sobre la definición anterior:*

1. *El símbolo $\boldsymbol{\Delta x}$ se define como $\boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} = (x_1 - x_0^1, \ldots, x_n - x_0^n)$, donde $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\boldsymbol{x_0} = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$, y se conoce como el **incremento de $\boldsymbol{x}$**.*

2. *La transformación lineal $T_{\boldsymbol{x_0}}$ es única, se le conoce como el **diferencial de $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{x_0}$** y se denota por $\boldsymbol{dF_{x_0}}$. La transformación $\boldsymbol{dF_{x_0}}$ está representada, en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y*

*$\mathbb{R}^m$, por la llamada **matriz Jacobiana de $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{x_0}$**, que se define de la siguiente manera al denotar $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_m)$:*

$$J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{n-1}}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_{n-1}}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0}) \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n-1}}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0}) \end{pmatrix}_{m \times n}$$

3. *Para el caso $m = 1$, $dF_{\boldsymbol{x_0}}$ está representada por el **gradiente de $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{x_0}$**, definido por*

$$\nabla F(\boldsymbol{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial F}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial F}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0}) \end{pmatrix}_{1 \times n}.$$

   La Jacobiana y el gradiente de un campo escalar en un punto son la misma matriz.

   Volviendo al campo vectorial $\boldsymbol{F}$ en 2., la Jacobiana de $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{x_0}$ también puede denotarse como

$$J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0}) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(\boldsymbol{x_0}) \\ \nabla F_2(\boldsymbol{x_0}) \\ \vdots \\ \nabla F_{m-1}(\boldsymbol{x_0}) \\ \nabla F_m(\boldsymbol{x_0}) \end{pmatrix}.$$

4. *Para campos escalares de dos variables $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ser diferenciable en $(x_0, y_0) \in U$ es equivalente a pedir que*

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\left| f((\Delta x, \Delta y) + (x_0, y_0)) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y \right|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Teorema 1.3.3 (propiedades de la diferenciabilidad)**.** *Las siguientes propiedades se cumplen para campos vectoriales y escalares:*

1. *Si $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_m)\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es un campo vectorial y $\boldsymbol{x_0} \in U$, entonces $\boldsymbol{F}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x_0}$ si, y solo si, cada campo escalar F_k es diferenciable en $\boldsymbol{x_0}$.*

2. ***Homogeneidad:** Si $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\boldsymbol{x_0} \in U$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \boldsymbol{F}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x_0}$. Además,*

$$\boldsymbol{d}(\lambda \boldsymbol{F})_{\boldsymbol{x_0}} = \lambda \boldsymbol{dF}_{\boldsymbol{x_0}} \qquad \text{y} \qquad J_{\lambda \boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0}) = \lambda J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0}).$$

3. ***Aditividad:*** *Si* $\boldsymbol{F}\colon U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *y* $\boldsymbol{G}\colon V\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *son diferenciables en* $\boldsymbol{x_0}\cap U\cap V$[2]*, entonces* $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}\colon U\cap V\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *es diferenciable en* $\boldsymbol{x_0}$*. Además,*

$$\boldsymbol{d(F{+}G)_{x_0}}=\boldsymbol{dF_{x_0}}+\boldsymbol{dG_{x_0}}\qquad y\qquad J_{\boldsymbol{F+G}}(\boldsymbol{x_0})=J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0})+J_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x_0}).$$

4. ***Regla del producto:*** *Si* $f\colon U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *y* $g\colon V\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *son diferenciables en* $\boldsymbol{x_0}\in U\cap V$*, entonces* $f\cdot g\colon U\cap V\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *es diferenciable en* $\boldsymbol{x_0}$*. Además,*

$$d(f\cdot g)_{\boldsymbol{x_0}}=g(\boldsymbol{x_0})df_{\boldsymbol{x_0}}+f(\boldsymbol{x_0})dg_{\boldsymbol{x_0}}\quad y\quad J_{f\cdot g}(\boldsymbol{x_0})=g(\boldsymbol{x_0})J_f(\boldsymbol{x_0})+f(\boldsymbol{x_0})J_g(\boldsymbol{x_0}).$$

5. ***Regla del cociente:*** *Si* $f\colon U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *y* $g\colon V\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *son diferenciables en* $\boldsymbol{x_0}\in U\cap V$*, y* g *es diferente de cero en* $U\cap V$*, entonces* $\frac{f}{g}\colon U\cap V\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *es diferenciable en* $\boldsymbol{x_0}m$*. Además,*

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_{\boldsymbol{x_0}}=\frac{g(\boldsymbol{x_0})df_{\boldsymbol{x_0}}-f(\boldsymbol{x_0})dg_{\boldsymbol{x_0}}}{(g(x_0))^2}\quad y\quad J_{\frac{f}{g}}(\boldsymbol{x_0})=\frac{g(\boldsymbol{x_0})J_f(\boldsymbol{x_0})-f(\boldsymbol{x_0})J_g(\boldsymbol{x_0})}{(g(\boldsymbol{x_0}))^2}.$$

6. ***Regla de la cadena:*** *Si* $\boldsymbol{F}\colon U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *es un campo vectorial diferenciable en* $\boldsymbol{x_0}\in U$*, y* $g\colon V\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ *(donde* V *contiene a la imagen de* $\boldsymbol{F}$*) es un campo escalar diferenciable en* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0})\in V$*, entonces* $g\circ\boldsymbol{F}\colon U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *es un campo escalar diferenciable en* $\boldsymbol{x_0}$*. Además,* $d(g\circ\boldsymbol{F})_{\boldsymbol{x_0}}$ *está representada por la matriz*

$$J_{g\circ\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0})=\nabla g(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}))\cdot J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x_0}).$$

Teorema 1.3.4 (propiedades de diferenciabilidad)**.** *Sea* $\boldsymbol{F}=(F_1,\ldots,F_m)\colon U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *un campo vectorial. Entonces, las siguientes propiedades se cumplen:*

1. *Si* $\boldsymbol{F}$ *es diferenciable en* $\boldsymbol{x_0}\in U$*, entonces* $\boldsymbol{F}$ *es continua en* $\boldsymbol{x_0}$*.*

2. *Si* $\boldsymbol{F}$ *es diferenciable en* $\boldsymbol{x_0}\in U$*, entonces* $\frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\boldsymbol{x_0})$ *existe para todo* $1\le k\le m$ *y* $1\le i\le n$*.*

3. ***Condición suficiente de diferenciabilidad:*** *Si las derivadas parciales* $\frac{\partial F_k}{\partial x_i}$ *existen y son continuas en una bola abierta centrada en* $\boldsymbol{x_0}$*, entonces* $\boldsymbol{F}$ *es diferenciable en* $\boldsymbol{x_0}$*.*

Ejemplo 1.3.5 (continuidad no implica diferenciabilidad)**.** *Consideremos el campo escalar* $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *dado por*

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Estamos claramente ante una función continua en su dominio, por ser una composición de funciones continuas. En particular, f *es continua en* $(0,0)$*. En cuando a la diferenciabilidad, sabemos del curso anterior de CDIVV que la gráfica de* f *es la de un cono, con punta en el origen* $(0,0,0)$ *y cuyo eje es el eje* Z *positivo. Tal gráfica presenta un pico en* $(0,0,0)$*, por lo que la superficie que representa en* $\mathbb{R}^3$ *no es "suave".*

[2]Se asume que $U\cap V$ contiene una bola abierta de $\boldsymbol{x_0}$.

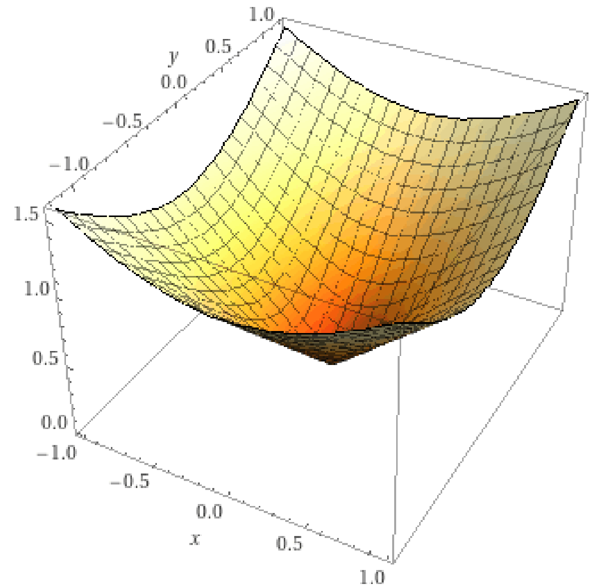

Figura 1.3: Gráfica de f. (Wolfram Alpha)

Podemos sospechar entonces que f no es diferenciable en $(0,0)$. Para probar esto formalmente, necesitamos ver si se pueden calcular las derivadas parciales de f en $(0,0)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+0}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}.$$

Como el límite anterior no existe (pues vale 1 o -1 dependiendo de si h tiende a 0 por la derecha o izquierda, respectivamente), tenemos que f no posee derivada parcial respecto a x en $(0,0)$. Por lo tanto, f no puede ser diferenciable, pues diferenciabilidad implica la existencia de las derivadas parciales según el teorema anterior.

Ejemplo 1.3.6 (continuidad y existencia de todas las derivadas direccionales no implica diferenciabilidad)**.** *Consideremos el campo escalar $g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dado por*

$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Esta función es continua en $(0,0)$, ya que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^3}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}=0=g(0,0).$$

Lo anterior se debe a que la función $(x,y)\mapsto y$ tiene límite 0 en $(0,0)$, y la función $(x,y)\mapsto\frac{y^2}{x^2+y^2}$ es acotada en una bola abierta reducida centrada en $(0,0)$.

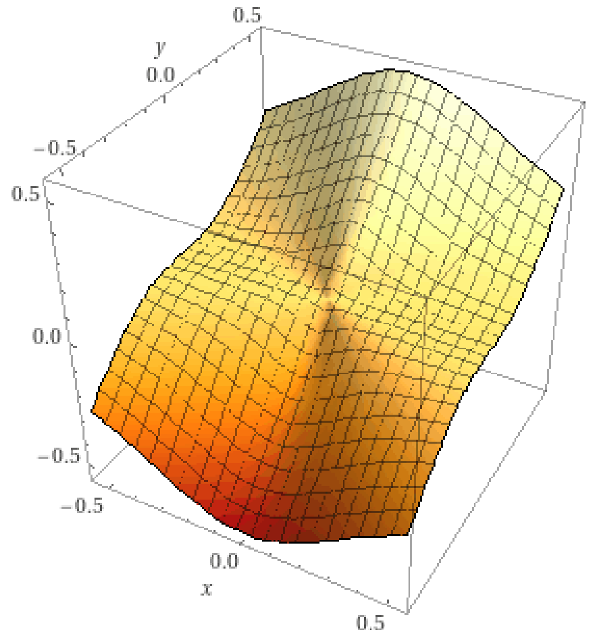

Figura 1.4: Gráfica de g. (Wolfram Alpha)

Ahora calculemos las derivadas direccionales en $(0,0)$. *Consideremos un vector de dirección* $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. *Tenemos:*

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g((0,0)+hv) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(hv_2)^3}{h^2v_1^2+h^2v_2^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3v_2^3}{h^3(v_1^2+v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3v_2^3}{h^3} = v_2^3.$$

Tenemos hasta ahora que g *es continua y con todas sus derivadas direccionales en* $(0,0)$. *Sin embargo,* g *no es diferenciable en* $(0,0)$. *Para ver esto, calculemos el límite*

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y) - g(0,0) - \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)\cdot x - \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\cdot y}{||(x,y)||}.$$

Tenga en cuenta que en este caso $(\Delta x, \Delta y) = (x,y)$. *Entonces,*

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{y^3}{x^2+y^2} - 0 - 0\cdot x - 1\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{y^3}{x^2+y^2} - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 - y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

El límite anterior no existe, porque se obtienen resultados distintos al calcularlos por los caminos $y = x$ *y* $x = 0$. *En conclusión, el límite* L *no es* 0 *(no siquiera existe), por lo que* g *no es diferenciable en* $(0,0)$.

Ejemplo 1.3.7 (existencia de las derivadas parciales no implica continuidad)**.** *Consideremos el campo escalar* $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$q(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esta función no es continua en $(0,0)$ *ya que no tiene límite en* $(0,0)$ *(tal límite da lugar a valores diferentes si se calcula por los caminos* $x = 0$ *y* $x = y$*). Por otro lado,* q *sí tiene derivadas parciales en* $(0,0)$*, y en este caso es fácil ver a partir de la definición que* $\frac{\partial q}{\partial x}(0,0) = 0$ *y* $\frac{\partial q}{\partial y}(0,0) = 0$*.*

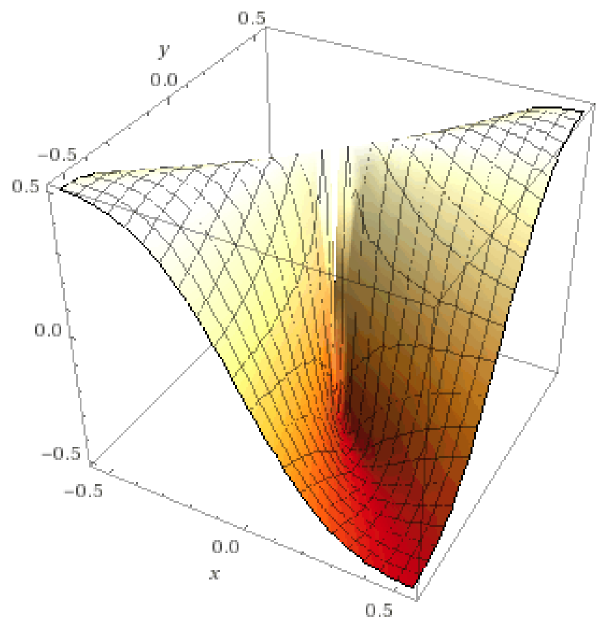

Figura 1.5: Gráfica de q. `(Wolfram Alpha)`

Ejemplo 1.3.8 (diferenciabilidad no implica la continuidad de las derivadas parciales)**.** *Consideremos el campo escalar* $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$s(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \textit{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Veamos que esta función es diferenciable en $(0,0)$ *a partir de la definición de diferenciabilidad. Para esto, necesitamos las derivadas parciales en* $(0,0)$*:*

$$\frac{\partial s}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{s(h,0) - s(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{|h|}\right) = 0.$$

De manera similar, $\frac{\partial s}{\partial y}(0,0) = 0$*. Entonces,*

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{s(x,y) - s(0,0) - \frac{\partial s}{\partial x}(0,0)\cdot x - \frac{\partial s}{\partial y}(0,0)\cdot y}{||(x,y)||} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0,$$

y así s es diferenciable en $(0,0)$.

Para el resto del ejemplo calculemos las derivadas parciales fuera de $(0,0)$. Por propiedades de la diferenciabilidad, s es diferenciable en todo punto distinto del origen, por lo que existen las parciales en $(x,y)\neq(0,0)$ y se calculan por las reglas usuales de derivación en una variable:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+y^2)\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)\\
&= 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{(-1)}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x\\
&= 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

De manera similar se puede calcular $\frac{\partial s}{\partial y}(x,y)$. Entonces,

$$\frac{\partial s}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \textit{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \textit{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
$$\frac{\partial s}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \textit{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \textit{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

La derivada parcial $\frac{\partial s}{\partial x}(x,y)$ no es continua en $(0,0)$, ya que $2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ tiene límite 0 en $(0,0)$ mientras que $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ no tiene límite en $(0,0)$. Para ver esto último, basta ver que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ no existe a lo largo de $y=0$.

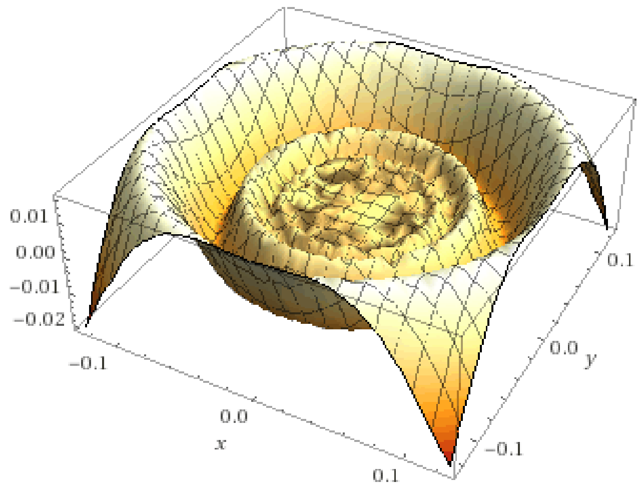

Figura 1.6: Gráfica de $s(x, y)$. `(Wolfram Alpha)`

Escrito en LaTeX por **Marco A. Pérez**.

Material consultado:
- Cálculo Vectorial, de Marsden y Tromba.

Última actualización: `19 de Agosto de 2020`.