CÁLCULO VECTORIAL

TEMA 11

INTEGRALES DE SUPERFICIE

Estas notas están dedicadas al estudio de las integrales de superficie, una generalización de las integrales dobles. Así como ocurre con las integrales de línea, las integrales de superficie se dividen para campos escalares y para campos vectoriales, y estas últimas dependerán de la orientación de la superficie.

11.1 Integrales de superficie de campos escalares

Empecemos presentando el concepto de integral de superficie para campos escalares, para luego explicar su motivación.

Definición 11.1.1. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie paramétrica con parametrización regular $\boldsymbol{X}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, y sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo con $\mathcal{S} \subseteq D$. Se define la* ***integral de superficie de f sobre $\boldsymbol{X}$*** *como*

$$\iint_{\boldsymbol{X}} f dS = \iint_U f(\boldsymbol{X}(u,v)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(u,v) \right\| dudv.$$

Si $\boldsymbol{X}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, entonces

$$\begin{aligned}
\iint_{\boldsymbol{X}} f dS &= \iint_U f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{\left| \begin{array}{ccc} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right|} dudv \\
&= \iint_U f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2} dudv.
\end{aligned}$$

Observación 11.1.2. *Si f es la función constantemente igual a 1, y $\boldsymbol{X}$ es inyectiva, entonces $\iint_{\boldsymbol{X}} 1dS = a(\mathcal{S})$.*

Vamos a explicar la motivación del concepto de integral de superficie para campos escalares. Para simplificar, supongamos que $\mathcal{S}$ tiene una parametrización regular $\boldsymbol{X}\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}^3$, y que f es una función positiva. La idea es pensar en $\iint_{\boldsymbol{X}} fdS$ como una especie de "volumen" comprendido entre $\mathcal{S}$ y f. Nótese que éste es precisamente el caso cuando $\mathcal{S}$ es un dominio en el plano $\mathbb{R}^2$, donde $\iint_{\mathcal{S}\subseteq\mathbb{R}^2} fdS = \iint_{\mathcal{S}} f(u,v)dudv$ es la integral doble estudiada en el curso de CDIVV.

Tomamos $a = u_0 < u_1 < \cdots < u_{n-1} < u_n = b$ una partición de $[a,b]$, y $c = v_0 < v_1 < \cdots < v_{m-1} < v_m = d$ una partición de $[c,d]$. Consideremos el rectángulo R_{ij} de lados Δu_i y Δv_j, que tiene área $a(R_{ij}) = \Delta u_i \Delta v_j$. Podemos formar el cuerpo geométrico de "base" $\boldsymbol{X}(R_{ij})$ y "altura" $f(\boldsymbol{X}(u_i', v_j'))$, para algún punto $(u_i', v_j') \in R_{ij}$, al que llamaremos V_{ij}. Entonces,

$$\operatorname{vol}(V_{ij}) = f(\boldsymbol{X}(u_i',v_j'))a(\boldsymbol{X}(R_{ij})) \approx f(\boldsymbol{X}(u_i',v_j'))\left|\left|\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial u}(u_i',v_j')\times\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial v}(u_i',v_j')\right|\right|\Delta u_i\Delta v_j.$$

Note que

$$\sum_{ij}\operatorname{vol}(V_{ij}) \approx \sum_{ij} f(\boldsymbol{X}(u_i',v_j'))\left|\left|\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial u}(u_i',v_j')\times\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial v}(u_i',v_j')\right|\right|\Delta u_i\Delta v_j$$

es una suma de Riemann de la función $f(\boldsymbol{X}(u,v))\left|\left|\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial v}(u,v)\right|\right|$, la cual es continua por ser f continua y $\boldsymbol{X}$ una parametrización regular. Entonces, $\lim_{n,m\to\infty}\sum_{ij}\operatorname{vol}(V_{ij})$ converge y

$$\iint_{\boldsymbol{X}} fdS = \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\sum_{ij}\operatorname{vol}(V_{ij}) = \iint_U f(\boldsymbol{X}(u,v))\left|\left|\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial v}(u,v)\right|\right|dudv.$$

Veamos ahora algunos ejemplos y aplicaciones físicas del concepto de integral de superficie para campos escalares.

Ejemplo 11.1.3.

1. *Calculemis la integral de superficie del campo $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+1}$ sobre el helicoide de radio 1 y altura 2π. Recordemos que esta superficie tiene parametrización $\boldsymbol{X}\colon[0,1]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ dada por $\boldsymbol{X}(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), \theta)$. Además,*

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{X}(r,\theta)) &= \sqrt{(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2+1} = \sqrt{r^2+1},\\ \left|\left|\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial r}(r,\theta)\times\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\theta}(r,\theta)\right|\right| &= ||(\sin(\theta),-\cos(\theta),r)|| = \sqrt{r^2+1}.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\iint_{\boldsymbol{X}} f dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\boldsymbol{X}(r,\theta)) \left|\left| \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial r}(r,\theta) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \theta}(r,\theta) \right|\right| dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2+1) dr d\theta$$
$$= 2\pi \int_0^1 (r^2+1)dr = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} + r \Big|_0^1 \right) = \frac{8}{3}\pi.$$

2. *Sea $\mathcal{S}$ la gráfica de la función $f(x,y) = x^2 + y$ con dominio $0 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$. Calculemos la integral de $g(x,y,z) = x$ sobre $\mathcal{S}$. Sabemos que $\boldsymbol{X}(x,y) = (x,y,x^2+y)$ es una parametrización de la gráfica de f. Además,*

$$g(\boldsymbol{X}(x,y)) = x,$$
$$\left|\left| \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial y}(x,y) \right|\right| = \left|\left| \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1 \right) \right|\right| = ||(-2x,1,1)|| = \sqrt{4x^2+2}.$$

Entonces,

$$\iint_{\boldsymbol{X}} g dS = \int_0^1 \int_{-1}^1 g(\boldsymbol{X}(x,y)) \left|\left| \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial y}(x,y) \right|\right| dy dx = \int_0^1 \int_{-1}^1 x\sqrt{4x^2+2} dy dx$$
$$= \int_0^1 2x\sqrt{4x^2+2}dx = \int_0^1 \sqrt{4u+2}du = \frac{1}{6}(4u+2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}(\sqrt{6^3} - \sqrt{2^3})$$
$$= \frac{1}{6}(6\sqrt{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right).$$

Ejemplo 11.1.4 (aplicaciones en física - centro de gravedad y momento de inercia)**.** *Sea $\mathcal{S}$ una superficie paramétrica, con parametrización regular $\boldsymbol{X}\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, y sea $f(x,y,z)$ la densidad de la partícula (x,y,z). La **masa** de la superficie $\mathcal{S}$ se calcula como*

$$m = \iint_{\boldsymbol{X}} f dS.$$

*Por otro lado, el **centro de gravedad** de $\mathcal{S}$ es el punto $(x_{\text{cg}}, y_{\text{cg}}, z_{\text{cg}})$ con coordenadas:*

$$x_{\text{cg}} = \frac{1}{m}\iint_{\boldsymbol{X}} x f(x,y,z)dS, \quad y_{\text{cg}} = \frac{1}{m}\iint_{\boldsymbol{X}} y f(x,y,z)dS \quad y \quad z_{\text{cg}} = \frac{1}{m}\iint_{\boldsymbol{X}} z f(x,y,z)dS.$$

*Recordemos que $(x_{\text{cg}}, y_{\text{cg}}, z_{\text{cg}})$ es un punto imaginario donde se aplica la resultante de todas las fuerzas de gravedad que actúan sobre las partículas de material que conforman $\mathcal{S}$. Más aún, el **momento de inercia** de $\mathcal{S}$ alrededor de un eje L, se puede definir como la integral de superficie*

$$I_L = \iint_{\boldsymbol{X}} d^2(x,y,z) f(x,y,z) dS$$

donde $d(x,y,z)$ mide la distancia de $(x,y,z) \in \mathcal{S}$ a L.

Calculemos por ejemplo el centro de gravedad del hemisferio norte de la esfera unitaria S^2, con densidad constante $f(x,y,z) = c$ para todo $(x,y,z) \in \mathcal{S}$. Esta superficie tiene por parametrización $\boldsymbol{X}\colon [0,2\pi] \times [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\boldsymbol{X}(u,v) = (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v))$. Luego, tenemos que la masa del hemisferio norte es

$$\begin{aligned}
m = \iint_{\boldsymbol{X}} c dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} c \left|\left| \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(u,v) \right|\right| dudv \\
&= c \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} ||(\cos(u)\sin^2(v), \sin(u)\sin^2(v), \cos(v)\sin(v))|| dudv \\
&= c \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin(v) dudv = 2\pi c \int_0^{\pi/2} \sin(v) dv = 2\pi c (-\cos(v)_0^{\frac{\pi}{2}}) = 2\pi c.
\end{aligned}$$

Entonces, las coordenadas del centro de gravedad son:

$$\begin{aligned}
x_{\mathrm{cg}} &= \frac{1}{m} \iint_{\boldsymbol{X}} cx dS = \frac{1}{m} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} c \cos(u)\sin^2(v) dudv = \frac{c}{m} \int_0^{\pi/2} \sin^2(v) \left(\int_0^{2\pi} \cos(u) du \right) dv = 0, \\
y_{\mathrm{cg}} &= \frac{1}{m} \iint_{\boldsymbol{X}} cy dS = \frac{1}{m} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} c \sin(u)\sin^2(v) dudv = \frac{c}{m} \int_0^{\pi/2} \sin^2(v) \left(\int_0^{2\pi} \sin(u) du \right) dv = 0.
\end{aligned}$$

Nótese que tiene sentido que $x_{\mathrm{cg}} = 0$ e $y_{\mathrm{cg}} = 0$, debido a la simetría del hemisferio norte de la esfera respecto al eje Z. Finalmente,

$$\begin{aligned}
z_{\mathrm{cg}} &= \frac{1}{m} \iint_{\boldsymbol{X}} cz dS = \frac{1}{m} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} c \cos(v)\sin(v) dudv = \frac{c}{2m} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin(2v) dudv \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2v) dv = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos(2v)}{2} \bigg|_0^{\pi/2} \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Así como ha ocurrido con los conceptos de integral que hemos estudiado previamente, tenemos las siguientes propiedades de la integral de superficie para campos escalares, que se heredan de las propiedades de la integral doble. Las demostraciones las dejamos como ejercicios para el lector.

Proposición 11.1.5 (propiedades de la integral de superficie para campos escalares)**.** *Sea $\mathcal{S}$ una superficie paramétrica con parametrización regular $\boldsymbol{X}\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. ***Linealidad:*** *Si f y g son dos campos escalares continuos sobre dominios que contienen a $\mathcal{S}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\iint_{\boldsymbol{X}} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_{\boldsymbol{X}} f dS + \beta \iint_{\boldsymbol{X}} g dS.$$

2. ***Monotonía:*** *Si f y g son dos campos escalares continuos sobre dominios que contienen a $\mathcal{S}$, y si se verifica que $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in \mathcal{S}$, entonces*

$$\iint_{\boldsymbol{X}} f dS \leq \iint_{\boldsymbol{X}} g dS.$$

3. ***Aditividad respecto al dominio de integración:*** *Si $\mathcal{S}$ es la unión de dos superficies paramétricas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, es decir $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, y tales que $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ se intersecan como mucho en sus bordes, entonces*

$$\iint_{\boldsymbol{X}} f dS = \iint_{\boldsymbol{X_1}} f dS + \iint_{\boldsymbol{X_2}} f dS,$$

donde $\boldsymbol{X_1}$ y $\boldsymbol{X_2}$ son parametrizaciones de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, respectivamente.

4. *Si f es un campo escalar continuo en un dominio que contiene a $\mathcal{S}$, y si f está acotado sobre $\mathcal{S}$, es decir, que existe $M > 0$ tal que $|f(x,y,z)| \leq M$ para todo $(x,y,z) \in \mathcal{S}$, entonces*

$$\left| \iint_{\boldsymbol{X}} f dS \right| \leq M \cdot a(\mathcal{S}).$$

La propiedad más complicada de probar la hemos dejado para el final. Se trata de demostrar que la integral de superficie no depende de la parametrización escogida. Esto es el análogo de la propiedad vista para integrales de línea de campos escalares, que no dependen de la parametrización de la curva. Antes de enunciar esta propiedad, primero hace falta entender cómo se pueden relacionar dos parametrizaciones de una misma superficie.

Definición 11.1.6. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie paramétrica que admite dos parametrizaciones regulares e inyectivas $\boldsymbol{X} \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{Y} \colon V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Si existe una biyección $h \colon V \to U$ de clase C^1 tal que*

$$\boldsymbol{Y}(s,t) = \boldsymbol{X}(h(s,t))$$

*para todo $(s,t) \in V$, entonces diremos que $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ son **regularmente equivalentes**. A la biyección h la llamaremos **cambio de coordenadas**.*

Ejemplo 11.1.7. *Consideremos nuevamente el hemisferio norte de S^2, del cual conocemos dos parametrizaciones $\boldsymbol{X} \colon U = [0, 2\pi] \times [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{Y} \colon V = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}^3$, dadas por*

$$\boldsymbol{X}(u,v) = (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)) \qquad e \qquad \boldsymbol{Y}(s,t) = (s, t, \sqrt{1 - s^2 - t^2}).$$

Veamos que $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son equivalentes. Debemos hallar un cambio de coordenadas $h \colon V \to U$ tal que $\boldsymbol{Y}(s,t) = \boldsymbol{X}(u,v)$, donde $(u,v) = h(s,t)$. Primero, la idea es despejar u y v en función de s y t en el sistema dado por la igualdad $\boldsymbol{Y}(s,t) = \boldsymbol{X}(u,v)$:

$$\begin{cases} s = \cos(u)\sin(v), \\ t = \sin(u)\sin(v), \\ \sqrt{1-s^2-t^2} = \cos(v). \end{cases}$$

Despejando, tenemos que

$$u = \arccos\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\right) \qquad \text{y} \qquad v = \arcsin(\sqrt{s^2+t^2}),$$

para $0 \leq u \leq \pi$ *(el caso* $\pi < u \leq 2\pi$ *es análogo). Luego,*

$$h(s,t) = \left(\arccos\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\right), \arcsin(\sqrt{s^2+t^2})\right),$$

la cual es una función de clase C^1 *biyectiva.*

Lema 11.1.8. *Sean* $\boldsymbol{X}\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *e* $\boldsymbol{Y}\colon V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dos parametrizaciones regulares de* $\mathcal{S}$ *que son regularmente equivalentes, con cambio de coordenadas* $h\colon V \to U$*. Entonces,*

$$\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t}(s,t) = \det(J_h(s,t))\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(h(s,t)) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(h(s,t))\right).$$

Demostración: Por hipótesis, tenemos que $\boldsymbol{Y}(s,t) = \boldsymbol{X}(h(s,t))$. Escribamos $h(s,t) = (h_1(s,t), h_2(s,t))$. Luego, por la regla de la cadena, nos queda

$$\begin{aligned}
J_{\boldsymbol{Y}}(s,t) &= J_{\boldsymbol{X}}(h(s,t)) \cdot J_h(s,t) \\
\begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(h(s,t)) & \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(h(s,t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial h_1}{\partial t}(s,t) \\ \frac{\partial h_2}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial h_2}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix} \\
\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial s}(s,t) &= \frac{\partial h_1}{\partial s}(s,t)\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(h(s,t)) + \frac{\partial h_2}{\partial s}(s,t)\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(h(s,t)), \\
\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t}(s,t) &= \frac{\partial h_1}{\partial t}(s,t)\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(h(s,t)) + \frac{\partial h_2}{\partial t}(s,t)\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(h(s,t)).
\end{aligned}$$

Ahora, calculamos el producto vectorial $\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t}(s,t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t}(s,t) &= \left(\frac{\partial h_1}{\partial s}(s,t)\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(h(s,t)) + \frac{\partial h_2}{\partial s}(s,t)\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(h(s,t))\right) \times \left(\frac{\partial h_1}{\partial t}(s,t)\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(h(s,t)) + \frac{\partial h_2}{\partial t}(s,t)\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(h(s,t))\right) \\
&= \frac{\partial h_1}{\partial s}(s,t)\frac{\partial h_2}{\partial t}(s,t)\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(h(s,t)) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(h(s,t))\right) - \frac{\partial h_1}{\partial t}(s,t)\frac{\partial h_2}{\partial s}(s,t)\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(h(s,t)) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(h(s,t))\right) \\
&= \left(\frac{\partial h_1}{\partial s}(s,t)\frac{\partial h_2}{\partial t}(s,t) - \frac{\partial h_1}{\partial t}(s,t)\frac{\partial h_2}{\partial s}(s,t)\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(h(s,t)) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(h(s,t))\right) \\
&= \det(J_h(s,t))\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(h(s,t)) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(h(s,t))\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 11.1.9 (cambio de coordenadas)**.** *Sean $\boldsymbol{X}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{Y}: V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones regulares de $\mathcal{S}$ que son regularmente equivalentes, con cambio de coordenadas $h: V \to U$. Entonces, para todo campo escalar continuo $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $\mathcal{S} \subseteq D$ se tiene que:*

$$\iint_{\boldsymbol{X}} f dS = \iint_{\boldsymbol{Y}} f dS.$$

Es decir, que la integral de superficie de f sobre $\mathcal{S}$ no depende de la parametrización escogida para $\mathcal{S}$, por lo que de ahora en adelante podemos denotarla por $\iint_{\mathcal{S}} f dS$.

Demostración: Se sigue del lema anterior y de aplicar el teorema de cambio de variables para integrales dobles. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\iint_{\boldsymbol{Y}} f dS &= \iint_V f(\boldsymbol{Y}(s,t)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t}(s,t) \right\| dsdt \\
&= \iint_V f(\boldsymbol{X}(h(s,t))) \left\| \det(J_h(s,t)) \left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(h(s,t)) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(h(s,t)) \right) \right\| dsdt \\
&= \iint_V f(\boldsymbol{X}(h(s,t))) \left\| \left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(h(s,t)) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(h(s,t)) \right) \right\| |\det(J_h(s,t))| dsdt \\
&= \iint_U f(\boldsymbol{X}(u,v)) \left\| \left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(u,v) \right) \right\| dudv \\
&= \iint_{\boldsymbol{X}} f dS.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 11.1.10. *Considere el cálculo de masa hecho en el Ejemplo 11.1.4. Hagamos lo mismo con la parametrización $\boldsymbol{Y}(s,t) = (s, t, \sqrt{1 - s^2 - t^2})$ del Ejemplo 11.1.7:*

$$\begin{aligned}
\iint_{\boldsymbol{Y}} f dS = \iint_V c \left\| \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t} \right\| dsdt &= c \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} \left\| \left(\frac{s}{\sqrt{1 - s^2 - t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1 - s^2 - t^2}}, -1 \right) \right\| dsdt \\
&= c \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - s^2 - t^2}} dsdt.
\end{aligned}$$

La integral anterior se puede calcular mediante el cambio de variables $s = r\cos(\theta)$ y $t = r\sin(\theta)$, con determinante Jacobiano igual a r. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - s^2 - t^2}} dsdt &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} r d\theta dr = -\pi \int_0^1 \frac{-2r}{\sqrt{1 - r^2}} dr \\
&= -2\pi \int_1^0 \frac{1}{2\sqrt{p}} dp = 2\pi \sqrt{p}\Big|_0^1 = 2\pi.
\end{aligned}$$

Nos queda así

$$\iint_{\boldsymbol{Y}} f dS = 2\pi c.$$

Como $\iint_{\mathcal{S}} f dS$ *no depende de la parametrización escogida, viendo el cálculo anterior, resulta más fácil escoger* $\boldsymbol{X}$ *en lugar de* $\boldsymbol{Y}$ *para calcular* $\iint_{\mathcal{S}} f dS$*. Sin embargo, al escoger una parametrización más "difícil" para trabajar, la complicación se resolvió con el teorema de cambio de variables para integrales dobles, es decir, con el núcleo de la demostración del teorema anterior.*

11.2 Integrales de superficie de campos vectoriales

en esta sección estudiaremos el segundo tipo de integral de superficie, a saber, las que se definen para campos vectoriales.

Definición 11.2.1. *Sea* $\mathcal{S}$ *una superficie paramétrica con parametrización regular* $\boldsymbol{X}\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*, y* $\boldsymbol{F}\colon D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un campo vectorial continuo con* $\mathcal{S} \subseteq D$*. Se define la* ***integral de F sobre X*** *como*

$$\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot dS = \iint_U \left\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(u,v)), \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(u,v) \right\rangle dudv.$$

Observación 11.2.2. *Para este tipo de integrales no conviene usar una notación del tipo* $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot dS$*, ya que, como veremos más adelante,* $\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot dS$ *sí depende de la parametrización* $\boldsymbol{X}$*.*

Antes de hacer algunos ejemplo y demostrar propiedades, trabajemos un poco con la notación de $\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot dS$. Si $\boldsymbol{X}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(u,v) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right), \\
\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(u,v) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right), \\
\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right), \\
\left\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(u,v)), \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(u,v) \right\rangle &= \left\langle (F_1, F_2, F_3), \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) \right\rangle \\
&= F_1\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + F_2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) + F_3\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) \\
\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot dS &= \iint_U \left[F_1\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + F_2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) + F_3\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right] dudv \\
&= \iint_U F_1\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right) dudv + \iint_U F_2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) dudv \\
&\quad + \iint_U F_3\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) dudv.
\end{aligned}$$

A los sumandos de la expresión anterior se les da algunas veces la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
\iint_{\boldsymbol{X}} F_1 dy \times dz &= \iint_U F_1 \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} \right) dudv,\\
\iint_{\boldsymbol{X}} F_2 dz \times dx &= \iint_U F_2 \left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \right) dudv,\\
\iint_{\boldsymbol{X}} F_3 dx \times dy &= \iint_U F_3 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right) dudv.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot dS = \iint_{\boldsymbol{X}} F_1 dy \times dz + \iint_{\boldsymbol{X}} F_2 dz \times dx + \iint_{\boldsymbol{X}} F_3 dx \times dy.$$

Ejemplo 11.2.3. *Para el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$, calculemos las integrales $\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot dS$ y $\iint_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{F} \cdot dS$ para los campos*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}(x, u) &= (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)),\\
\boldsymbol{Y}(s, t) &= (s, t, \sqrt{1 - s^2 - t^2}),
\end{aligned}$$

del hemisferio norte de S^2. Tenemos entonces,

$$\begin{aligned}
\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot dS &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \langle (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), 0), (\cos(u)\sin^2(v), \sin(u)\sin^2(v), \cos(v)\sin(v)) \rangle dudv\\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} (\cos^2(u)\sin^3(v) + \sin^2(u)\sin^3(v)) dudv = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin^3(v) dudv\\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3(v) dv = \frac{\pi}{6}(\cos(3v) - 9\cos(v))|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}\pi,\\
\iint_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{F} \cdot dS &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} \left\langle (s, t, 0), \left(\frac{s}{\sqrt{1 - s^2 - t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1 - s^2 - t^2}}, -1 \right) \right\rangle dsdt\\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} \frac{s^2 + t^2}{\sqrt{1 - s^2 - t^2}} dsdt = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{r^3}{\sqrt{1 - r^2}} d\theta dr = 2\pi \int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1 - r^2}} dr\\
&= \pi \int_0^1 \frac{1 - u}{\sqrt{u}} du = \pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du - \pi \int_0^1 \sqrt{u} du = 2\pi\sqrt{u}|_0^1 - \frac{2}{3}\pi\sqrt{u^3}|_0^1 = 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi.
\end{aligned}$$

En este caso tenemos que $\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot dS = \iint_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{F} \cdot dS$. Esto se da porque tanto $\boldsymbol{X}$ como $\boldsymbol{Y}$ preservan la orientación. Cuando tenemos parametrizaciones con orientaciones contrarias, se produce un cambio de signo en la integral, como probaremos más adelante.

Ejemplo 11.2.4 (interpretación física). *Supongamos que se estudia un fluido pasando por una superficie $\mathcal{S}$, del cual se conoce que tiene velocidad estacionaria. Es decir, cada partícula (x, y, z) del fluido tiene velocidad $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ que depende únicamente de su posición. Se conoce además la densidad $\rho(x, y, z)$ del fluido en cada punto (x, y, z). Entonces, si $\boldsymbol{X}$ es una parametrización regular de $\mathcal{S}$, la integral*

$$\iint_{\boldsymbol{X}} \rho \boldsymbol{V} \cdot dS$$

representa la masa del fluido que pasa a través de $\mathcal{S}$ por unidad de tiempo, y en dirección del vector campo normal $\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v} / \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}\right|\right|$.

En la interpretación anterior, tenga en cuenta que es importante que $\mathcal{S}$ sea orientable para poder hablar de la dirección de $\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v} / \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}\right|\right|$. En términos más generales, las integrales de un campo vectorial sobre una superficie orientable se conocen como flujos.

Definición 11.2.5. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie paramétrica orientable, con parametrización $\boldsymbol{X} \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ regular e inyectiva, que preserva orientación. Si $\boldsymbol{F} \colon D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo con $\mathcal{S} \subseteq D$, la integral*

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot dS = \iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot dS$$

*se conoce como **flujo de $\boldsymbol{F}$ sobre $\mathcal{S}$**.*

Teorema 11.2.6. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie paramétrica orientable y sean $\boldsymbol{X} \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{Y} \colon V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones de $\mathcal{S}$ (regulares e inyectivas), que son regularmente equivalentes, y sea $\boldsymbol{F} \colon D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo donde $\mathcal{S} \subseteq D$. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. *Si $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ preservan la orientación, entonces*

$$\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot dS = \iint_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{F} \cdot dS.$$

2. *Si $\boldsymbol{X}$ preserva la orientación e $\boldsymbol{Y}$ la revierte, entonces*

$$\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot dS = -\iint_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{F} \cdot dS.$$

Demostración: Probaremos únicamente 2., ya que 1. es similar. Sea $\boldsymbol{N} \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ la orientación dada para $\mathcal{S}$. Como $\boldsymbol{X}$ preserva la orientación, tenemos que

$$\frac{\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(u, v)}{\left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(u, v)\right|\right|} = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{X}(u, v)),$$

para todo $(u, v) \in U$. Por otro lado, como $\boldsymbol{Y}$ revierte la orientación, tenemos que

$$\frac{\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t}(s,t)}{\left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t}(s,t)\right|\right|} = -\boldsymbol{N}(\boldsymbol{Y}(s,t)),$$

para todo $(s, t) \in V$. Con esta información, procedemos al cálculo de $\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot dS$:

$$\begin{aligned}
\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot dS &= \iint_U \left\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(u,v)), \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(u,v) \right\rangle dudv \\
&= \iint_U \left\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(u,v)), \left|\left| \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(u,v) \right|\right| \boldsymbol{N}(\boldsymbol{X}(u,v)) \right\rangle dudv \\
&= \iint_U \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(u,v)), \boldsymbol{N}(\boldsymbol{X}(u,v)) \rangle \left|\left| \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(u,v) \right|\right| dudv.
\end{aligned}$$

Ahora, usando el Teorema 11.1.9 para el campo escalar $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{N} \rangle$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot dS &= \iint_U \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(u,v)), \boldsymbol{N}(\boldsymbol{X}(u,v)) \rangle \left|\left| \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}(u,v) \right|\right| dudv \\
&= \iint_V \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}(s,t)), \boldsymbol{N}(\boldsymbol{Y}(s,t)) \rangle \left|\left| \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t}(s,t) \right|\right| dsdt \\
&= \iint_V \left\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}(s,t)), -\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t}(s,t) \right\rangle dsdt \\
&= -\iint_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{F} \cdot dS.
\end{aligned}$$

□

Gracias al teorema anterior, cuando escribimos $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot dS$ nos referimos a que la integral se calcula respecto a cualquier orientación que preserve orientación.

Enunciemos las siguientes propiedades básicas de las integrales de superficie para campos vectoriales (que se heredan de la integral doble). Las demostraciones se le dejan al lector como ejercicio.

Proposición 11.2.7 (propiedades de la integral de superficie para campos vectoriales)**.** *Sea $\mathcal{S}$ una superficie paramétrica orientable. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. ***Linealidad:*** *Si $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ con campos vectoriales continuos cuyos dominios contienen a $\mathcal{S}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\iint_{\mathcal{S}} (\alpha \boldsymbol{F} + \beta \boldsymbol{G}) \cdot dS = \alpha \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot dS + \beta \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{G} \cdot dS.$$

2. ***Aditividad respecto al dominio de integración:*** *Si $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, donde $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ se intersecan como mucho en sus bordes, entonces*

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot dS = \iint_{\mathcal{S}_1} \boldsymbol{F} \cdot dS + \iint_{\mathcal{S}_2} \boldsymbol{F} \cdot dS,$$

para todo campo vectorial continuo cuyo dominio contiene a $\mathcal{S}$.

3. *Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial continuo cuyo dominio contiene a $\mathcal{S}$, y si $\boldsymbol{F}$ está acotado sobre $\mathcal{S}$ con cota $M > 0$, entonces*

$$\left| \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot dS \right| \leq M \cdot a(\mathcal{S}).$$

Escrito en LaTeX por **Marco A. Pérez**.

Material consultado:
- Cálculo Vectorial, de Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba.
- Calculus Vol. 2, de Tom Apostol.
- Cálculo Vectorial, notas de A. González.

Última actualización: 04 de Noviembre de 2020.