

Recordamos del curso de CDI1V que, dada una función continua y positiva $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, la integral definida $\int_a^b f$ representa geoméricamente el área comprendida entre la gráfica de f y el eje X , a lo largo del intervalo $[a, b]$. Imaginemos por un momento que la región anterior, llamémosla R , está dibujada sobre un papel. Si recortamos a R a lo largo de su silueta, para sacarla de la hoja, y luego tomamos la región recortada y deformamos su base, es decir, el segmento que corresponde al intervalo $[a, b]$, entonces la figura plana se va a deformar en una superficie no plana, llamémosla R' . Esta superficie deformada tiene la misma área que R . Por otro lado, el segmento de intervalo deformado puede verse como una curva en \mathbb{R}^3 . Esto hace preguntarnos lo siguiente: ¿será que podemos calcular el área de R' a partir únicamente de la información de la curva base asociada al intervalo $[a, b]$, sin saber que R' se obtiene de recortar a R ? Responder esta pregunta involucra definir un nuevo tipo de integral (o quizás no tan nuevo), conocido como *integral de línea*.

7.1 Integrales de línea de campos escalares

Supongamos que tenemos una curva \mathcal{C} con parametrización regular $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, junto con un campo escalar continuo y positivo $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que U contiene a $\alpha([a, b])$. La intersección de la gráfica de f con el cilindro cuya base es $\alpha([a, b])$, da lugar a una curva en \mathbb{R}^3 . Supongamos que queremos calcular el área de la superficie comprendida entre esta curva y la curva \mathcal{C} , es decir, el área del cilindro en \mathbb{R}^3 dado por

$$\text{Cyl}(\mathcal{C}, f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) = \alpha(t) \text{ con } a \leq t \leq b \text{ y } 0 \leq z \leq f(\alpha(t))\}.$$

Algo que podemos hacer para resolver este problema es replicar el proceso de tomar sumas de Riemann usado en las integrales definidas. Tomamos una partición

$$P = \{t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$$

con $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. Esta partición da lugar a que la curva \mathcal{C} se divida en varios trozos, cada uno parametrizado sobre $[t_{i-1}, t_i]$. Consideremos el segmento de recta $\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})$. Por el teorema del valor medio para campos vectoriales $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, existe $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que $\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \leq \|\alpha'(c_i)\|(t_i - t_{i-1})$. Luego, para t_{i-1} y t_i suficientemente cercanos, podemos hacer la aproximación $\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \approx \|\alpha'(c_i)\|(t_i - t_{i-1})$. Formemos ahora el rectángulo R_i con base $\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})$ y altura $f(\alpha(c_i))$. El área de dicho rectángulo, es decir,

$$a(R_i) = f(\alpha(c_i))\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|,$$

aproxima al área del cilindro

$$\text{Cyl}_i(\mathcal{C}, f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) = \alpha(t) \text{ con } t_{i-1} \leq t \leq t_i \text{ y } 0 \leq z \leq f(\alpha(t))\}.$$

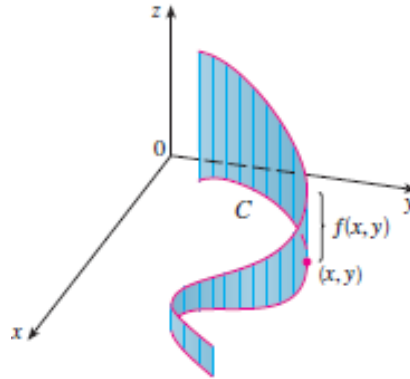


Figura 7.1: $\text{Cyl}(\mathcal{C}, f)$ (Imagen tomada de brilliant.org)

A medida de que la norma de la partición tiende a cero, el área $a(R_i)$ se aproxima a $a(\text{Cyl}_i(\mathcal{C}, f))$, de donde

$$\sum_{i=1}^n a(R_i) \approx \sum_{i=1}^n a(\text{Cyl}_i(\mathcal{C}, f)) = a(\text{Cyl}(\mathcal{C}, f)),$$

es decir,

$$a(\text{Cyl}(\mathcal{C}, f)) \approx \sum_{i=1}^n f(\alpha(c_i))\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \approx \sum_{i=1}^n f(\alpha(c_i))\|\alpha'(c_i)\|(t_i - t_{i-1})$$

La suma de la derecha es una suma de Riemman de la función $f(\boldsymbol{\alpha}(t))\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|$ (la cual es continua), por lo que, si tomamos $n \rightarrow +\infty$ en la aproximación anterior, nos va a quedar

$$a(\text{Cyl}(\mathcal{C}, f)) = \int_a^b f(\boldsymbol{\alpha}(t))\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|dt.$$

Este procedimiento se puede llevar a curvas en \mathbb{R}^3 y a campos escalares de tres variables no necesariamente positivos. Se tiene así la siguiente definición.

Definición 7.1.1. Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo y \mathcal{C} una curva contenida en U , con parametrización $\boldsymbol{\alpha}: [a, b] \rightarrow U$ de clase C^1 e inyectiva en $[a, b]$. Se define **la integral de línea de f a lo largo de \mathcal{C}** como

$$\int_{\mathcal{C}} f d\boldsymbol{\alpha} = \int_a^b f(\boldsymbol{\alpha}(t))\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|dt.$$

Si \mathcal{C} es cerrada, es decir, $\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\alpha}(b)$, entonces la integral anterior se denota por

$$\oint_{\mathcal{C}} f d\boldsymbol{\alpha}.$$

Al valor

$$\frac{\int_{\mathcal{C}} f d\boldsymbol{\alpha}}{L(\mathcal{C})}$$

se le conoce como **promedio de f a lo largo de α** .

Observación 7.1.2.

1. Si $\boldsymbol{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, se tiene que

$$\int_{\mathcal{C}} f d\boldsymbol{\alpha} = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

2. El concepto de integral de línea tiene algunas interpretaciones físicas. Por ejemplo, recordemos que si conocemos la densidad D de un objeto y el volumen V que ocupa, podemos calcular su masa como $M = DV$. Si tenemos un sistema de varias partículas de las que conocemos su volumen V_i y densidad D_i , calculamos la masa total como $M = \sum D_i V_i$. ¿Ahora, cómo generalizamos esta idea al caso donde tenemos un material de cuya densidad puede cambiar de un punto a otro dentro del mismo? Para estos casos no discretos tenemos las integrales de línea. Por ejemplo, si $f(x, y, z)$ es la función de densidad de masa en el punto (x, y, z) , y $\boldsymbol{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es un cable, entonces $\int_{\mathcal{C}} f d\boldsymbol{\alpha}$ mide la masa total del cable $\mathcal{C} = \boldsymbol{\alpha}([a, b])$.

3. Si se tiene nuevamente un sistema de m partículas donde conocemos la temperatura de cada una, llamémosla T_i , se puede calcular la temperatura promedio del sistema mediante $\frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n}$. Las integrales de línea permiten calcular la temperatura promedio de cuerpos parametrizados por curvas, como por ejemplo los cables. La temperatura de un punto en el espacio, al igual que la densidad de masa, es una magnitud escalar. Entonces, si $T(x, y, z)$ mide la temperatura en el punto (x, y, z) , la temperatura promedio de un cable $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ se calcula mediante

$$\frac{\int_C T d\alpha}{L(C)}.$$

Ejemplo 7.1.3. Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ el campo escalar dado por

$$f(x, y, z) = \frac{x + y}{y + z},$$

donde $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z \neq 0\}$. Calculemos la integral de línea de f a lo largo de la curva

$$\alpha(t) = \left(t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t \right),$$

donde $t \in [1, 2]$.

Debemos calcular primero $f(\alpha(t))$ y $\|\alpha'(t)\|$:

$$f(\alpha(t)) = \frac{t + \frac{2}{3}t^{3/2}}{\frac{2}{3}t^{3/2} + t} = 1,$$

$$\alpha'(t) = (1, \sqrt{t}, 1),$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2 + t}.$$

Luego,

$$\int_C f d\alpha = \int_1^2 f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_1^2 \sqrt{2 + t} dt = \frac{2}{3} (2 + t)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (4^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}.$$

Proposición 7.1.4 (propiedades de la integral de línea de campos escalares).

1. **Linealidad:** Si $f, g: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ son campos escalares continuos y C es una curva con parametrización $\alpha: [a, b] \rightarrow U$ de clase C^1 e inyectiva en $[a, b]$, entonces,

$$\int_C (kf + lg) d\alpha = k \int_C f d\alpha + l \int_C g d\alpha$$

2. **Aditividad en el dominio de integración:** Si $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo continuo y \mathcal{C} es una curva formada por dos curvas \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , con parametrizaciones α , α_1 y α_2 respectivamente, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f d\alpha = \int_{\mathcal{C}_1} f d\alpha_1 + \int_{\mathcal{C}_2} f d\alpha_2.$$

3. **Independencia de la parametrización:** Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo y \mathcal{C} una curva con parametrización $\alpha: [a, b] \rightarrow U$ de clase C^1 e inyectiva en $[a, b]$. Si $\beta: [c, d] \rightarrow U$ es una reparametrización de α de clase C^1 e inyectiva en $[c, d]$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f d\alpha = \int_{\mathcal{C}} f d\beta.$$

Las propiedades 1. y 2. son consecuencia directa de las propiedades análogas que se cumplen para integrales definidas. En la 2., tenga en cuenta que \mathcal{C} está formada por \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 si: (1) \mathcal{C} es una curva a trozos dada por la unión de \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , o (2) \mathcal{C} es la yuxtaposición de \mathcal{C}_1 con \mathcal{C}_2 , es decir, el punto final de \mathcal{C}_1 coincide con el punto inicial de \mathcal{C}_2 . Por ejemplo, el último es el caso de la curva \mathcal{C} dada por:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (\cos(t), \sin(t), 0), & \text{si } t \in [0, \pi), \\ (\pi - t - 1, 0, 0), & \text{si } t \in [\pi, \pi + 1]. \end{cases}$$

Esta parametrización α es de clase C^1 a trozos, es decir, α es de clase C^1 en $[0, \pi)$ y en $(\pi, \pi + 1]$. Por otro lado, se pueden considerar por separado a las curvas que forman \mathcal{C} . En este caso, \mathcal{C}_1 es la semi-circunferencia superior

$$\alpha_1(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) \text{ con } t \in [0, \pi],$$

y \mathcal{C}_2 es el segmento de recta

$$\alpha_2(t) = (\pi - t - 1, 0, 0) \text{ con } t \in [\pi, \pi + 1].$$

Se tiene por la parte 2. de la proposición anterior lo siguiente:

$$\int_{\mathcal{C}} f d\alpha = \int_{\mathcal{C}_1} f d\alpha_1 + \int_{\mathcal{C}_2} f d\alpha_2 = \int_0^{\pi} f(\alpha_1(t)) \|\alpha_1'(t)\| dt + \int_{\pi}^{\pi+1} f(\alpha_2(t)) \|\alpha_2'(t)\| dt.$$

Demostración de la Proposición 7.1.4 (parte 3.) Se sigue del teorema de cambio de variables para integrales definidas. En efecto, tenemos que $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$, para $s \in [c, d]$, y donde $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ es el difeomorfismo de cambio de parámetros. Tenemos por la regla de la cadena que $\beta'(s) = \alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_C f d\boldsymbol{\beta} &= \int_a^c f(\boldsymbol{\beta}(s)) \|\boldsymbol{\beta}'(s)\| ds = \int_a^c f(\boldsymbol{\alpha}(\varphi(s))) \|\boldsymbol{\alpha}'(\varphi(s))\varphi'(s)\| ds = \int_a^b f(\boldsymbol{\alpha}(t)) \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| dt \\ &= \int_C f d\boldsymbol{\alpha}, \text{ (haciendo } t = \varphi(s)\text{)}. \end{aligned}$$

□

Físicamente tiene sentido la independencia de la parametrización en las integrales de línea. Por ejemplo, si calculamos la masa de un cable \mathcal{C} conociendo su densidad en cada punto, no importa qué parametrización usemos para \mathcal{C} . Por ejemplo, si tenemos una parametrización α y otra β que recorre \mathcal{C} al doble de velocidad que α , la masa del cable siempre es la misma, sin importar si lo recorro más o menos rápido.

7.2 Integrales de línea de campos vectoriales

El concepto de integral de línea se puede generalizar a campos vectoriales, de la siguiente manera.

Definición 7.2.1. Sea $\mathbf{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en U y \mathcal{C} una curva contenida en U , con parametrización $\alpha: [a, b] \rightarrow U$ de clase C^1 e inyectiva en $[a, b]$. Se define la *integral de línea de \mathbf{F} a lo largo de α* como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(t)), \boldsymbol{\alpha}'(t) \rangle dt.$$

Así como hicimos con la integral de línea para campos escalares, veamos de dónde viene la definición anterior. A la integral $\int_C f d\boldsymbol{\alpha}$ la motivamos presentando un problema geométrico de cálculo de áreas. Por otro lado, a la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$ podemos motivarla mediante un problema físico.

Recordemos que si tenemos un objeto M sobre una mesa, al que le aplicamos una fuerza constante \mathbf{F} , el objeto describirá un movimiento rectilíneo con desplazamiento \mathbf{d} . Sabemos que en este caso básico el trabajo resultante sobre el objeto viene dado por $\langle \mathbf{F}, \mathbf{d} \rangle$ (es decir, que se obtiene el mejor resultado cuando la fuerza se aplica en dirección paralela al desplazamiento).

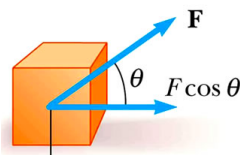


Figura 7.2: Fuerza constante sobre un desplazamiento rectilíneo.

Ahora, supongamos que al objeto M lo movemos a lo largo de una curva \mathcal{C} (como en la Definición 7.2.1), aplicando un campo de fuerza $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Queremos calcular el trabajo resultante de mover el objeto del punto inicial al punto final de \mathcal{C} . Podemos aplicar el caso básico anterior para tal fin.

Consideramos nuevamente una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$ de $[a, b]$. El trabajo resultante de mover el objeto M del punto $\alpha(t_{i-1})$ al punto $\alpha(t_i)$ a lo largo de la curva \mathcal{C} se puede aproximar por el trabajo resultante de mover M de $\alpha(t_{i-1})$ a $\alpha(t_i)$ pero a lo largo del vector $\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})$. Denotamos el primer trabajo como $T_i(\mathcal{C})$. Entonces,

$$T_i(\mathcal{C}) \approx \langle \mathbf{F}(\alpha(c_i)), \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \rangle$$

para algún $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Por otro lado, usando la definición de derivada, $\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})$ puede aproximarse como

$$\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \approx \alpha'(c_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Luego,

$$T_i(\mathcal{C}) \approx \langle \mathbf{F}(\alpha(c_i)), \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \rangle \approx \langle \mathbf{F}(\alpha(c_i)), \alpha'(c_i) \rangle (t_i - t_{i-1}).$$

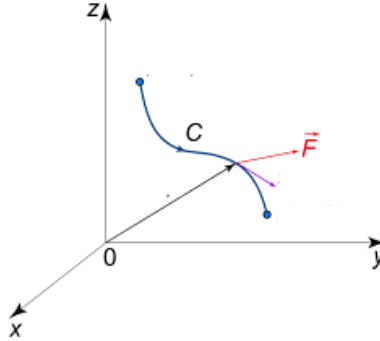


Figura 7.3: Campo de fuerza actuando sobre una curva.

Entonces, si denotamos por $T(\mathcal{C})$ al trabajo total, de decir, el trabajo de mover M desde el punto inicial al punto final de \mathcal{C} , tenemos la aproximación

$$T(\mathcal{C}) \approx \sum_{i=1}^n T_i(\mathcal{C}) \approx \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{F}(\alpha(c_i)), \alpha'(c_i) \rangle (t_i - t_{i-1}).$$

La aproximación anterior se mejora a medida que la norma de P tiende a cero. Por otro lado, la expresión que aparece a la derecha es una suma de Riemann de la función $t \mapsto \langle \mathbf{F}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle$, la cual es continua. Entonces, tomando $n \rightarrow +\infty$ nos queda:

$$T(\mathcal{C}) = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\alpha.$$

Observación 7.2.2. Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$, entonces

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha &= \int_a^b \langle \mathbf{F}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t))), (x'(t), y'(t), z'(t)) \rangle dt \\ &= \int_a^b (F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt.\end{aligned}$$

A las expresiones $x'(t)dt$, $y'(t)dt$ y $z'(t)dt$ se les suele denotar también como dx , dy y dz , respectivamente, por lo cual $\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha$ también se escribe como

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha &= \int_C F_1(x(t), y(t), z(t))dx + F_2(x(t), y(t), z(t))dy + F_3(x(t), y(t), z(t))dz \\ &= \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.\end{aligned}$$

Ejemplo 7.2.3.

1. Considere la fuerza dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcule el trabajo realizado por dicha fuerza al mover una partícula a lo largo de la parábola $z = x^2$, $y = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.

En este caso, para la curva dada tenemos la parametrización

$$\alpha(t) = (t, 0, t^2),$$

donde $t \in [-1, 2]$. Tenemos así:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\alpha(t)) &= (t, 0, t^2), \\ \alpha'(t) &= (1, 0, 2t), \\ \langle \mathbf{F}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle &= \langle (t, 0, t^2), (1, 0, 2t) \rangle = t + 2t^3.\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que el trabajo realizado por \mathbf{F} a lo largo de α es:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha = \int_{-1}^2 \langle \mathbf{F}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt = \int_{-1}^2 t + 2t^3 dt = \left. \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4 \right|_{-1}^2 = 9.$$

2. Evaluar la integral

$$\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$$

donde C es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $a > 0$, recorrida en sentido anti-horario. Evaluar también la misma integral pero con C recorrida en sentido anti-horario.

Siguiendo la notación mostrada en la Observación 7.2.2, lo primero que vemos es que el campo vectorial en este caso está dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}, \frac{y-x}{x^2+y^2}, 0 \right),$$

con $(x, y) \neq (0, 0)$. Por otro lado, \mathcal{C} tiene las siguientes parametrizaciones con sentido anti-horario y horario:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}(t) &= (a \cos(t), a \sin(t), 0), & \text{con} & & t \in [0, 2\pi], \\ \boldsymbol{\beta}(s) &= (a \cos(s), -a \sin(s), 0), & \text{con} & & s \in [-2\pi, 0]. \end{aligned}$$

Luego, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(t)) &= \left(\frac{a \cos(t) + a \sin(t)}{a^2}, \frac{a \sin(t) - a \cos(t)}{a^2}, 0 \right) = \frac{1}{a}(\cos(t) + \sin(t), \sin(t) - \cos(t), 0) \\ \boldsymbol{\alpha}'(t) &= (-a \sin(t), a \cos(t), 0) = a(-\sin(t), \cos(t), 0), \\ \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}(s)) &= \left(\frac{a \cos(s) - a \sin(s)}{a^2}, \frac{-a \sin(s) - a \cos(s)}{a^2}, 0 \right) = \frac{1}{a}(\cos(s) - \sin(s), -\sin(s) - \cos(s), 0) \\ \boldsymbol{\beta}'(s) &= (-a \sin(s), -a \cos(s), 0) = -a(\sin(s), \cos(s), 0). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(t)), \boldsymbol{\alpha}'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{1}{a}(\cos(t) + \sin(t), \sin(t) - \cos(t), 0), a(-\sin(t), \cos(t), 0) \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (\cos(t) + \sin(t), \sin(t) - \cos(t), 0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos(t) \sin(t) - \sin^2(t) + \sin(t) \cos(t) - \cos^2(t)) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt \\ &= -2\pi, \\ \int_{\mathcal{C}^{\text{op}}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\beta} &= \int_{-2\pi}^0 \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta}(s)), \boldsymbol{\beta}'(s) \rangle ds \\ &= \int_{-2\pi}^0 \left\langle \frac{1}{a}(\cos(s) - \sin(s), -\sin(s) - \cos(s), 0), -a(\sin(s), \cos(s), 0) \right\rangle ds \\ &= - \int_{-2\pi}^0 (\cos(s) \sin(s) - \sin^2(s) - \sin(s) \cos(s) - \cos^2(s)) ds = \int_{-2\pi}^0 1 ds \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Del ejemplo anterior vemos que, a diferencia de la integral de línea para campos escalares, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha$ sí depende de la parametrización de C . Ésta, entre otras propiedades, las probaremos a continuación.

Proposición 7.2.4 (propiedades de la integral de línea de campos vectoriales).

1. **Linealidad respecto al integrando:** Sean $\mathbf{F}, \mathbf{G}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campos vectoriales continuos y C una curva con parametrización $\alpha: [a, b] \rightarrow U$ de clase C^1 e inyectiva en $[a, b]$. Entonces, para cualesquiera escalares $k, l \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\int_C (k\mathbf{F} + l\mathbf{G}) \cdot d\alpha = k \int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha + l \int_C \mathbf{G} \cdot d\alpha.$$

2. **Aditividad respecto a la curva de integración:** Sea $\mathbf{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo y C una curva dada por la yuxtaposición de C_1 y C_2 con parametrización $\alpha: [a, c] \cup [c, b] \rightarrow U$ (es decir, $\alpha(t)$ recorre a C_1 cuando t va de a a c , y $\alpha(t)$ recorre a C_2 cuando t va de c a b). Entonces,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\alpha + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\alpha.$$

3. **Continuidad:** Sea $\mathbf{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo y C una curva con parametrización $\alpha: [a, b] \rightarrow U$. Entonces,

$$\left| \int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha \right| \leq ML(C),$$

donde $M = \sup\{\|\mathbf{F}(x, y, z)\| : (x, y, z) \in C\}$.

4. **Cambio de orientación:** Sean \mathbf{F}, C y α como en la parte anterior, y sea C^{op} la curva C recorrida en sentido contrario a α . Entonces,

$$\int_{C^{\text{op}}} \mathbf{F} \cdot d\alpha^{\text{op}} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\alpha$$

Demostración: Las partes 1. y 2. se siguen de las propiedades correspondientes de la integral definida. Se deja su redacción como ejercicio al lector. La parte 4. se sigue de la idea del ejemplo anterior. Recuerde que si C tiene parametrización $\alpha: [a, b] \rightarrow U$, entonces C^{op} tiene parametrización $\alpha^{\text{op}}: [-b, -a] \rightarrow U$ dada por $\alpha^{\text{op}}(s) = \alpha(-s)$. La prueba de 4. también se le deja al lector como ejercicio.

Probaremos únicamente la parte 3 (que también se deduce de propiedades de la integral definida):

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} \right| = \left| \int_a^b \langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(t)), \boldsymbol{\alpha}'(t) \rangle dt \right| \leq \int_a^b |\langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(t)), \boldsymbol{\alpha}'(t) \rangle| dt.$$

Por otro lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$|\langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(t)), \boldsymbol{\alpha}'(t) \rangle| \leq \|\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(t))\| \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| \leq M \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|.$$

Por lo tanto,

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} \right| \leq \int_a^b |\langle \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(t)), \boldsymbol{\alpha}'(t) \rangle| dt \leq \int_a^b M \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| dt = M \int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| dt = ML(\mathcal{C}).$$

□

Escrito en L^AT_EX por **Marco A. Pérez**.

Material consultado:

- Cálculo Vectorial, de Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba.
- Calculus Vol. 2, de Tom Apostol.
- Cálculo Vectorial, notas de A. González.

Última actualización: 30 de Septiembre de 2020.