

En estas notas estudiaremos el objeto matemático llamado curva. Éste es un término que hemos oído muchas veces, seguramente, pues se trata de un objeto geométrico muy útil para describir muchos fenómenos físicos. Podemos pensar, por ejemplo, en una definición vaga de curva como *una línea que podemos dibujar sobre el papel, y sin levantar el lápiz*. Ahora, uno puede tener cierta vena artística y dibujar este trazo de manera suave, es decir, que la curva en el papel no presente roturas o picos. Esto último es más cercano a lo que queremos como concepto de curva en este curso de cálculo vectorial. Esto no es de extrañar porque sabemos que, matemáticamente hablando, la suavidad tiene que ver con el concepto de diferencial.

Para nosotros una curva será simplemente un campo vectorial que va de un intervalo a \mathbb{R}^n (normalmente con $n = 2$ o $n = 3$). Dentro de todos los campos que podemos imaginar con este dominio y rango, nos interesarán aquéllos de clase C^1 y con diferencial no nulo en cualquier valor del intervalo dominio. Este tipo de curvas se conocen como *regulares*, y a pesar de ser un concepto muy simple (al menos es su presentación), tiene una serie de aplicaciones físicas muy llamativas. Por ejemplo, se puede modelar el movimiento de una partícula en el plano o el espacio mediante una curva regular, que da la posición de dicha partícula en cada instante de tiempo. La velocidad instantánea y aceleración de esta partícula se pueden obtener diferenciando una y dos veces, respectivamente, a la curva regular que describe su posición. Además de conceptos asociados a cinemática, las curvas regulares son piezas fundamentales en el modelado de otros fenómenos físicos en el campo de la mecánica, como por ejemplo el trabajo realizado por una fuerza sobre un objeto a lo largo de una trayectoria (que se expresa como una integral de línea sobre la curva que describe tal trayectoria).

6.1 Curvas paramétricas

Comenzamos presentando los conceptos de curva paramétrica y curva regular, acompañados de varios ejemplos.

Definición 6.1.1. Un camino, curva paramétrica o trayectoria es un campo vectorial $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $I = [a, b]$ es un intervalo.¹ Una curva paramétrica α es:

- **Continua** si el campo vectorial $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continuo en I .
- **Diferenciable** si el campo vectorial $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en I .
- **De clase C^1** si el campo vectorial $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 en I .
- **Regular** si α es de clase C^1 y si $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in I$.

La variable t se conoce como **parámetro** de α , y a la expresión que define $\alpha(t)$ se le conoce como **parametrización**. La traza de α es el conjunto de puntos de \mathbb{R}^n dado por $\{\alpha(t) : t \in I\}$.

Dada una curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, el vector $\alpha'(t)$ se denomina **vector tangente** o **vector de velocidad instantánea** (en términos físicos). La **rapidez instantánea** se define como el escalar $\|\alpha'(t)\|$. Si α es dos veces diferenciable, entonces el vector $\alpha''(t)$ se denomina **vector de aceleración instantánea**.

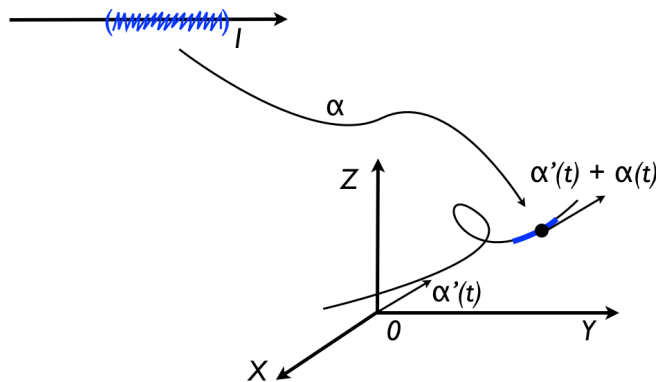


Figura 6.1: Representación gráfica de una curva regular en \mathbb{R}^3 .

Observación 6.1.2.

1. Una curva paramétrica $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ puede escribirse como

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)).$$

Entonces, α es continua, diferenciable o de clase C^1 si, y solo si, cada función α_k lo es.

¹También se puede permitir $I = (-\infty, b]$, $I = [a, +\infty)$ o $I = (-\infty, \infty)$.

2. En caso de ser α diferenciable, el vector de velocidad y la rapidez vienen dados por

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t)) \quad \text{y} \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{(\alpha'_1(t))^2 + (\alpha'_2(t))^2 + \dots + (\alpha'_n(t))^2}.$$

En caso de ser α dos veces diferenciable, tenemos también el vector de aceleración:

$$\alpha''(t) = (\alpha''_1(t), \alpha''_2(t), \dots, \alpha''_n(t)).$$

Vamos a definir a continuación otros atributos de las curvas, con un sentido más geométrico que físico.

Definición 6.1.3. Una curva C se dice que es:

1. **Simple** si admite una parametrización de clase C^1 e inyectiva.
2. **Cerrada** si admite una parametrización $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$.
3. **Cerrada simple** si admite una parametrización $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 , inyectiva en $[a, b)$, y tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Ejemplo 6.1.4.

1. **Rectas:** Dados un punto (x_0, y_0, z_0) en el espacio y un vector (v_1, v_2, v_3) de dirección, la recta tangente que pasa por (x_0, y_0, z_0) y de dirección (v_1, v_2, v_3) es una curva paramétrica, con parametrización $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = t(v_1, v_2, v_3) + (x_0, y_0, z_0) = (tv_1 + x_0, tv_2 + y_0, tv_3 + z_0).$$

Esta curva es claramente diferenciable y de clase C^1 , y su velocidad instantánea viene dada por $\alpha'(t) = (v_1, v_2, v_3)$. Luego, α también es una curva regular, pues todo vector de dirección es diferente de $\mathbf{0}$. Además, α es claramente simple y no cerrada.

2. **Circunferencia unitaria:** Para la circunferencia unitaria S^1 en el plano \mathbb{R}^2 (es decir, de centro $(0, 0)$ y radio 1), podemos dar la parametrización $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Ésta es una curva regular cerrada simple. Primero, las componentes de α son claramente funciones de clase C^1 . Además, α es inyectiva en $[0, 2\pi)$ por propiedades de las funciones seno y coseno. También es fácil notar que $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$. El vector de velocidad instantánea está dado por $\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, que es distinto de $\mathbf{0}$ para todo $t \in [0, 2\pi]$.

Una parametrización dada para una curva no tiene por qué ser única. Para S^1 también podemos dar la parametrización $\beta: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t)).$$

Ambas parametrizaciones tienen la misma traza, a saber, S^1 . La diferencia es que β recorre S^1 al doble de rapidez que α . Note que para todo punto $(x, y) \in S^1$ cuyo ángulo con el eje X positivo es θ , se tiene que $(x, y) = \alpha(\theta) = \beta(\theta/2)$.

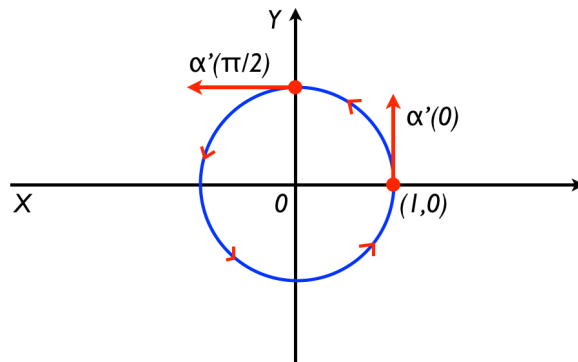


Figura 6.2: Representación gráfica de S^1 con la parametrización α .

3. **Hélice:** La curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(s) = (a \cos(s), a \sin(s), bs),$$

con $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, se denomina hélice contenida en el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Ésta es una curva de clase C^1 , no cerrada, simple, con vector de velocidad instantánea $\alpha'(s) = (-a \sin(s), a \cos(s), b)$ no nulo para cualquier $s \in \mathbb{R}$ (por lo cual la curva es regular).

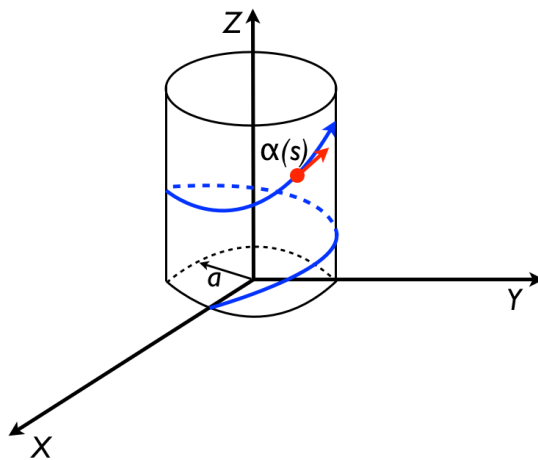


Figura 6.3: Representación gráfica de la hélice con parametrización α .

4. **Cúspide:** Sea $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2)$. La traza de α está dada por el conjunto de puntos (x, y) tales que $y^3 - x^2 = 0$. Para esta curva, se tiene $\alpha'(0) = (0, 0)$, por lo que no es regular. Note que no puede definirse un vector tangente a α en $(0, 0)$. Por otro lado, la curva es simple, no cerrada, y de clase C^1 .

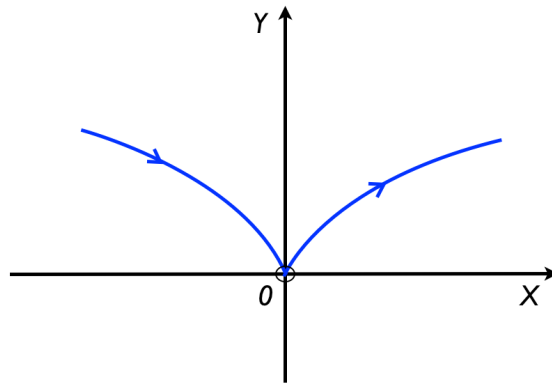


Figura 6.4: Representación gráfica de la cuspide con parametrización α .

5. **Lazo:** Sea $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva dada por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$. Note que $\alpha(-2) = \alpha(2) = (0, 0)$. Esta curva es regular, no cerrada y no simple. Para ver la regularidad, note que $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t)$, por lo que $\alpha'(t) = (0, 0)$ si, y solo si, $3t^2 = 4$ y $t = 0$, lo cual es una contradicción.

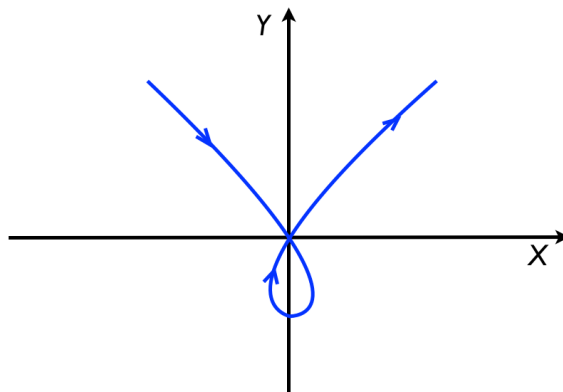


Figura 6.5: Representación gráfica del lazo con parametrización α .

Las curvas regulares serán el tipo de curvas que nos enfocaremos en estudiar. El hecho de que una curva con parametrización $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sea regular, nos permite definir en cada punto de la misma la recta tangente a la curva y que pasa por dicho punto. En otras palabras, para toda curva regular α se puede construir un campo vectorial llamado **campo tangente sobre α** . En efecto, si $\alpha'(t_0) \neq 0$ para $t_0 \in I$, se define la recta tangente $L_{\alpha(t_0)}$ sobre cada punto $\alpha(t_0)$, parametrizada por

$$L_{\alpha(t_0)}(s) = s \cdot \alpha'(t_0) + \alpha(t_0), \text{ con } s \in \mathbb{R}.$$

La importancia de poder definir el campo tangente sobre una curva tiene que ver con el estudio de sus propiedades locales. A partir de este momento, empezaremos el estudio de reparametrizaciones de curvas regulares, para luego poder entender cómo reparametrizar

una curva por *longitud de arco*, es decir, hallar una parametrización cuya rapidez sea constantemente igual a 1. Si trabajamos con una curva regular parametrizada por longitud de arco, podemos definir conceptos como la *curvatura*, la cual mide qué tanto se pega una curva a su recta tangente en cada uno de sus puntos. También estudiaremos propiedades locales a partir de una terna de vectores conocida como el *Triedro de Frenet*, del cual el vector tangente forma parte.

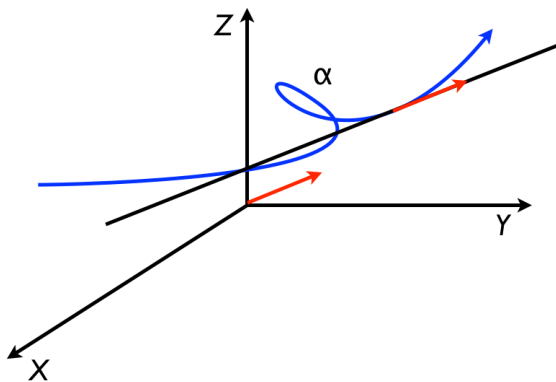


Figura 6.6: Campo tangente sobre α .

Definición 6.1.5. Dada una curva C con parametrización $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$, se define el *versor tangente* a C en $\alpha(t_0)$, en caso de que exista, como el vector unitario

$$\mathbf{t}(t_0) := \frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|}.$$

Toda curva regular tiene versor tangente en cada uno de sus puntos. Este vector $\mathbf{t}(t_0)$ mide la dirección de la recta tangente $L_{\alpha(t_0)}(s)$.

Ejemplo 6.1.6. Una partícula se mueve en el espacio, a lo largo de una trayectoria C con parametrización

$$\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \cos(\pi t)),$$

donde $t \geq 0$. En el instante $t = 1$, la partícula de “libera” de la trayectoria, y sigue su recorrido a lo largo de la recta tangente a C en el punto $\alpha(1)$. ¿Qué posición tiene la partícula en $t = 3$?

Lo primero que hacemos es calcular la tangente a C en el punto $\alpha(1) = (e, e^{-1}, -1)$. En general, tenemos que $\alpha'(t) = (e^t, -e^{-t}, -\pi \sin(\pi t))$, de donde $\alpha'(1) = (e, -e^{-1}, 0)$. Entonces,

$$\mathbf{L}_{\alpha(1)}(s) = s \left(e, -\frac{1}{e}, 0 \right) + \left(e, \frac{1}{e}, -1 \right) = \left(e(1+s), \frac{1-s}{e}, -1 \right).$$

Note que el instante $t = 1$ corresponde a $s = 0$, ya que $\mathbf{L}_{\alpha(1)}(0) = \alpha(1)$. Entonces, la posición de la partícula en $t = 3$ se calcula mediante $\mathbf{L}_{\alpha(1)}(2) = (3e, -1/e, -1)$.

Otra manera de pensar lo anterior es reparametrizar la recta $L_{\alpha(1)}$ en función de cómo estamos midiendo el tiempo, de decir, hallar una parametrización para $T_{\alpha(1)}$ tal que $T_{\alpha(1)}(1) = \alpha(1)$. En este caso, la reparametrización es fácil de notar:

$$T_{\alpha(1)}(t) = (t-1) \left(e, -\frac{1}{e}, 0 \right) + \left(e, \frac{1}{e}, -1 \right).$$

Vemos que $T_{\alpha(1)}(1) = \alpha(1)$ y que $T_{\alpha(1)}(3) = 2(e, -1/e, 0) + (e, 1/e, -1) = (3e, -1/e, -1)$.

6.2 Reparametrizaciones

Ya hemos asomado el concepto de reparametrización un par de veces en la sección anterior. Por ejemplo, vimos que a la circunferencia unitaria S^1 se le puede dar más de una parametrización. En el último ejemplo, le dimos a la recta tangente a \mathcal{C} en el punto $\alpha(1)$ dos parametrizaciones distintas, una mejor que la otra según la función que queramos darle. En ambos casos, consideradas dos parametrizaciones α y β de una misma curva \mathcal{C} , se puede ver que existe una función $\varphi: J \rightarrow I$ tal que $\beta = \alpha \circ \varphi$.

Muchas veces nos va a interesar, dada una curva con una parametrización, reparametrizarla por longitud de arco. Para entender cómo hacer esto último en la siguiente sección, veamos primero qué significa formalmente reparametrizar.

Definición 6.2.1. Sea \mathcal{C} una curva con parametrización $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Una **reparametrización de α** es un campo vectorial $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\beta = \alpha \circ \varphi$, donde $\varphi: J \rightarrow I$ es un difeomorfismo de intervalos llamado **cambio de parámetros**, es decir, φ es una función biyectiva derivable con inversa derivable. La **reparametrización β** se dice **creciente** o **positiva** (resp., **decreciente** o **negativa**) si $\varphi'(s) > 0$ (resp., $\varphi'(s) < 0$) para todo $s \in J$.

Proposición 6.2.2. Sea \mathcal{C} una curva con parametrización $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, y sea $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ una reparametrización de α creciente o decreciente. Entonces, α es regular si, y solo si, β es regular.

Demostración: Analicemos solo el caso donde la reparametrización es creciente (el otro caso es análogo). Se debe probar que $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in I$ si, y solo si, $\beta'(s) \neq \mathbf{0}$ para todo $s \in J$. Como β es una reparametrización creciente de α , existe un difeomorfismo $\varphi: J \rightarrow I$ tal que $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$, para todo $s \in J$, y tal que $\varphi'(s) > 0$ para todo $s \in J$.

Por un lado, si $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in I$, entonces claramente $\alpha'(\varphi(s)) \neq \mathbf{0}$ para todo $s \in J$. Por otro lado, usando la regla de la cadena, tenemos que

$$\beta'(s) = (\alpha(\varphi(s)))' = \alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s),$$

donde $\varphi'(s) > 0$. Entonces, $\beta'(s) \neq \mathbf{0}$.

Ahora supongamos que $\beta'(s) \neq \mathbf{0}$ para todo $s \in J$. Queremos ver que $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in I$. Usando el difeomorfismo φ , podemos notar que $\beta \circ \varphi^{-1}(t) = \alpha(t)$. El resto de la prueba se sigue como en el párrafo anterior, y teniendo en cuenta que $(\varphi^{-1})'(t) = 1/\varphi'(\varphi^{-1}(t)) > 0$. \square

Observación 6.2.3.

1. De la demostración de la proposición anterior, podemos notar que si β es una reparametrización creciente (resp., decreciente) de α si, y solo si, α es una reparametrización creciente (resp., decreciente) de β .
2. En la proposición anterior, la condición de que la reparametrización sea creciente o decreciente es suficiente para garantizar la regularidad. Sin embargo, dada una curva C , puede ocurrir que C sea traza de dos parametrizaciones, donde una de ellas sea regular y la otra no.

Por ejemplo, consideremos la curva C en \mathbb{R}^2 dada por la parábola $y = x^2$, junto con las parametrizaciones $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (t, t^2), \text{ para } t \in \mathbb{R}, \\ \beta(s) &= (s^3, s^6), \text{ para } s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

La parametrización $\alpha(t)$ es regular, mientras que $\beta(s)$ no. En efecto, notamos que $\alpha'(t) = (1, 2t) \neq (0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sin embargo, $\beta'(s) = (3s^2, 6s^5)$ y $\beta'(0) = (0, 0)$. Podemos notar además que β es una reparametrización de α , ya que

$$\beta(s) = (s^3, s^6) = (s^3, (s^3)^2) = \alpha(\varphi(s)) \quad \text{donde} \quad \varphi(s) = s^3.$$

Para el cambio de parámetro $\varphi(s)$ tenemos que $\varphi'(s) = 3s^2$, y $\varphi'(0) = 0$. Entonces, φ no es creciente ni decreciente.

3. Sea C una curva con parametrización regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, y con una reparametrización $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si β es creciente (y por tanto regular), entonces β preserva la orientación de C dada por α . Recuerde que tal orientación viene dada por el versor

$$\mathbf{t}_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Por otro lado, como $\beta'(s) = \alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)$, se tiene que

$$\mathbf{t}_\beta(s) = \frac{\alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)}{\|\alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\|} = \frac{\alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)}{\|\alpha'(\varphi(s))\| \|\varphi'(s)\|} = \frac{\alpha'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)}{\|\alpha'(\varphi(s))\| \|\varphi'(s)\|} = \frac{\alpha'(\varphi(s))}{\|\alpha'(\varphi(s))\|},$$

de donde $\mathbf{t}_\alpha(\varphi(s))$ y $\mathbf{t}_\beta(s)$ tienen el mismo sentido (de hecho, son iguales).

Ejemplo 6.2.4.

1. Consideremos de nuevo el ejemplo de la circunferencia unitaria S^1 , para la que tenemos dos parametrizaciones $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\beta: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ y $\beta(s) = (\cos(2s), \sin(2s))$. Podemos notar que

$$\beta(s) = \alpha(\varphi(s)),$$

donde $\varphi: [0, \pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ es el difeomorfismo dado por $\varphi(s) = 2s$, y representa un cambio de parámetros creciente, por lo que α y β recorren S^1 en el mismo sentido.

2. Del Ejemplo 6.1.6, recordemos que en el punto $\alpha(1) = (e, e^{-1}, -1)$ tenemos la recta tangente dada por dos parametrizaciones

$$\mathbf{L}_{\alpha(1)}(s) = \left(e(1+s), \frac{1-s}{e}, -1 \right) \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_{\alpha(1)}(t) = \left(et, \frac{2-t}{e}, -1 \right).$$

Es posible hallar un cambio de parámetros $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{L}_{\alpha(1)}(s) = \mathbf{T}_{\alpha(1)}(\varphi(s))$. En este caso, es fácil notar que $\varphi(s) = s + 1$.

3. **Cambio de sentido:** Dada una curva \mathcal{C} con parametrización $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, la reparametrización $\beta: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\beta(s) = \alpha(-s)$ recorre a \mathcal{C} en sentido contrario a α . Note que $\beta'(s) = -\alpha'(-s)\varphi'(s) = -\alpha'(t)$, siendo $t = -s$. Dado $s_0 \in [-b, -a]$ arbitrario, la igualdad $\beta'(s_0) = -\alpha'(t_0)$ significa que, en el punto $\alpha(t_0) = \beta(s_0)$ de \mathcal{C} , los vectores $\beta'(s_0)$ y $-\alpha'(t_0)$ apuntan en direcciones contrarias.

Dada una curva paramétrica \mathcal{C} , queremos hallar de entre todas las parametrizaciones de \mathcal{C} aquella que sea mejor para el estudio de sus propiedades geométricas locales. Esta parametrización será la llamada *parametrización de longitud de arco*. Bajo ciertas condiciones sobre \mathcal{C} , se puede probar que tal parametrización mejor existe. Para ser capaces de probar esto, es necesario primero formalizar algunos conceptos.

Definición 6.2.5. Sean $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones de una curva \mathcal{C} . Diremos que α y β son **equivalentes** si una es reparametrización de la otra.

La elección del término anterior no es casualidad. En efecto, se puede probar que la relación de *ser equivalentes* entre parametrizaciones es una relación de equivalencia. Si β es reparametrización de α , usaremos la notación $\alpha \sim \beta$.

Proposición 6.2.6. Sea \mathcal{C} una curva paramétrica y \sim la relación anterior definida para parametrizaciones de \mathcal{C} . Entonces, \sim es una relación de equivalencia, es decir, que las siguientes propiedades se cumplen:

1. \sim es **reflexiva**: $\alpha \sim \alpha$, para toda parametrización $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de C .
2. \sim es **simétrica**: si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ son parametrizaciones de \mathbb{R}^n tales que $\alpha \sim \beta$, entonces $\beta \sim \alpha$.
3. \sim es **transitiva**: si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\gamma: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ son parametrizaciones de C tales que $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \gamma$, entonces $\alpha \sim \gamma$.

Demostración:

1. Es suficiente con darse cuenta que $\alpha(t) = \alpha \circ \varphi(t)$, donde $\varphi: I \rightarrow I$ es la identidad sobre I (el cual claramente es un difeomorfismo de intervalos).
2. Supongamos que $\alpha \sim \beta$, es decir, que existe un cambio de parámetros $\varphi: J \rightarrow I$ tal que $\beta(s) = \alpha \circ \varphi(s)$, para todo $s \in J$. Al ser φ un difeomorfismo de intervalos, es invertible, derivable y con inversa derivable, por lo que $\psi: I \rightarrow J$ dado por $\psi(t) = \varphi^{-1}(t)$, para todo $t \in I$, es también un difeomorfismo de intervalos. Además, es claro que $\alpha(t) = \beta \circ \psi(t)$. Por lo tanto, $\beta \sim \alpha$.
3. Supongamos que $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \gamma$, es decir, que existen cambios de parámetros $\varphi: J \rightarrow I$ y $\psi: L \rightarrow J$ tales que $\beta(s) = \alpha \circ \varphi(s)$ y $\gamma(l) = \beta \circ \psi(l)$ para todo $s \in J$ y $l \in L$, respectivamente. Es claro que $\varphi \circ \psi: L \rightarrow I$ es un difeomorfismo de intervalos, y que $\gamma(l) = \beta(\psi(l)) = \alpha(\varphi(\psi(l))) = \alpha \circ (\varphi \circ \psi)(l)$, para todo $l \in L$. Por lo tanto, $\alpha \sim \gamma$.

□

No todas las parametrizaciones de una curva son equivalentes entre sí. Sin embargo, bajo ciertas condiciones es posible garantizar la equivalencia entre cualesquiera parametrizaciones regulares de una curva. Esto está expresado en el siguiente resultado, que dejaremos sin demostrar.

Proposición 6.2.7. *Sea C una curva paramétrica. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. Si C es simple y regular, es decir, que admite una parametrización inyectiva y regular, entonces todas las parametrizaciones regulares de C son inyectivas y equivalentes.
2. Si C es cerrada simple y regular, y si $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ son parametrizaciones regulares de C , tales que $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\beta(c) = \beta(d)$, y $\alpha|_{[a,b]}$ y $\beta|_{[c,d]}$ son inyectivas, entonces $\alpha \sim \beta$.

Observación 6.2.8. *Si C es una curva como en la proposición anterior, supongamos que $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular de C , que recorre C en un sentido el cual fijamos como **positivo**. Entonces, como toda parametrización regular β de C es reparametrización de α , se tiene que β recorre a C en el mismo sentido que α (orientación positiva), o en sentido opuesto a α (orientación negativa). Claro está que tal sentido positivo o negativo depende del sentido fijado a α desde el principio. En algunos casos pueden haber convenciones, como por ejemplo cuando se tiene una curva cerrada simple C en \mathbb{R}^2 . En este caso, suele decirse que una parametrización de C tiene orientación positiva si recorre a C en sentido anti-horario (contrario a las agujas del reloj).*

6.3 Parametrización por longitud de arco

En esta sección estudiaremos qué significa que una curva esté parametrizada por longitud de arco, y demostraremos que bajo ciertas condiciones sobre una curva \mathcal{C} , es posible construir tales parametrizaciones para \mathcal{C} . La importancia de las parametrizaciones por longitud de arco la empezaremos a apreciar en las secciones posteriores.

Definición 6.3.1. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de una curva \mathcal{C} . Se dice que α está parametrizada por longitud de arco si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

El término anterior resulta algo extraño la primera vez que se lee. ¿Qué tiene que ver el concepto de longitud con $\|\alpha'(t)\| = 1$? Ni siquiera sabemos qué significa longitud al referirnos a una curva. A continuación nos enfocaremos a responder esta pregunta. Primero, debemos definir el concepto de longitud de una curva, para poder entender qué tiene que ver con la rapidez instantánea de una parametrización dada.

Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de clase C^1 de una curva \mathcal{C} . Consideremos una partición de $I = [a, b]$ dada por $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$.

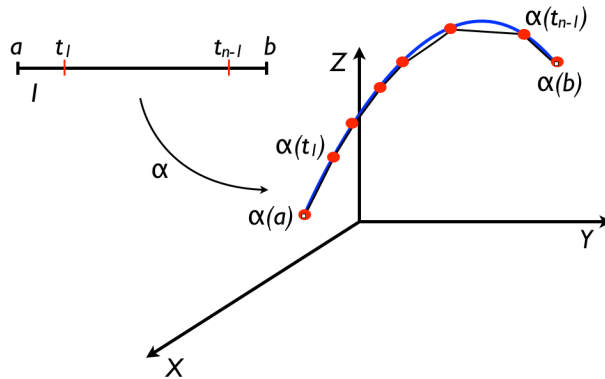


Figura 6.7: Aproximando la longitud de una curva.

Denotaremos por l la longitud de α entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$. Tenemos

$$l \approx \sum_{i=1}^n \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|.$$

Por el teorema del valor medio para campos vectoriales $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, se tiene que

$$\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \leq \|\alpha'(\zeta_i)\|(t_i - t_{i-1}),$$

para algún $\zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ y para cada i . Entonces, para t_{i-1} y t_i suficientemente cercanos,

nos queda $\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| \approx \|\alpha'(\zeta_i)\|(t_i - t_{i-1})$, y así

$$l \approx \sum_{i=1}^n \|\alpha'(\zeta_i)\|(t_i - t_{i-1}).$$

Tomando el límite de $\sum_{i=1}^n \|\alpha'(\zeta_i)\|(t_i - t_{i-1})$ cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos que la integral

$$l = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

define la **longitud de arco** de α entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$, la cual denotaremos por $L_a^b(\alpha)$. Con este cálculo, se define además la **función longitud de arco** $L: I \rightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$L(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du,$$

para algún $a \in I$ fijo. Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces $L(t)$ viene dada por

$$L(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2 + (z'(u))^2} du.$$

La longitud de arco es un invariante geométrico, es decir, no depende de la parametrización escogida para la curva. Formalmente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 6.3.2. *Sea \mathcal{C} una curva parametrizable con una parametrización $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 , y sea $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una reparametrización de α de clase C^1 . Entonces,*

$$L_a^b(\alpha) = L_c^d(\beta).$$

Demostración: Sea $\varphi: J \rightarrow I$ un cambio de parámetros tal que $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$, para todo $s \in [c, d]$. El resultado se sigue del teorema de cambio de variables para integrales. En efecto, tenemos que

$$L_c^d(\beta) = \int_c^d \|\beta'(s)\| ds = \int_c^d \|(\alpha(\varphi(s)))'\| ds = \int_c^d \|\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)\| ds.$$

Haciendo $t = \varphi(s)$, se tiene que $dt = \varphi'(s)ds$, $a = \varphi(c)$ y $b = \varphi(d)$ (aunque también puede ocurrir que $a = \varphi(d)$ y $b = \varphi(c)$, pero este caso se analiza de forma análoga). Entonces:

$$L_c^d(\beta) = \int_c^d \|\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)\| ds = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = L_a^b(\alpha).$$

□

En vista del resultado anterior, tenemos la siguiente definición.

Definición 6.3.3. Sea \mathcal{C} una curva que admite una parametrización $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 . Se define la *longitud de arco de \mathcal{C}* como el valor

$$L(\mathcal{C}) := L_a^b(\alpha).$$

Ejemplo 6.3.4. Consideremos la parametrización del círculo unitario S^1 dada por

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Tenemos $\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, $\|\alpha'(t)\| = 1$ y por ende

$$L(S^1) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Aunque sabemos que el cálculo anterior no depende de la parametrización tomada para S^1 , consideremos también $\beta: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\beta(s) = (\cos(2s), \sin(2s)).$$

Tenemos que $\beta'(s) = (-2\sin(2s), 2\cos(2s))$ y $\|\beta'(s)\| = 2$. Luego, $L_0^\pi(\beta) = \int_0^\pi 2ds = 2\pi$.

Observación 6.3.5. Podemos notar del ejemplo anterior que si $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización de una curva \mathcal{C} por longitud de arco, entonces

$$L(\mathcal{C}) = L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b dt = b - a.$$

En otras palabras, si \mathcal{C} es una curva parametrizable por longitud de arco, y α como antes, entonces

$$L(t) = \int_a^t \|\alpha'(s)\| ds = \int_a^t ds = t - a.$$

Entonces, la función de longitud sobre una curva \mathcal{C} parametrizable por longitud de arco es una traslación de la función identidad.

Teorema 6.3.6. Si \mathcal{C} es una curva con parametrización regular $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces existe una reparametrización $\beta: [0, L(\mathcal{C})] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de α por longitud de arco.

Demostración: Por definición, $L(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$. Note que $L(t)$ es estrictamente creciente porque $\|\alpha'(u)\| > 0$ para todo $s \in [a, b]$, por lo cual L es biyectiva. Más aún, por el Teorema Fundamental del Cálculo, $L'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ para todo $t \in [a, b]$. Por lo tanto, $L: [a, b] \rightarrow [0, L(\mathcal{C})]$ es un difeomorfismo. Definimos $\beta: [0, L(\mathcal{C})] \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$\beta(s) = (\alpha \circ L^{-1})(s),$$

para todo $s \in [0, L(\mathcal{C})]$, de donde es claro que β es una reparametrización de α . Ahora veamos que β está parametrizada por longitud de arco:

$$\beta'(s) = (\alpha \circ L^{-1})'(s) = \alpha'(L^{-1}(s)) \cdot (L^{-1})'(s) = \frac{\alpha'(L^{-1}(s))}{L'(L^{-1}(s))} = \frac{\alpha'(L^{-1}(s))}{\|\alpha'(L^{-1}(s))\|},$$

$$\|\beta'(s)\| = \left\| \frac{\alpha'(L^{-1}(s))}{\|\alpha'(L^{-1}(s))\|} \right\| = \frac{\|\alpha'(L^{-1}(s))\|}{\|\alpha'(L^{-1}(s))\|} = 1.$$

□

Ejemplo 6.3.7.

1. Sea \mathcal{C} la circunferencia en el plano \mathbb{R}^2 de centro $(0, 0)$ y radio $r > 0$, y sea $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la parametrización

$$\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t)).$$

Queremos reparametrizar \mathcal{C} por longitud de arco, que sabemos que es posible al ser α regular. Tenemos que $\alpha'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t))$ y $\|\alpha'(t)\| = r$. Luego, la función longitud de arco de \mathcal{C} viene dada por

$$L(t) = rt$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$. Tenemos además $L(\mathcal{C}) = 2\pi r$. Entonces, $L^{-1}: [0, 2\pi r] \rightarrow [0, 2\pi]$ viene dada por

$$L^{-1}(s) = \frac{s}{r}.$$

Tenemos entonces que la reparametrización $\beta: [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de α por longitud de arco viene dada por

$$\beta(s) = \alpha(L^{-1}(s)) = \alpha\left(\frac{s}{r}\right) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right)\right),$$

para todo $s \in [0, 2\pi r]$. Se puede verificar que $\|\beta'(s)\| = 1$ para comprobar que la reparametrización por longitud de arco es correcta.

2. Sea \mathcal{C} la hélice con parametrización $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$$

donde $a, b > 0$. Sabemos que α es una parametrización regular de \mathcal{C} , por lo que es posible reparametrizar por longitud de arco. El problema es cómo aplicamos el procedimiento mostrado en la prueba del Teorema 6.3.6 cuando tenemos α cuyo dominio no es un intervalo acotado. Para este caso también se puede definir la función longitud de arco $L(t)$ mediante

$$L(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^t \|(-a \sin(t), a \cos(t), b)\| dt = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Entonces, $L^{-1}(s)$ viene dada por

$$L^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Por lo tanto, la reparametrización de α por longitud de arco, a la que llamamos $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, viene dada por

$$\beta(s) = \alpha \circ L^{-1}(s) = \alpha \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \left(a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Para $\beta(s)$ es fácil verificar que $\|\beta'(s)\| = 1$.

6.4 Teoría local de curvas parametrizadas por longitud de arco

Sabiendo qué significa que una curva esté parametrizada por longitud de arco, estamos preparados para definir una serie de conceptos que nos permiten estudiar cómo se comporta una curva localmente. Por ejemplo, al ser las curvas objetos geométricos, podemos estudiar alrededor de un punto x_0 en una curva \mathcal{C} qué tanto se pega \mathcal{C} a la recta tangente que pasa por x_0 . Esto se puede calcular mediante el concepto de curvatura, que también nos permite determinar, por ejemplo, si una curva o parte de ella está contenida en una recta. Siguiendo esta línea, también nos podemos preguntar si una curva está contenida dentro de un plano. Para esto necesitaremos el concepto de torsión. La curvatura y torsión de una curva en un punto están además relacionados a una terna de vectores conocida como el triedro de Frenet, formado por el versor tangente, el versor normal y el versor binormal. A partir de propiedades de este triedro se pueden calcular la curvatura y torsión.

Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular. En el caso que α no satisface $\|\alpha'(t)\| \equiv 1$, ¿qué mide $\|\alpha'(t)\|$? Físicamente, $\|\alpha'(t)\|$ representa la rapidez instantánea de α . ¿Qué mide $\|\alpha''(t)\|$ cuando $\|\alpha'(t)\| = 1$? ¿Qué tanto se despega $\alpha(t)$ de su vector tangente $\alpha'(t)$? Pasemos a responder estas preguntas.

Definición 6.4.1. Sea una curva \mathcal{C} parametrizada por longitud de arco por $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ y de clase C^2 . Se define la **curvatura** de \mathcal{C} en el punto $\beta(s)$ como el valor

$$k(s) := \|\beta''(s)\| = \|\mathbf{t}'(s)\|.$$

En otras palabras, como

$$k(s_0) = \left\| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{t}'(\Delta s + s_0) - \mathbf{t}'(s_0)}{\Delta s} \right\|,$$

tenemos que $k(s_0)$ mide el cambio de dirección del vector tangente. Si ese cambio es muy rápido lo que ocurre, intuitivamente hablando, es que la curva en el punto $\beta(s_0)$ se despega mucho de la recta tangente que pasa por $\beta(s_0)$.

Ejemplo 6.4.2.

1. Consideremos la parametrización $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la recta C en \mathbb{R}^3 de dirección \mathbf{v} y que pasa por \mathbf{x}_0 , donde \mathbf{v} es unitario. Entonces,

$$\beta(s) = \mathbf{v}s + \mathbf{x}_0,$$

con $s \in \mathbb{R}$, es una parametrización por longitud de arco. Además, $\beta'(s) = \mathbf{v}$ y $\beta''(s) = \mathbf{0}$. Por lo tanto, las rectas tienen curvatura cero. De hecho, ocurre que cualquier curva con curvatura cero en todos sus puntos tiene que estar contenida en una recta, como probaremos más adelante.

2. Sea C la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio r , con parametrización $\beta: [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$ por longitud de arco dada por

$$\beta(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right),$$

para todo $s \in [0, 2\pi r]$. Tenemos que

$$\beta'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad \text{y} \quad \beta''(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right),$$

$$\text{de donde } k(s) = \|\beta''(s)\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{r} \cdot \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{r} \cdot \sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)^2} = \frac{1}{r}.$$

Por lo tanto, la curvatura de toda circunferencia es el inverso multiplicativo de su radio. Luego, mientras mayor sea el radio de una circunferencia, menor será su curvatura.

Se pueden sacar conclusiones más generales del ejemplo anterior. La primera es el hecho de que toda curva con curvatura cero va a estar contenida en una recta.

Proposición 6.4.3. Sea C una curva con parametrización $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^2 y por longitud de arco. Entonces, $k(s) = 0$ para todo $s \in J$ si, y solo si, $\beta(J)$ está contenida en una recta.

Demostración: Primero supongamos que $k(s) = 0$. Luego, $\|\beta''(s)\| = 0$ para todo $s \in J$. Esto implica que $\beta''(s) = \mathbf{0}$ para todo $s \in J$, de donde $\beta'(s)$ es un vector constante (y unitario), digamos $\beta'(s) = \mathbf{v}$ para todo $s \in J$. De esto a su vez se tiene que $\beta(s) = s\mathbf{v} + \mathbf{x}_0$ para algún $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$. Por lo tanto, $\beta(J)$ está contenida en la recta de dirección \mathbf{v} y que pasa por el punto \mathbf{x}_0 .

Ahora supongamos que $\beta(J)$ está contenida en una recta. Entonces, existe un plano con π en \mathbb{R}^3 que pasa por el origen y al que dicha recta es perpendicular. Entonces, si fijamos $s_0 \in J$, tenemos que el vector $\beta(s) - \beta(s_0)$, que tiene la misma dirección de la recta, es perpendicular a cualquier vector en π . Sea $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$ una base ortonormal de π . Entonces, tenemos que

$$\langle \beta(s) - \beta(s_0), \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle \beta(s) - \beta(s_0), \mathbf{u} \rangle = 0.$$

Derivando estas relaciones respecto a s vamos a obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \beta(s) - \beta(s_0), \mathbf{v} \rangle' = \langle (\beta(s) - \beta(s_0))', \mathbf{v} \rangle + \langle \beta(s) - \beta(s_0), \mathbf{v}' \rangle = \langle \beta'(s), \mathbf{v} \rangle + \langle \beta(s), \mathbf{0} \rangle \\ &= \langle \beta'(s), \mathbf{v} \rangle, \\ 0 &= \langle \beta'(s), \mathbf{u} \rangle. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\beta'(s)$ es paralelo al vector normal del plano π , a saber $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. Luego, existe $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\beta'(s) = \lambda(s)(\mathbf{v} \times \mathbf{u}).$$

Para tal $\lambda(s)$ se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= \|\beta'(s)\| = |\lambda(s)|\|\mathbf{v} \times \mathbf{u}\| = |\lambda(s)|, \\ \lambda(s) &= \pm 1. \end{aligned}$$

Al ser β una parametrización de clase C^2 , tenemos que $\lambda(s)$ debe ser continua, por lo que $\lambda(s) = 1$ para todo $s \in J$, o $\lambda(s) = -1$ para todo $s \in J$. En cualquier caso, $\lambda'(s) = 0$, de donde

$$\beta''(s) = \lambda'(s)(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

y así $k(s) = \|\beta''(s)\| = 0$. □

La segunda conclusión tiene que ver con curvas contenidas dentro de circunferencias.

Proposición 6.4.4. *Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de clase C^2 de una curva C tal que $\|\alpha(t)\| = c > 0$ para todo $t \in I$. Entonces, $\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I$. Más aún, si α es una parametrización por longitud de arco y $n = 2$, se tiene que*

$$k(t) = \frac{1}{c}.$$

La proposición dice que si $\alpha(I)$ está contenida en una circunferencia o esfera de radio c , entonces la posición instantánea $\alpha(t)$ es perpendicular a la velocidad instantánea $\alpha'(t)$.

Demostración: Como $\|\alpha(t)\| = c$, tenemos que $c^2 = \|\alpha(t)\|^2 = \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle$. Por otro lado, sabemos que

$$\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle' = 2\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle.$$

Entonces,

$$0 = \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle,$$

para todo $t \in I$.

Supongamos ahora que $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$. A partir de $0 = \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle$ se tiene que

$$0 = \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle' = \langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle + 1$$

$$\langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle = -1.$$

Por otro lado, como $\|\alpha'(t)\| = 1$, es decir $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1$, se tiene que

$$0 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle' = 2\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle.$$

Se tiene entonces que $\alpha''(t)$ y $\alpha'(t)$ son vectores de \mathbb{R}^2 perpendiculares entre sí. Además, $\alpha(t)$ también es perpendicular a $\alpha'(t)$, por lo cual $\alpha(t)$ y $\alpha''(t)$ son colineales. En este caso, tenemos que $\alpha(t)$ y $\alpha''(t)$ forman entre sí un ángulo θ de 0 o de π radianes, de donde $\cos(\theta) = \pm 1$. Luego,

$$-1 = \langle \alpha''(t), \alpha(t) \rangle = \|\alpha''(t)\| \|\alpha(t)\| \cos(\theta) = \pm ck(t)$$

$$1 = ck(t) \quad (\text{debe ocurrir que } \cos(\theta) = 1)$$

$$k(t) = \frac{1}{c}.$$

□

Sabemos hasta ahora que la curvatura es una magnitud escalar que mide en cada punto de una curva la rapidez de cambio del versor tangente. Además del versor tangente, existen otro par de vectores que también arrojan información local sobre una curva, a saber, el versor normal y el versor binormal. Más aún, a partir de éstos se puede definir otra magnitud escalar conocida como torsión, que mide localmente qué tanto la curva está contenida en un plano.

Definición 6.4.5. Sea \mathcal{C} una curva con parametrización $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ por longitud de arco y de clase C^2 , tal que $k(s) \neq 0$ para todo $s \in J$. Se define el **versor normal** en $\beta(s)$ como el vector unitario

$$\mathbf{n}(s) := \frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{k(s)}.$$

Así como el versor tangente define un campo tangente $\mathbf{t}: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ mediante $s \mapsto \mathbf{t}(s)$, el versor normal también define un campo vectorial $\mathbf{n}: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ mediante la asignación $s \mapsto \mathbf{n}(s)$, al que llamamos *campo normal*. Ambos campos vectoriales son perpendiculares entre sí. En efecto, como $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 1$, al derivar respecto a s tenemos que

$$0 = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s) \rangle = \langle \mathbf{t}(s), k(s)\mathbf{n}(s) \rangle = k(s)\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle.$$

Como $k(s) \neq 0$, tenemos que $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$ para todo $s \in J$.

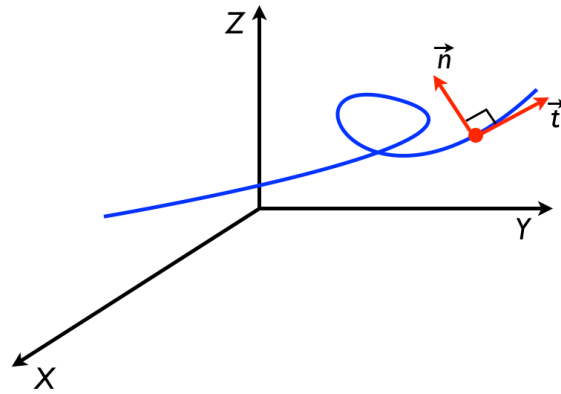


Figura 6.8: Campo tangente y campo normal.

Definición 6.4.6. Sea C una curva con parametrización por longitud de arco $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^2 y con curvatura no nula. Sobre cada punto $\beta(s)$, se asocia el plano generado por los vectores $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{t}(s)$, y que pasa por $\beta(s)$, conocido como **plano osculador**. Dicho plano tiene ecuación paramétrica

$$\pi_{\text{osculador}}: u \cdot \mathbf{n}(s) + v \cdot \mathbf{t}(s) + \beta(s) \text{ donde } u, v \in \mathbb{R}.$$

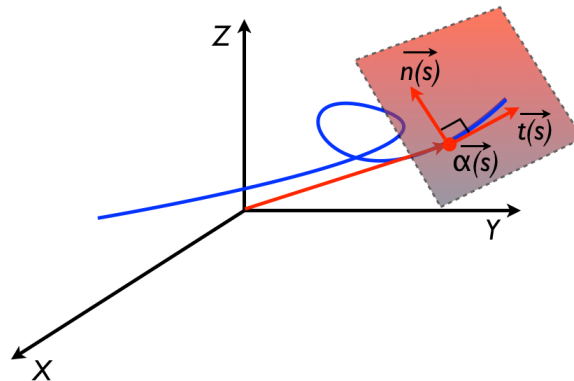


Figura 6.9: Plano osculador.

También se puede definir al plano osculador en $\beta(s)$ como al plano que pasa por $\beta(s)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$. A este último vector se le conoce como **versor binormal**, y se denota como $\mathbf{b}(s)$.

$$\mathbf{b}(s) := \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s).$$

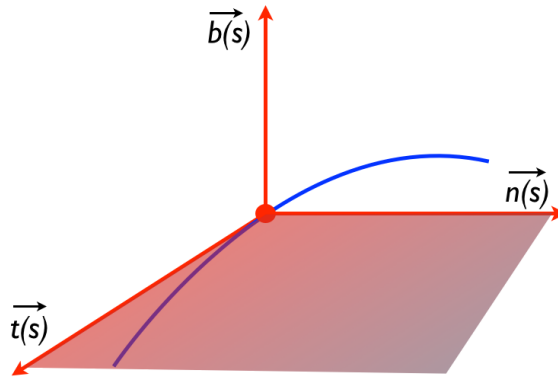


Figura 6.10: Versor binormal.

Note que $\mathbf{b}(s)$ es un vector unitario. En efecto,

$$\|\mathbf{b}(s)\| = \|\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)\| = \|\mathbf{t}(s)\| \cdot \|\mathbf{n}(s)\| \cdot |\sin(\theta)| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1,$$

donde $\theta = \pi/2$ es el ángulo entre $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$.

Definición 6.4.7. A la terna de vectores

$$\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$$

se le conoce como **triedro de Frénet-Serret**.

Ejemplo 6.4.8. Sea $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2 \text{ y } z = 0\}$ la circunferencia de centro $(0, 0, 0)$ y radio $r > 0$ ubicada en el plano XY . Calculemos el triedro de Frénet-Serret en cualquier punto P de C para ver qué información arroja. Sabemos que C está parametrizada por longitud de arco mediante $\beta: [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\beta(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right).$$

Digamos que $P = \beta(s)$ para algún $s \in [0, 2\pi r]$. Sabemos que

$$\mathbf{t}(s) = \beta'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right) \quad \text{y} \quad \beta''(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right),$$

y que $k(s) = \|\beta''(s)\| = 1/r$. Luego, $\|\beta''(s)\| = 1/r$ y

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|} = \frac{1}{1/r} \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right) = - \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right).$$

Podemos notar fácilmente que $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ son perpendiculares. Para calcular el versor binormal, tenemos

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\left(\frac{s}{r}\right) & \cos\left(\frac{s}{r}\right) & 0 \\ -\cos\left(\frac{s}{r}\right) & -\sin\left(\frac{s}{r}\right) & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1).$$

De acá se tiene que el plano osculador en cualquier punto de \mathcal{C} es el plano XY , y que \mathcal{C} está enteramente contenida en dicho plano, como era de esperarse. Más adelante veremos que esto quiere decir que la curva \mathcal{C} tiene torsión cero.

Si tomamos por ejemplo $s = \pi/2$ con $r = 2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\pi/2) &= (-\sin(\pi/4), \cos(\pi/4), 0) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), \\ \mathbf{n}(\pi/2) &= -(\cos(\pi/4), \sin(\pi/4), 0) = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), \\ \mathbf{b}(\pi/2) &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Vemos que $\mathbf{n}(\pi/2)$ es paralelo a $\mathbf{t}(\pi/2)$ y apunta al centro de la circunferencia.

Pasemos ahora a definir formalmente el concepto de torsión mencionado en el ejemplo anterior.

Proposición 6.4.9. Sea \mathcal{C} una curva en \mathbb{R}^3 parametrizada por longitud de arco $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$, de clase C^3 y con curvatura no nula en cualquier punto. Entonces, para todo $s \in J$, los vectores $\mathbf{b}'(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ son colineales, es decir, que existe $\tau(s) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s).$$

Al escalar $\tau(s)$ se conoce como **torsión** de β en s .²

Demostración: Sabemos por definición de versor binormal que $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$. Por propiedades de la derivada con el producto vectorial, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(s) &= (\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s))' = \mathbf{t}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\ &= k(s)\mathbf{n}(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) = \mathbf{0} + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\ &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s). \end{aligned}$$

²El signo negativo en la igualdad $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$ es simplemente una convención.

La igualdad $\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s)$ implica que $\mathbf{b}'(s)$ es perpendicular a $\mathbf{t}(s)$ y a $\mathbf{n}'(s)$. Por otro lado, derivando $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 1$ se puede ver también que $\mathbf{n}(s)$ es perpendicular a $\mathbf{n}'(s)$. Además sabemos que $\mathbf{n}(s)$ también es perpendicular a $\mathbf{t}(s)$. Tenemos entonces que tanto $\mathbf{b}'(s)$ como $\mathbf{n}(s)$ son perpendiculares al plano generado por $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s)\}$, por lo cual $\mathbf{b}'(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ son colineales. \square

Como $\mathbf{b}(s)$ define la dirección del plano osculador en el punto $\beta(s)$, tenemos que $\mathbf{b}'(s)$ mide la variación instantánea de la dirección de dicho plano. Por otro lado, como $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$, se tiene entonces que la torsión $\tau(s)$ mide qué tanto se sale la curva del plano osculador. Luego, tiene sentido pensar que si una curva tiene torsión nula, entonces ésta yace sobre tal plano. En efecto, esto es lo que ocurre y lo probaremos a continuación.

Proposición 6.4.10. *Sea \mathcal{C} una curva parametrizada por longitud de arco $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$, de clase C^3 y con curvatura no nula. Entonces, $\tau(s) = 0$ para todo $s \in J$ si, y solo si, $\beta(J)$ está contenida en un plano. En este caso, todos los planos osculadores de \mathcal{C} coinciden, y $\beta(J)$ está contenida en dicho plano.*

Demostración: Supongamos primero que $\tau(s) = 0$ para todo $s \in J$. Entonces, por la proposición anterior tenemos que $\mathbf{b}'(s) = 0$ para todo $s \in J$, de donde el campo binormal $\mathbf{b}: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un vector constante, llamémosle \mathbf{b}_0 . Sea entonces π el plano con dirección normal \mathbf{b}_0 y que pasa por $\beta(s_0)$ para algún $s_0 \in J$. Consideremos también $\beta(s)$ arbitrario. Queremos ver que $\beta(s)$ también está en π . Para esto último, basta con probar que $\beta(s) - \beta(s_0)$ es perpendicular a \mathbf{b}_0 , es decir, $\langle \beta(s) - \beta(s_0), \mathbf{b}_0 \rangle = 0$, o equivalentemente, $\langle \beta(s), \mathbf{b}_0 \rangle = \langle \beta(s_0), \mathbf{b}_0 \rangle$. Como s es arbitrario, probar lo anterior significa demostrar que $s \mapsto \langle \beta(s), \mathbf{b}_0 \rangle$ define una función constante, y al ser ésta claramente una función derivable, todo se resume a probar que $\langle \beta(s), \mathbf{b}_0 \rangle' = 0$. En efecto, tenemos que

$$\langle \beta(s), \mathbf{b}_0 \rangle' = \langle \beta'(s), \mathbf{b}_0 \rangle + \langle \beta(s), \mathbf{b}_0' \rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}_0 \rangle + \langle \beta(s), \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}_0 \rangle = 0.$$

Ahora supongamos que la traza $\beta(J)$ está contenido en un plano π con dirección normal \mathbf{u} (de normal 1). Si fijamos $\beta(s_0) \in \pi$, y consideramos $\beta(s) \in \pi$, vamos a tener que el vector $\beta(s) - \beta(s_0)$ es ortogonal a \mathbf{u} , es decir,

$$\langle \beta(s) - \beta(s_0), \mathbf{u} \rangle = 0.$$

Derivando esta igualdad respecto a s , obtenemos

$$\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{u} \rangle = \langle \beta'(s), \mathbf{u} \rangle = 0.$$

Derivando nuevamente, tenemos

$$k(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{u} \rangle = 0.$$

Como β posee curvatura no nula, se tiene que $k(s) \neq 0$, y así de la igualdad anterior se deduce que $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{u} \rangle = 0$. Como $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ son ortogonales a \mathbf{u} , y como $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$, se tiene que $\mathbf{b}(s)$ es colineal a \mathbf{u} . Como $\mathbf{b}(s)$ y \mathbf{u} son unitarios, se tiene $\mathbf{b}(s) = \pm \mathbf{u}$. Por otro lado, el campo binormal $\mathbf{b}: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $s \mapsto \mathbf{b}(s)$ es continuo, ya que β es de clase C^3 , por lo cual $\mathbf{b}(s) = \mathbf{u}$ para todo $s \in J$, o $\mathbf{b}(s) = -\mathbf{u}$ para todo $s \in J$. En cualquier caso, se tiene que $\mathbf{b}(s)$ es un vector constante, por lo cual $\mathbf{b}'(s) = \mathbf{0}$. Por otro lado, $\mathbf{b}'(s)$ sabemos que es colineal a $\mathbf{n}(s)$, y que $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$. Luego,

$$\mathbf{0} = -\tau(s)\mathbf{n}(s).$$

Al ser $\mathbf{n}(s)$ un vector no nulo, se tiene finalmente que $\tau(s) = 0$ para todo $s \in J$. □

Aunque tenemos elementos para calcular la curvatura y torsión de las curvas que hemos presentado como ejemplos, vamos a presentar primero una serie de resultados que facilitarán dichos cálculos.

Proposición 6.4.11 (Fórmulas de Frênet-Serret). *Sea \mathcal{C} una curva en \mathbb{R}^3 parametrizada por longitud de arco $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$, de clase C^3 y con curvatura no nula en cualquier $s \in J$. Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen para todo $s \in J$:*

1. $k(s) = -\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$.
2. $\tau(s) = \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle = -\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$.

Demostración: Para la parte 1., simplemente calculamos $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle$ y $-\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$. Recordemos que $\mathbf{n}(s) = \mathbf{t}'(s)/k(s)$, de donde

$$\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle k(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = k(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = k(s) \cdot 1 = k(s).$$

Para probar la otra igualdad, simplemente derivamos $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$, de donde se obtiene

$$\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle = -\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle.$$

La parte 2. es análoga a 1., sabiendo que $\mathbf{b}(s) \perp \mathbf{n}(s)$ y que $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$. □

El resultado anterior nos dice que si conocemos el triedro de Frênet-Serret $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ de una curva \mathcal{C} , entonces somos capaces de calcular la curvatura y torsión a partir de dicho triedro. Recíprocamente, si uno conoce las funciones de curvatura y torsión de \mathcal{C} , entonces es posible determinar el triedro de Frênet-Serret resolviendo un sistema de ecuaciones diferenciales, conocido como las Ecuaciones de Frênet-Serret.

Proposición 6.4.12 (Ecuaciones de Frénet-Serret). Sea C una curva en \mathbb{R}^3 parametrizada por longitud de arco $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$, de clase C^3 y con curvatura no nula en cualquier $s \in J$. Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen para todo $s \in J$:

1. $\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$.
2. $\mathbf{n}'(s) = -k(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)$.
3. $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$.

Estas relaciones pueden representarse mediante la siguiente multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix}.$$

Demostración: Las ecuaciones 1. y 3. vienen de la definición de curvatura y torsión, por lo que solo hace falta probar la ecuación 2. Como $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{n}'(s)$ son perpendiculares entre sí pues $\mathbf{n}(s)$ es unitario, se tiene que $\mathbf{n}'(s)$ pertenece al plano de dirección $\mathbf{n}(s)$, que a su vez es el plano generado por $\mathbf{b}(s)$ y $\mathbf{t}(s)$. Luego, existen escalares únicos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{n}'(s) = a \cdot \mathbf{t}(s) + b \cdot \mathbf{b}(s).$$

Para calcular estos escalares, usamos el hecho que el triedro de Frénet-Serret es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , junto con las partes 1. y 2.:

$$\begin{aligned} -k(s) &= \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle = \langle \mathbf{t}(s), a \cdot \mathbf{t}(s) + b \cdot \mathbf{b}(s) \rangle = a \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle + b \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = a, \\ \tau(s) &= \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle = \langle \mathbf{b}(s), a \cdot \mathbf{t}(s) + b \cdot \mathbf{b}(s) \rangle = a \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{t}(s) \rangle + b \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = b. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.4.13. Calculemos la curvatura y torsión de la hélice circular

$$\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt).$$

Sabemos que α se puede parametrizar por longitud de arco como

$$\beta(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(-a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), b \right), \\ \beta''(s) &= -\frac{a}{a^2 + b^2} \left(\cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$k(s) = \|\beta''(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Ahora calculemos el vector binormal y su derivada:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{-a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) & -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \\ \mathbf{b}'(s) &= \left(\frac{b}{a^2+b^2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{b}{a^2+b^2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0 \right) = -\frac{b}{a^2+b^2} \mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\tau(s) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Escrito en \LaTeX por Marco A. Pérez.

Material consultado:

- Cálculo Vectorial, notas de A. González.
- Geometría Diferencial de Curvas y Superficies, notas de M. A. Pérez.

Última actualización: 28 de Septiembre de 2020.