CÁLCULO VECTORIAL

TEMA 8
CAMPOS GRADIENTES

Al final de las notas del Tema 7, vimos que la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva $\mathcal{C}$ depende de la parametrización de $\mathcal{C}$. Es hora de estudiar qué ocurre con aquellos campos vectoriales $\boldsymbol{F}$ para los cuales $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$ no depende de $\boldsymbol{\alpha}$. Más aún, estudiaremos campos vectoriales $\boldsymbol{F}$ para los cuales $\int_{\mathcal{C}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha_1} = \int_{\mathcal{C}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha_2}$, donde $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son curvas con el mismo origen y punto final. Estos campos se llaman *conservativos*, y tienen otra propiedad interesante, a saber, que para ellos se puede hallar un campo escalar f tal que $\boldsymbol{F} = \nabla f$. Por otro lado, los campos que satisfacen la propiedad anterior se conocen como *gradientes*. Calcular cualquier integral de línea para estos últimos resulta sumamente sencillo gracias a una generalización de la regla de Barrow.

8.1 Campos gradientes

Comencemos presentando en concepto de campos de gradientes.

Definición 8.1.1. *Un campo vectorial $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 se denomina* ***de gradientes*** *si existe un campo escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \boldsymbol{F}$. En este caso, se dice que f es un* ***potencial escalar*** *de $\boldsymbol{F}$.*

Observación 8.1.2. *Para el caso $n = 3$, lo anterior significa que, para todo $\boldsymbol{x_0} \in U$, se tiene la igualdad*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}) = (F_1(\boldsymbol{x_0}), F_2(\boldsymbol{x_0}), F_3(\boldsymbol{x_0})) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x_0}), \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x_0}), \frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{x_0})\right).$$

Podría decirse que, si queremos hallar f conociendo $\boldsymbol{F}$, debemos hallar las primitivas de F_1 (vista como función de x, con y y z constantes), de F_2 (vista como función de y, con x y z constantes), y de F_3 (vista como función de z, con x e y constantes), y que los resultados coincidan.

Hay una aparente analogía entre el concepto de potencial escalar de un campo vectorial y el de primitiva de una función. Esto se puede apreciar aún más de hecho que, si f y g son potenciales de $\boldsymbol{F}$, entonces $f - g$ es una función constante, como demostraremos más adelante.

Ejemplo 8.1.3.

1. *El campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = (y, x)$ es un campo de gradientes. En efecto, es fácil ver que el campo escalar $f(x, y) = xy$ es un potencial escalar de $\boldsymbol{F}$.*

2. ***Ley de gravitación universal:** La **ley de gravitación de Newton** afirma que la fuerza que una partícula de masa M ejerce sobre otra de masa m es un vector de magnitud GmM/r^2, donde r es la distancia entre ambas partículas y G es la **constante de gravitación universal** o **constante de Cavendish** ($G \approx 6.674x10^{-11}\mathrm{Newtons} \cdot \mathrm{mts}^2/\mathrm{Kg}^2$). Si situamos el origen de nuestro sistema de referencia en la partícula de masa M, y si (x, y, z) es la posición de la partícula de masa m, entonces el vector de fuerza viene dado por*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(x, y, z) &= -\frac{GmM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z) \\ &= \left(-\frac{GmMx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{GmMy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{GmMz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

   Este campo de fuerza $\boldsymbol{F}$ es un campo de gradientes, con potencial escalar

$$f(x, y, z) = \frac{GmM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

   *A $f(x, y, z)$ se le conoce como **potencial Newtoniano**.*

Veamos algunas propiedades de los campos gradientes antes de dar la generalización de la regla de Barrow. Recuerde que un subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ es *conexo* si para cualesquiera dos puntos $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in U$ existe una curva contenida en U que los conecta.

Proposición 8.1.4. *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. *Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar donde U es abierto y conexo. Si $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ para todo $\boldsymbol{x} \in U$, entonces f es constante.*

2. *Si $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo continuo de gradientes, donde U es abierto y conexo, y si $f, g\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son potenciales escalares de $\boldsymbol{F}$, entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}) = c$ para todo $\boldsymbol{x} \in U$.*

Demostración:

1. Fijamos un punto cualquiera $\boldsymbol{x_0} \in U$, y sea $\boldsymbol{x} \in U$ arbitrario. Considere una curva $\boldsymbol{\alpha}\colon [a,b] \to U$ diferenciable que conecta a $\boldsymbol{x_0}$ con $\boldsymbol{x}$, es decir, $\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{x_0}$ y $\boldsymbol{\alpha}(b) = \boldsymbol{x}$. La composición $f \circ \boldsymbol{\alpha}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable, para la cual se cumple

$$(f \circ \boldsymbol{\alpha})'(t) = \langle \nabla f(\boldsymbol{\alpha}(t)), \boldsymbol{\alpha}'(t) \rangle = 0,$$

para todo $t \in [a,b]$. Entonces, $f \circ \boldsymbol{\alpha}$ es la función constantemente igual a $f(\boldsymbol{\alpha}(a)) = f(\boldsymbol{x_0})$. En particular, $f(\boldsymbol{x_0}) = f(\boldsymbol{\alpha}(b)) = f(\boldsymbol{x})$. Como $\boldsymbol{x}$ es cualquier punto en U arbitrario, se tiene por lo tanto que f es la función constantemente igual a $f(\boldsymbol{x_0})$.

2. Al ser f y g potenciales escalares de $\boldsymbol{F}$, se tiene que $\nabla f = \boldsymbol{F} = \nabla g$, de donde $\nabla(f-g) = 0$. Por la parte 1., $f - g$ es una función constante.

□

Teorema 8.1.5 (regla de Barrow para campos de gradientes)**.** *Sea $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de gradientes de clase C^1 con potencial escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, donde U es abierto. Sea $\mathcal{C}$ una curva contenida en U, con origen $\boldsymbol{x_0}$ y punto final $\boldsymbol{x_1}$. Entonces,*

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = f(\boldsymbol{x_1}) - f(\boldsymbol{x_0}).$$

Demostración: Sea $\boldsymbol{\alpha}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de $\mathcal{C}$ de clase C^1 e inyectiva en $[a,b)$. Sabiendo que $\boldsymbol{F} = \nabla f$, se tiene por la definición de integral de línea para campos vectoriales que

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_a^b \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\alpha}(t)), \boldsymbol{\alpha}'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle \nabla f(\boldsymbol{\alpha}(t)), \boldsymbol{\alpha}'(t) \rangle dt = \int_a^b (f \circ \boldsymbol{\alpha})'(t) dt.$$

Ahora, por la regla de Barrow, tenemos finalmente que

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_a^b (f \circ \boldsymbol{\alpha})'(t) dt = f \circ \boldsymbol{\alpha}(t)\big|_a^b = f(\boldsymbol{\alpha}(b)) - f(\boldsymbol{\alpha}(a)) = f(\boldsymbol{x_1}) - f(\boldsymbol{x_0}).$$

□

En el teorema anterior, en el caso donde $\mathcal{C}$ es una curva cerrada ($\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\alpha}(b)$), se tiene que

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = 0.$$

La propiedad anterior, cuando se cumple para toda curva cerrada simple dentro del dominio de $\boldsymbol{F}$, caracteriza a todos los campos gradientes de clase C^1. Más aún, $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = 0$ es equivalente a que $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$ *conserve* su valor (es decir, que sea constante) para cualquier curva $\mathcal{C}$ que conecta a $\boldsymbol{x_0}$ con $\boldsymbol{x_1}$.

Definición 8.1.6. *Un campo vectorial $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se dice **conservativo** si, para cualesquiera $\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1} \in U$, se cumple que*

$$\int_{\mathcal{C}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha_1} = \int_{\mathcal{C}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha_2},$$

donde $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son dos curvas cualesquiera que conectan $\boldsymbol{x_0}$ con $\boldsymbol{x_1}$.

Teorema 8.1.7. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para cualquier campo vectorial $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1, con U abierto y conexo:*

(a) Existe un campo escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\boldsymbol{F} = \nabla f$.

(b) $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = 0$ para toda curva cerrada y de clase C^1 a trozos $\mathcal{C}$ contenida en U.

(c) $\boldsymbol{F}$ es conservativo.

Demostración:

- (a) $\Rightarrow$ (b): Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada y de clase C^1 a trozos, con parametrización $\boldsymbol{\alpha}\colon [a, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \cdots \cup [t_{n-2}, t_{n-1}] \cup [t_{n-1}, b] \to \mathbb{R}$. Es decir, $\boldsymbol{\alpha}$ es continua y $\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}|_{[t_{i-1},t_i]}$ es de clase C^1 en (t_{i-1}, t_i) para cada $1 \leq i \leq n$ (haciendo $a = t_0$ y $b = t_n$), y $\boldsymbol{\alpha}(a) = \boldsymbol{\alpha}(b)$. Por la regla de Barrow, para cada $1 \leq i \leq n$ tenemos

  $$\int_{\mathcal{C}_i} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha_i} = f(\boldsymbol{\alpha}(t_i)) - f(\boldsymbol{\alpha}(t_{i-1})),$$

  donde $\mathcal{C}_i$ denota el trozo de $\mathcal{C}$ parametrizado por $\boldsymbol{\alpha_i}$. Luego, usando la aditividad en el dominio de la integral de línea, tenemos que

  $$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{C}_i} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} [f(\boldsymbol{\alpha}(t_i)) - f(\boldsymbol{\alpha}(t_{i-1}))] = f(\boldsymbol{\alpha}(t_n)) - f(\boldsymbol{\alpha}(t_0)) = 0.$$

- (b) $\Rightarrow$ (c): Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos curvas que van de $\boldsymbol{x_0}$ a $\boldsymbol{x_1}$. Supongamos que $\mathcal{C}_1$ tiene parametrización $\boldsymbol{\alpha}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$, y que $\mathcal{C}_2^{\mathrm{op}}$ tiene parametrización $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{op}}\colon [c, d] \to \mathbb{R}^3$. Entonces, la yuxtaposición de $\mathcal{C}_1$ con $\mathcal{C}_2$ forma una curva cerrada, a la que llamamos $\mathcal{C}$, con parametrización

  $$\boldsymbol{\alpha}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}(t) & \text{si } t \in [a, b], \\ \boldsymbol{\beta}(b + c - t) & \text{si} t \in [b, b + c - d] \end{cases}$$

  Note que $\mathcal{C}$ es una curva cerrada y suave a trozos. Entonces, al asumir (b), y por la propiedad de aditividad de la integral de línea en el dominio, además de la propiedad de cambio de orientación, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
0 = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} &= \int_{\mathcal{C}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} + \int_{\mathcal{C}_2^{\mathrm{op}}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{op}} \\
0 &= \int_{\mathcal{C}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} - \int_{\mathcal{C}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\beta} \\
\int_{\mathcal{C}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\beta} &= \int_{\mathcal{C}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha}.
\end{aligned}
$$

- (c) $\Rightarrow$ (a): La idea de esta demostración se basa en el primer teorema fundamental del cálculo. Fijamos un punto $(x_0, y_0, z_0) \in U$, y consideramos el campo escalar $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por

$$
f(x,y,z) = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha}
$$

donde $\mathcal{C}$ es cualquier curva de (x_0, y_0, z_0) a (x, y, z). Note que f está bien definida porque la integral no depende del camino $\mathcal{C}$, ya que estamos asumiendo (c). Hay que probar que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = F_1(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = F_2(x,y,z)$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = F_3(x,y,z)$. Haremos solo la prueba de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = F_1(x,y,z)$, ya que las otras igualdades son análogas y se dejan como ejercicio. Entonces, vamos a probar que

$$
\lim_{h\to 0} \frac{f((x,y,z)+h(1,0,0)) - f(x,y,z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f((x+h,y,z)) - f(x,y,z)}{h} = F_1(x,y,z).
$$

Para calcular el límite anterior, tenemos que como U es un conjunto abierto, existe $r > 0$ tal que $B((x,y,z), r) \subseteq U$. Entonces, como $(1,0,0)$ es un vector unitario, se tiene que $(x,y,z) + h(1,0,0) \in B((x,y,z), r)$ siempre que $|h| < r$. Por otro lado, por la aditividad de la integral de línea, se tiene que

$$
f((x,y,z)+h(1,0,0)) - f(x,y,z) = \int_{\mathcal{C}'} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha}' - \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_{\mathcal{C}_h} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha}_h,
$$

donde $\mathcal{C}'$ es un camino que une a (x_0, y_0, z_0) con $(x,y,z)+h(1,0,0)$, y $\mathcal{C}_h$ es un camino que une a (x,y,z) con $(x,y,z) + h(1,0,0)$. En particular, se puede tomar $\mathcal{C}_h$ con parametrización $\boldsymbol{\alpha}_h(t) = (x,y,z) + th(1,0,0)$ con $t \in [0,1]$. Así,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_h} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha}_h &= \int_0^1 \langle \boldsymbol{F}((x,y,z)+th(1,0,0)), h(1,0,0)\rangle dt = \int_0^1 \langle \boldsymbol{F}(x+th,y,z), (h,0,0)\rangle dt \\
&= \int_0^1 \langle (F_1(x+th,y,z), F_2(x+th,y,z), F_3(x+th,y,z)), (h,0,0)\rangle dt \\
&= \int_0^1 hF_1(x+th,y,z) dt.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$\frac{f((x,y,z)+h(1,0,0))-f(\boldsymbol{x})}{h} = \int_0^1 F_1(x+th,y,z)dt,$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f((x,y,z)+h(1,0,0))-f(\boldsymbol{x})}{h} = \lim_{h\to 0}\int_0^1 F_1(x+th,y,z)dt.$$

Para resolver el límite $\lim_{h\to 0}\int_0^1 F_1(x+th,y,z)dt$, hacemos el cambio de variables $u = ht$. Luego,

$$\lim_{h\to 0}\int_0^1 F_1(x+th,y,z)dt = \frac{1}{h}\lim_{u\to 0}\int_0^h F_1(x+u,y,z)du$$

Al ser F_1 un campo escalar continuo, se tiene que la composición $u \mapsto (x+u,y,z) \to F_1(x+u,y,z)$ es una función continua de variable u. Por otro lado, por el primer teorema fundamental del cálculo, la función $g(t) = \int_0^t F_1(x+u,y,z)du$ es derivable, y $g'(t) = F_1(x+t,y,z)$. Entonces se tiene que:

$$\frac{1}{h}\lim_{u\to 0}\int_0^h F_1(x+u,y,z)du = \lim_{h\to 0}\frac{g(h+0)-g(0)}{h} = g'(0) = F_1(x,y,z).$$

Por lo tanto, el límite $\lim_{h\to 0}\frac{f((x,y,z)+h(1,0,0))-f(x,y,z)}{h}$ existe y además

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f((x,y,z)+h(1,0,0))-f(x,y,z)}{h} = F_1(x,y,z).$$

□

Ejemplo 8.1.8.

1. *Evaluar la integral $\int_{\mathcal{C}} ydx + xdy$, donde $\mathcal{C}$ es la curva con parametrización $\boldsymbol{\alpha}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t^4/4, \sin^3(\pi t/2))$.*

   Sabemos por un ejemplo anterior que $\boldsymbol{F}(x,y) = (y,x)$ es un campo de gradientes con potencial escalar $f(x,y) = xy$. Luego, por la regla de Barrow, tenemos

   $$\int_{\mathcal{C}} ydx + xdy = \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\boldsymbol{\alpha} = f(\boldsymbol{\alpha}(1)) - f(\boldsymbol{\alpha}(0)) = f\left(\frac{1}{4},1\right) - f(0,0) = \frac{1}{4}.$$

2. *Si $\boldsymbol{F}$ es un campo de fuerzas, el cual es gradiente con potencial escalar f, y si $\mathcal{C}$ es una curva simple que conecta a un punto (x_0,y_0,z_0) con otro punto (x,y,z), entonces el trabajo que realiza $\boldsymbol{F}$ para mover una partícula de (x_0,y_0,z_0) a (x,y,z) viene dado por*

   $$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\alpha} = f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0).$$

*A la resta anterior se le denomina **diferencia de potencial**, y al escalar $f(x, y, z)$ se le conoce como **energía potencial de la partícula**.*

Si tenemos un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ de clase C^1, ¿cómo sabemos si no es un campo de gradientes? Por el teorema anterior, basta con encontrar una curva cerrada simple $\mathcal{C}$ dentro del dominio de $\boldsymbol{F}$ tal que $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} \neq 0$. Hay veces donde hallar tal curva $\mathcal{C}$ puede ser complicado, por lo que presentamos el siguiente resultado que propone una solución más sencilla.

Proposición 8.1.9. *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. *Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1, donde U es abierto. Si $\boldsymbol{F}$ es un campo de gradientes con potencial escalar $f \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, entonces*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)$$

   para todo $(x, y) \in U$.

2. *Sea $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) \colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1, donde U es abierto. Si $\boldsymbol{F}$ es un campo de gradientes con potencial escalar $f \colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, entonces*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z), \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z),$$

   para todo $(x, y, z) \in U$.

Demostración: Haremos solo la demostración de la parte 1. La parte 2. se sigue de manera similar y se deja como ejercicio. Por hipótesis, sabemos que

$$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Al ser $\boldsymbol{F}$ de clase C^1, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ tienen derivadas parciales continuas, es decir, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existen y son continuas. Lo anterior implica que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Entonces, para todo $(x, y) \in U$ se tiene que:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y).$$

$\square$

Ejemplo 8.1.10. *Demuestre que el campo vectorial* $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xy, x^2 + 1, z^2)$ *no es un campo de gradientes.*

Claramente $\boldsymbol{F}$ *es de clase* C^1. *Por la proposición anterior, basta probar que alguna de las condiciones*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z), \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z),$$

no se cumple en algún punto (x, y, z) *de* $\mathbb{R}^3$. *Para este campo* $\boldsymbol{F}$, *basta considerar* $F_1(x, y, z) = xy$ *y* $F_2(x, y, z) = x^2 + 1$. *En efecto, tenemos que*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) = x, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) = 2x.$$

Luego, para $(1, 0, 0)$, *por ejemplo, tenemos* $\frac{\partial F_1}{\partial y}(1, 0, 0) = 1$ *y* $\frac{\partial F_2}{\partial x}(1, 0, 0) = 2$, *que son diferentes.*

Escrito en LaTeX por **Marco A. Pérez**.

Material consultado:
- Cálculo Vectorial, de Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba.
- Calculus Vol. 2, de Tom Apostol.
- Cálculo Vectorial, notas de A. González.

Última actualización: 07 de Octubre de 2020.