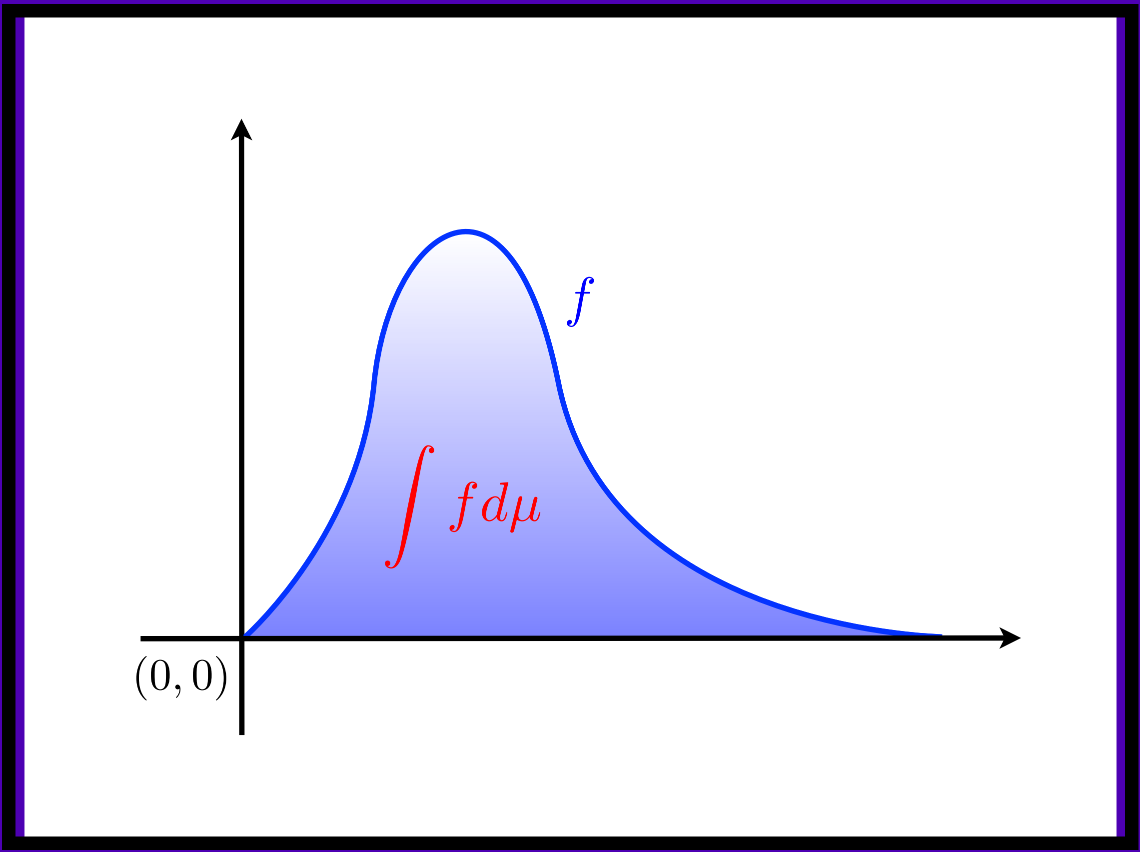
MARCO A. PÉREZ B.
Université du Québec à Montréal.
Département de Mathématiques.

ANALYSE

Notes de cours



Décembre, 2011.

Ces notes sont basées sur un cours donné par Gordon Craig à l'UQÀM à l'automne 2010. Toute erreur ou omission sont la resposabilité de l'auteur.

TABLE DES MATIÉRES

CHAPITRE 1

THÉORIE DE LA MESURE

1.1 Espaces mesurables

Soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de tout les sous-ensembles de X.

Définition 1.1.1. Soit $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{R}$ est un σ**-algèbre** ssi :

(1) $X \in \mathcal{R}$.

(2) Si $A \in \mathcal{R}$, alors $A^c \in \mathcal{R}$.

(3) Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{R}$ alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$.

Exemple 1.1.1. Les ensembles $\mathcal{P}(X)$ et $\{X, \emptyset\}$ sont exemples triviaux de σ-algèbres.

Lemme 1.1.1. Si $A, B \in \mathcal{R}$, alors $A \cap B \in \mathcal{R}$. Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$ alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$.

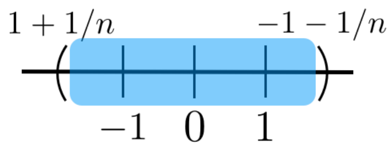
Démonstration : Notez que $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$. Alors

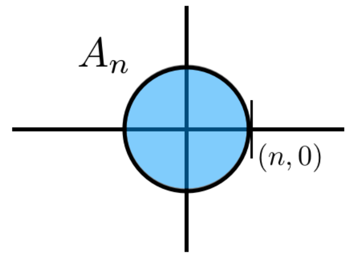
$$A^c, B^c \in \mathcal{R} \Longrightarrow A^c \cup B^c \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{R}.$$

Similairement, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{R}$.

□

Exemple 1.1.2. $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1-1/n, 1+1/n) = [-1, 1]$. $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, where $A_n = \{p \in \mathbb{R}^2 \ / \ d(p, 0) \leq n\}$.





Théorème 1.1.1. Soit $\mathcal{F}$ une collection de sous-ensembles de X. Il existe un σ-algèbre minimal $\mathcal{M}^* \subseteq \mathcal{P}(X)$, appelé le σ-algèbre engendré par $\mathcal{F}$, tel que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}^*$. ("minimal" signifie que si S est une σ-algèbre qui contient $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{M}^* \subseteq S$).

Démonstration : Soit $\mathcal{M}^* = \cap\{\mathcal{M}_\alpha \;/\; \mathcal{M}_\alpha$ est un σ-algèbre et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}_\alpha\}$. Nous avons que $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$ puisque $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Nous prouvons que $\mathcal{M}^*$ est un σ-algèbre.

(1) $X \in \mathcal{M}_\alpha \; \forall \alpha \Longrightarrow X \in \mathcal{M}^*$.

(2) $A \in \mathcal{M}_\alpha \; \forall \alpha \Longrightarrow A^c \in \mathcal{M}_\alpha \; \forall \alpha \Longrightarrow A^c \in \mathcal{M}^*$.

(3) Même chose.

$\square$

Définition 1.1.2. Si τ est une topologie sur X, soit $\mathcal{B}$ le σ-algèbre engendré par les ouverts. $\mathcal{B}$ est appelé le **σ-algèbre de Borel**.

Exemple 1.1.3. $X = \mathbb{R}$, $\tau =$ topologie standarde. $(a, b) \in \mathcal{B}$, $\forall -\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. Nous avons que $[a, b] \in \mathcal{B}$, puisque $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$. Également, $[a, b) = [a, \infty) \cap ([b, \infty))^c \in \mathcal{B}$. L'ensemble de Cantor C est aussi dans $\mathcal{B}$.

$$
\begin{aligned}
C_1 &= [0, 1], \\
C_2 &= [0, 1/3] \cup [2/3, 1], \\
C_3 &= [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1], \\
&\vdots \\
C &= \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{B}.
\end{aligned}
$$

Notez que $\{x\} \in \mathcal{B} \; \forall \; x \in X$, et que $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \in \mathcal{B}$.

Définition 1.1.3. Une **mesure (positive)** μ sur un σ-algèrre $\mathcal{M}$ est une fonction $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ telle que il existe $A \in \mathcal{M}$ avec $\mu(A) < \infty$, et si $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i, j$ alors

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Exemple 1.1.4. $X = \mathbb{Z}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, $\mu(A) = \mathrm{Card}(A)$. Par exemple, si $A = \{4,1,7\} = \{4\} \cup \{1,7\}$, alors

$$3 = \mu(A) = \mu(\{4\}) + \mu(\{1,7\}) = 1 + 2.$$

Définition 1.1.4. Si $\mu(X) = 1$, on dit que μ est une **mesure de probabilité**.

$$\mu(A) = \text{ probabilité de l'évènement } A.$$

Exemple 1.1.5. $X = \{2,3,4,\dots,11,12\}$,

$$\begin{aligned}
\mu(\{2\}) &= 1/36,\\
\mu(\{3\}) &= 2/36,\\
&\vdots\\
\mu(\{2,3,7\}) &= \mu(\{2\}) + \mu(\{3\}) + \mu(\{7\}) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{6}{36} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.1.1. Si X est dńombrable, on peut prendre $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ et définir une mesure en posant $\mu(\{x_i\}) = a_i \geq 0$. Si $A \in \mathcal{P}(X)$, A est dénombrable et

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{x\in A} \{x\}\right) = \sum_{x\in A} \mu(\{x\}).$$

Exemple 1.1.6. Soit $X = \mathbb{N}$, $\mu(\{n\}) = 1/3^n$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mu(\{5,19\}) &= \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^{19}},\\
\mu(\{\text{naturels pairs}\}) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{2k\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{2k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9^k} = \frac{1}{8},\\
\mu(\mathbb{N}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.1.2. Si $\mu(X) < \infty$ et $\mu(X) \neq 0$, on peut normaliser pour obtenir une mesure de probabilité en définissant $\nu(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}$. Donc $\nu(X) = 1$. Dans l'exemple précédent, $\nu(A) = 2\mu(A)$ et $\nu(\{n\}) = 2/3^n$.

Théorème 1.1.2. Soit μ une mesure sur $\mathcal{M}$.

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$ si $A \subseteq B$ (si cette différence est définie)

(c) $A \subseteq B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

(d) Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ et $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, alors $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(e) Si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$, alors $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

Remarque 1.1.3.

(d) $\mu(A_n) \nearrow \mu(A)$.

(e) $\mu(A_n) \searrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

Démonstration :

(a) Soit A un ensemble tel que $\mu(A) < \infty$. Nous avons que $\mu(A) = \mu(A \bigcup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset) \implies \mu(\emptyset) = 0$ puisque $\mu(A) < \infty$.

(b) $A \subseteq B \implies \mu(b) = \mu(A \cup B \backslash A) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \implies \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(c) $\mu(B \backslash A) \geq 0$. En utilisant (b), nous avons que $\mu(B) \geq \mu(A)$.

(d) Soit $C_n = A_n \backslash A_{n-1}$ et $A_0 = \emptyset$. Alors $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Nous avons

$$\mu(A_n) = \mu(C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n) = \mu(C_1) + \mu(C_2) + \cdots + \mu(C_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k).$$

Alors $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k)$. Notez que $\sum_{k=1}^{n} \mu(C_k)$ est non-décroissante en n. Alors soit $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k) = \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k)$ est un nombre réel. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

(e) Soit $C_n = A_1 \backslash A_n$. Notez que $C_1 \subseteq C_2 \subseteq C_3 \subseteq \cdots$ et

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 \backslash A_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 \cap A_k^c) = A_1 \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) = A_1 \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c = A_1 \backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Donc par (d) nous avons

$$\mu\left(A_1 \backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \backslash A_n).$$

Notez que $A_n \subseteq A_1$ $\forall n$ et $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq A_1$. Donc par (b) nous avons

$$\mu\left(A_1 \backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \text{ et } \mu(A_1 \backslash A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n).$$

Alors

$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

□

Définition 1.1.5. Une **mesure extérieure** sur X est une fonction $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ telle que

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(2) Si $A \subseteq B$ alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(3) $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Exercice 1.1.1. Si μ est une mesure sur un σ-algèbre $\mathcal{M}$, alors μ satisfait (1), (2) et (3).

Définition 1.1.6. Soit μ^* une mesure extérierure, $E \subseteq X$ est **(μ^*)-mesurable** sii

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E)$$

pour tout $A \subseteq X$.

À partir de maintenant, soit $\mathcal{M} = \{E \subseteq X \ / \ E \text{ est mesurable}\}$.

Théorème 1.1.3. $\mu^*|_{\mathcal{M}} = \mu$ est une mesure sur le σ-algèbre $\mathcal{M}$.

Démonstration : Premièrement, puisque μ^* est une mesure extérieure, $\forall A, E \subseteq X$,

$$\mu^*(A) = \mu^*((A \cap E) \cup (A \backslash E)) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E).$$

Donc pour montrer que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E), \quad \forall A \subseteq X,$$

pour E donné, n'aurons qu'à montrer

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E), \ \forall A.$$

(i) Si $\mu^*(E) = 0$ alors $E \in \mathcal{M}$.

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E) &\leq \mu^*(E) + \mu^*(A), \ \text{puisque } A \cap E \subseteq E \text{ et } A \backslash E \subseteq A, \\ &= 0 + \mu^*(A) \\ &= \mu^*(A). \end{aligned}$$

(ii) $\emptyset \in \mathcal{M}$ puisque $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(iii) Si $E \in \mathcal{M}$ alors $E^c \in \mathcal{M}$;

$$\mu^*(A \cap E^c) + \mu^*(A \backslash E^c) = \mu^*(A \backslash E) + \mu^*(A \cap E) = \mu^*(A).$$

(iv) $X = \emptyset^c \in \mathcal{M}$.

(v) $E_1, E_2 \in \mathcal{M} \Longrightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \backslash E_1), \text{ parce que } E_1 \in \mathcal{M}, \\
\mu^*(A \backslash E_1) &= \mu^*((A \cap E_1) \cap E_2) + \mu^*((A \backslash E_1) \backslash E_2), \text{ puisque } E_2 \in \mathcal{M}, \\
\mu^*(A) &\geq \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \backslash E_1) \\
&= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*((A \backslash E_1) \cap E_2) + \mu^*((A \backslash E_1) \backslash E_2) \ (*).
\end{aligned}$$

Mais $(A \backslash E_1) \backslash E_2 = A \backslash (E_1 \cup E_2)$ et

$$[(A \backslash E_1) \cap E_2] \cup [A \cap E_1] = A \cap (E_1 \cup E_2).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
(*) &\geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) \\
(*) &\geq \mu^*([A \cap E_1] \cup [(A \backslash E_1) \cap E_2]) + \mu^*(A \backslash (E_1 \cup E_2)).
\end{aligned}$$

(vi) $E_1, \dots, E_N \in \mathcal{M} \Longrightarrow \cup_{n=1}^N E_n \in \mathcal{M}$ (Exercice)

(vii) Reste deux choses à démontrer: $\{E_n\}_{n=1}^\infty$, $E_n \in \mathcal{M} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^\infty E_n \in \mathcal{M}$ et que si les E_n sont disjoint alors

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n).$$

□

Lemme 1.1.2. Supposons que $E_1, \dots, E_N \in \mathcal{M}$ sont disjoint (pour paires) et $S_N = \bigcup_{n=1}^N E_n$. Alors

$$\mu^*(A \cap S_N) = \sum_{n=1}^N \mu^*(A \cap E_n), \ \forall A \subseteq X.$$

Démonstration : Par induction: Le cas $N = 1$ est trivial. Supposons pour N. Nous avons $N < \infty \Longrightarrow S_N \in \mathcal{M}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(A \bigcap S_{N+1}\right) &= \mu^*\left((A \bigcap S_{N+1}) \bigcap S_N\right) + \mu^*\left(\left(A \bigcap A_{N+1}\right) \backslash S_N\right) \\
&= \mu^*\left(A \bigcap S_N\right) + \mu^*\left(A \bigcap E_{N+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^N \mu^*\left(A \bigcap E_n\right) + \mu^*\left(A \bigcap E_{N+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N+1} \mu^*\left(A \bigcap E_n\right).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1.1. $E_1, \ldots, E_n, \cdots \in \mathcal{M}$, $E_i \bigcap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, alors

$$\mu^* \left(A \bigcap S \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* \left(A \bigcap E_n \right), \ \forall A \subseteq X.$$

Démonstration : $\mu^*(A \cap S) \geq \mu^*(A \cap S_N) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A \cap E_n)$. Laissez $N \longrightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap S) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) \\
\mu^*(A \cap S) &= \mu^* \left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \right) = \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n) \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n).
\end{aligned}$$

□

Démonstration du Théorème 1.1.3:

(vii) Soit $E_n \in \mathcal{M}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $A \subseteq X$. Par le lemme précédent, nous avons $\mu^*(A \cap S_n) \geq \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A \cap E_n)$. D'autre part, $S_N \subseteq S \Longrightarrow \mu^*(A \backslash S_N) \geq \mu^*(A \backslash S)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap S_N) + \mu^*(A \backslash S_N) \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \backslash S) \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \backslash S) \\
&= \mu^*(A \cap S) + \mu^*(A \backslash S), \text{ par le corollaire précédent.}
\end{aligned}$$

Ainsi l'union disjointe est dans $\mathcal{M}$. Par conséquent, $\mathcal{M}$ est un σ-algèbre.

(viii) Enfin, $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ est une mesure. En disjoint, $E_n \in \mathcal{M}$,

$$\mu^* \left(A \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n).$$

Posez $A = X$.

□

1.2 Mesure de Lebesgue

Définition 1.2.1. Soit $a, b \in \mathbb{R}^n$, $I_{a,b} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ a_i < x_i < b_i\}$.

Exemple 1.2.1.

(1) Pour $n = 1$: $I_{a,b} = (a, b)$.

(2) Pour $n = 2$: $I_{(-1,1),(0,1)} = (-1, 0) \times (1, 2)$.

Définition 1.2.2. $\lambda(I_{a,b}) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

Exemple 1.2.2.

(1) Pour $n = 1$: $\lambda((a, b)) = b - a$.

(2) Pour $n = 2$: $\lambda(I_{(-1,1),(0,2)}) = (0 - (-1)) \times (2 - 1) = 1$.

Définition 1.2.3. Mésure extérieure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$:

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(I_{a_n,b_n}\right) \ / \ \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{a_n,b_n} \supseteq A \right\}.$$

Remarque 1.2.1. Il existe toujours un tel recouvrement de A par des I_{a_n,b_n}.

Soit $I_n = I_{a_n,b_n}$.

Théorème 1.2.1. μ^* est une mesure extérieure.

Démonstration : $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$.

(i) $\mu^*(\emptyset) \geq 0$ et $0 \leq \mu^*(\emptyset) \leq \lambda((0, \epsilon)^n) = \epsilon^n$, $\forall \epsilon^0$. Alors $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Si $A \subseteq B$, $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{n} I_n$, alors $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{n} I_n$. Nous avons

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \text{inf sur un plus grand ensembles de nombres réel que } \mu^*(B) \\ &\leq \mu^*(B). \end{aligned}$$

(iii) Soit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$, il existe $I_{n,k}$ tel que $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$ et tel que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_{n,k}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Il existe une suite de $I_{n,k}$ telle que $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_{n,k}) \searrow \mu^*(A)$. Si on prend un élément assez près de $\mu^*(A_n)$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_{n,k}) - \frac{\epsilon}{2^n} \leq \mu^*(A_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_{n,k}).$$

De plus, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}\right) = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} I_{n,k}$ implique

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\leq \sum_{n,k=1}^{\infty} \lambda(I_{n,k}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_{n,k}) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon, \ \forall \epsilon > 0.
\end{aligned}$$

Alors, $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

$\square$

Corollaire 1.2.1. $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ est une mesure.

Définition 1.2.4. On appelle cette mesure la **mesure de Lebesgue** en n dimensions.

Remarque 1.2.2. $A \notin \mathcal{M}$ existe par mesures de Lebesgue, mais a des propriétés telles ques

$$\mu^*(A \bigcup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 1.2.5. Une mesure $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ est **complète** ssi $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = 0$ et

$$A \subseteq E \Longrightarrow A \in \mathcal{M}.$$

Remarque 1.2.3. Ceci oblige

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu(E) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0.$$

Proposition 1.2.1. La mesure de Lebesgue est complète.

Démonstration : Soit $E \in \mathcal{M}$, $A \subseteq E$, $\mu(E) = 0$. Alors, $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) = 0 \Longrightarrow \mu^*(A) = 0$. Puisque $\mu^*(A) = 0$, (i) du Théorème 1.1.3 implique $A \in \mathcal{M}$. $\square$

Pour le reste de la section, $\mu =$ mesure de Lebesgue est $\mathcal{M}_\mu =$ ensembles mesurables. Nous avons $E \in \mathcal{M}_\mu$ ssi $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E)$, $\forall A \subseteq X$.

Exercice 1.2.1. Soit I un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$. Alors $I \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$.

Corollaire 1.2.2. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$.

Puisque $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est le σ-algèbre engendré par les ouverts dans $\mathbb{R}$ (qui sont eux-mêmes engendré par des unions dénombrables d'intervalles).

Exemple 1.2.3. $[a, b] \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$. L'ensemble de Cantor est aussi dans $\mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$. Aussi $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$.

Proposition 1.2.2. Soit I un intervalle ouvert. Alors $I \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$.

Démonstration : Devons montrer que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap I) + \mu^*(A \backslash I),\ \forall \subseteq \mathbb{R} \text{ où } \mu^* = \text{mesure extérieure de Lebesgue.}$$

Nous avons déjà $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap I) + \mu^*(A \backslash I)$. Soit $\epsilon > 0$, il existe $I_n = I_{a_n, b_n}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon \quad \text{et} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supseteq A.$$

Puisque nous sommes en dimension 1, $I \cap I_n$ et $I_n \backslash I$ sont des intervalles, ou des unions des deux intervalles. It existe donc intervalles I'_n, I''_n, I'''_n (ouverts) tels que

$$\begin{aligned} I \cap I_n &\subseteq I'_n, \\ I_n \backslash I &\subseteq I''_n \bigcup I'''_n \text{ et} \\ \lambda(I'_n) + \lambda(I''_n) + \lambda(I'''_n) &\leq \lambda(I_n) + \frac{\epsilon}{2^n}. \end{aligned}$$

Avons $A \backslash I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (I \backslash I_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (I''_n \cup I'''_n)$ et $A \cap I \subseteq I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (I \cap I_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I'_n$. Par la sous-additivité de μ^*, nous avons

$$\begin{aligned} \mu^*(A \backslash I) + \mu^*(A \cap I) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(I'_n) + \mu^*(I''_n) + \mu^*(I'''_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I'_n) + \lambda(I''_n) + \lambda(I'''_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) + \frac{\epsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) + \epsilon \\ &\leq \mu^*(A) + 2\epsilon. \\ \mu^*(A \backslash I) + \mu^*(A \cap I) &\leq \mu^*(A) + 2\epsilon, \text{ for every } \epsilon > 0, \text{ alors} \mu^*(A \backslash I) + \mu^*(A \cap I) \qquad \leq \mu^*(A). \end{aligned}$$

Par conséquent, $I \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$. $\square$

Corollaire 1.2.3. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$.

Démonstration : $\mathcal{B}(\mathbb{R}) =$ ensemble de Borel $=$ σ-algèbre engendré par les ouverts. Puisque les intervalles ouverts dans $\mathbb{R}$ sont mesurables et que $\mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$ est un σ-algèbre, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_\mu(\mathbb{R})$. $\square$

Proposition 1.2.3. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ l'espace mesurable, μ complete et $A \in \mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}_A = \{E \cap A \ / \ E \in \mathcal{M}\}$, alors $\mathcal{M}_A$ est un σ-algèbre et $\tilde{\mu} = \mu|_{\mathcal{M}_A}$ est une mesure complète.

1.3 Fonctions mesurables

Convention: $\mu =$ mesure quelconque, $\mathcal{M} =$ domaine $\mu \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Définition 1.3.1. Soit $f : X \longrightarrow Y$, où Y est un espace topologique. f est **mesurable** ssi pour tout ouvert $V \subseteq Y$, $f^{-1}(V)$ est mesurable.

Proposition 1.3.1. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f est mesurable par rapport à la mesure de Lebesgue.

Démonstration : $V \subseteq \mathbb{R}$ ouvert $\Longrightarrow f^{-1}(V) \subseteq I$ ouvert $\Longrightarrow f^{-1}(V)$ mesurable. $\square$

Exemple 1.3.1. Soit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$. Soit V ouvert,

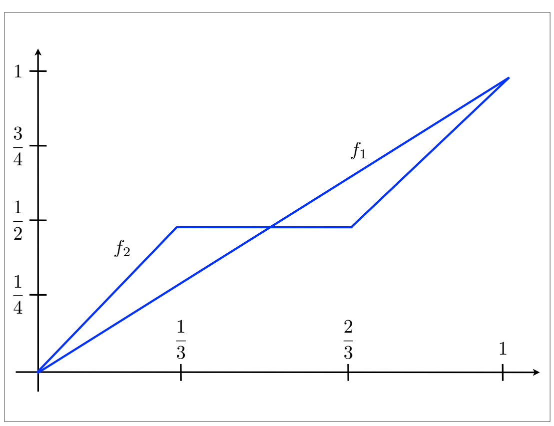
$$f^{-1}(V) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } 0 \in V \text{ et } 1 \in V, \\ \mathbb{Q} & \text{si } 0 \in V \text{ et } 1 \notin V, \\ \mathbb{Q}^c & \text{si } 0 \notin V \text{ et } 1 \in V, \\ \emptyset & \text{si } 0 \notin V \text{ et } 1 \notin V \end{cases}$$

Exercice 1.3.1. Les fonctions continues par morceaux sont mesurables.

Exemple 1.3.2. Soit (f_n) la suite de fonctions donnée par

$$f_1(x) = x,$$
$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ la fonction $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Nous avons $f'(x) = 0$ ssi $x \notin C$, où C est l'ensemble de Cantor. Notez que $f(x)$ n'est même pas continue pour $x \in C$ et que $f(x)$ est monotone (non décroissant). On verra plus tard que f es mesurable.



Proposition 1.3.2. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $h \circ f$ est mesurable.

Démonstration : $V \subseteq \mathbb{R}$ ouvert.

$$(h \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(h^{-1}(V)).$$

$h^{-1}(V)$ ouvert parce que h est continue et V est ouvert. Alors, $f^{-1}(h^{-1}(V))$ est mesurable parce que f est mesurable.

□

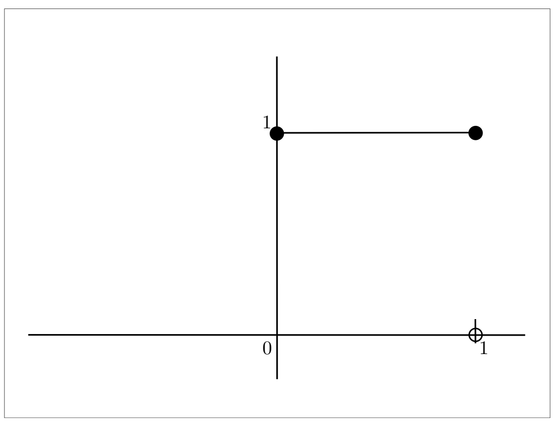
Exemple 1.3.3. Si $f(x)$ est mesurable, $cf(x)$ l'est pour tout $c \in \mathbb{R}$. La fonction $g(x) = (f(x))^2 - 1$ est aussi mesurable.

Définition 1.3.2. Soit $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ avec la topologie standards. Par exemple, $(1, \infty]$ et $(1, \infty)$ sont ouverts, est $1/x^2$ est une fonction continue.

Définition 1.3.3. Soit $E \subseteq X$. Sa **fonction charactéristique** est

$$\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Exemple 1.3.4. $\chi_{[0,1]}(x)$.



Proposition 1.3.3. χ_E est mesurable ssi E l'est.

Démonstration : $\chi_E^{-1}(V) = \begin{cases} E & \text{si } 1 \in V, \\ \emptyset & \text{si } 1 \notin V. \end{cases}$ □

Théorème 1.3.1. Soit $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, Y un espace topologique, et $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow Y$ continue. Alors, la fonction $h : X \longrightarrow Y$ donnée par $x \mapsto \Phi(u(x), v(x))$ est mesurable.

Corollaire 1.3.1. $\Phi(u,v) = u+v \implies u,v$ mesurable $\implies u+v$ l'est aussi. Similairement, $\Phi(u,v) = u\cdot v$ $\implies u,v$ mesurables $\implies u\cdot v$ mesurable.

Dans le deux cas précédent, nous pouvons prendre $Y=\mathbb{R}$ ou $Y=[0,+\infty]$. Ne pouvons pas prendre $Y=[-\infty,+\infty]$ parce que on pourrait avoir $u(x)+v(x)=\infty-\infty$.

Soit $\mathcal{M}(X,Y)$ l'ensemble de fonctions mesurables de X à Y. On a $\mathcal{M}(X,\mathbb{R})$ forme un algèbre.

Exemple 1.3.5. $Y=\mathbb{C}$, $\Phi(u,v)=u+iv\in\mathbb{C}$. Comme $u+iv$ est mesurable, nous avons que $U\subseteq\mathbb{C}$ ouvert $\implies f^{-1}(U)$ mesurable. Alors $\mathcal{M}(X,\mathbb{C})$ est aussi un algèbre et $f\in\mathcal{M}(X,\mathbb{C})$. Par conséquent $\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f),|f|\in\mathcal{M}(X,\mathbb{R})$.

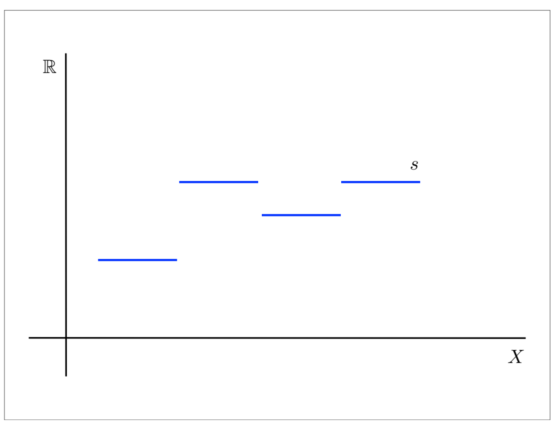
Démonstration du Théorème 1.3.1: Φ est continue $\implies$ $N'avons$ qu'à montrer que $\beta : X\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $(\beta(x)=(u(x),v(x)))$ est mesurable si u est v le sont. Soit $R=I_1\times I_2$ le produit d'intervalles ouverts. L'ensemble $\beta^{-1}(R)=u^{-1}(I_1)\cap v^{-1}(I_2)$ est l'intersection d'ensembles mesurables. Tout $V\subseteq\mathbb{R}^2$ peut être écrit $V=\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i$. Alors $\beta^{-1}(V)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\beta^{-1}(R_i)$ est mesurable.

□

Définition 1.3.4. Une fonction simple est un $s\in\mathcal{M}(X,\mathbb{C})$ ou $s\in\mathcal{M}(X,\mathbb{R})$ tel que $s(X)$ est un ensemble fini. Allons définir

$$\int_X s\,d\mu = \sum_{\alpha_i\in s(X)}\alpha_i\mu(s^{-1}(\alpha_i)).$$

Exemple 1.3.6. $\chi_{\mathbb{Q}}$ est χ_E sont simples, pour tout $E\in\mathcal{M}$. Soit s la fonction donnée par le graphique suivant:



Alors,

$$\int s = 1\cdot\mu(s^{-1}(1)) + 2\cdot\mu(s^{-1}(2)) + 3\cdot\mu(s^{-1}(3)) + 5\cdot\mu(s^{-1}(5)) + 0\cdot\mu(s^{-1}(0)).$$

Convention: Si $a\geq 0$, $a\cdot\infty = \begin{cases}\infty & \text{si } a>0,\\ 0 & \text{si } a=0.\end{cases}$

Remarque 1.3.1. Dans $[-\infty, \infty]$, $a_n = \begin{cases} \infty & \text{si } n = 2k, \\ 1 & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$ est une suite, $b_n = n^2$ n'est pas une suite convergente.

Définition 1.3.5. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite. $a_n \in [-\infty, \infty]$, $b_k = \sup_{n \geq k}\{a_n\}$.

$$\overline{\lim} a_n = \limsup a_n = \lim_{k \to \infty} b_k = \inf_k \{b_k\}.$$

Remarque 1.3.2.

(1) $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} b_k$ existe et est egal à $\inf_k\{b_k\}$.

(2) il existe un sous-suite a_{n_k} telle que $a_{n_k} \longrightarrow \limsup a_n$ et $\limsup a_n$ est le réel le plus grand ayant cette propriété.

(3) $\liminf a_n = \underline{\lim} a_n = \sup_k \{\inf_{n\geq k}(a_n)\} = \lim_{k\to\infty} \{\inf_{n \geq k}(a_n)\}$.

(4) $\liminf a_n = -\limsup(-a_n)$.

Proposition 1.3.4. Soit $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, et $\mu =$ les ensemble mesurables. Si $f^{-1}((-\alpha, \infty])$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, alors f est mesurable.

Démonstration : $\Omega = \{E \subseteq \overline{\mathbb{R}} \ / \ f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$.

But : Ω contient tout les ouverts. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha_n < \alpha$ tel que $\alpha_n \longrightarrow \alpha$. Par l'hypothése, $(\alpha_n, \infty] \in \Omega$ $\forall \alpha_n$. Alors,

$$[-\infty, \alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty, \alpha_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((\alpha_n, \infty]^c)$$

$$f^{-1}((-\infty, \alpha)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty, \alpha_n]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left((\alpha_n, \infty]^c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [X \backslash f^{-1}((\alpha_n, \infty])] \in \mathcal{M},$$

puisque $\mathcal{M}$ est un σ-algèbre.

Nous avons $(-\infty, \alpha) \in \mathcal{M}$ et

$$f^{-1}((-\alpha, \beta)) = f^{-1}([-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty]) = f^{-1}([-\infty, \beta)) \cap f^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathcal{M}.$$

Par conséquent $(\alpha, \beta) \in \Omega$. Tout ouvert contenu dans $\overline{\mathbb{R}}$ est l'union dénombrable d'intervalles ouverts. Alors U ouvert $\Longrightarrow U \in \Omega$.

□

Théorème 1.3.2. Soit $f_n : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ mesurables et

$$g(x) = \sup_{n \geq 1}(f_n(x)) \quad \text{et} \quad h(x) = \overline{\lim_n}(f_n(x)).$$

Alors h et g sont mesurables.

Démonstration : $g^{-1}((\alpha,\infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((\alpha,\infty])$, $g(x) \in (\alpha,\infty]$. Mais $g(x) \geq f_n(x)$ $\forall n$, et puisque $g(x)$ est le supremum, il existe n tel que $f_n(x) \geq \alpha$. Alors $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$. Par contre, si $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ alors il existe n tel que $f_n(x) > \alpha$. Nous avons $g(x) = \sup f_n(x) > \alpha$ et donc $x \in g^{-1}((\alpha,\infty])$. Puisque les f_n sont mesurables, $g^{-1}((\alpha,\infty])$ est un ensemble mesurable pour tour α. Alors g est aussi mesurable.

Même chose aurai pour les infimums (pouvez utiliser que $\inf(a_n) = -\sup(-a_n)$). Et

$$h(x) = \overline{\lim}_n f_n(x) = \inf_{k\geq 1}\left\{\sup_{n\geq k} f_n(x)\right\}.$$

Par conséquent h est mesurable. $\square$

Corollaire 1.3.2.

(i) Si $f_n \in \mathcal{M}(X,\overline{\mathbb{R}})$ $\forall n$ alors $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathcal{M}(X,\overline{\mathbb{R}})$, si elle existe.

(ii) Si $f_n \in \mathcal{M}(X,\mathbb{C})$ $\forall n$ alors $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathcal{M}(X,\mathbb{C})$.

(iii) $f, g \in \mathcal{M}(X,\overline{\mathbb{R}}) \Longrightarrow \max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in \mathcal{M}(X,\overline{\mathbb{R}})$.

Démonstration :

(i) Si $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ alors $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \overline{\lim}_n f_n(x)$.

(ii) $f_n(x) = u_n(x) + iv(x)$ où $u_n(x), v_n(x) \in \mathcal{M}(X,\mathbb{R})$. Appliquez (i).

(iii) $\max\{f(x), g(x)\} = \sup\{f(x), g(x)\} \in \mathcal{M}(X, [-\infty,\infty])$. Même chose pour min $\{f,g\}$.

$\square$

Définition 1.3.6. Soit $f \in \mathcal{M}(X,\overline{\mathbb{R}})$. Posons $f^+ = \max\{f,0\}$ et $f^- = -\min\{f,0\}$.

Remarque 1.3.3. $f^+(x) \geq 0$, $f^-(x) \geq 0$ $\forall x$. Notez que $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$.

Proposition 1.3.5. Si $f = g - h$, $g \geq 0$, $h \geq 0$, alors $f^+ \leq g$ et $f^- \leq h$.

Démonstration : $f \geq g$ et $g \geq 0 \Longrightarrow f^+ = \max\{f,0\} \leq g$. Même chose pour h. Si $f \geq 0$, nous allons définie

$$\int_X f d\mu = \sup_{s\leq f}\left(\int_X s d\mu\right)$$

où s est une fonction simple.

$\square$

Théorème 1.3.3. Soit $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable. Il existe des fonctions simples s_n sur X telles que

(1) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$.

(2) $s_n(x) \longrightarrow f(x)\ \forall x \in X$.

Démonstration : Prenez

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & \text{si } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{i}{2^n},\ i = 1, \ldots, n2^n. \\ n & \text{si } f(x) \geq n. \end{cases}$$

$s_n(x)$ est simple et mesurable si $f(x)$ l'est. De plus, $0 \leq s_n(x) \leq f(x)$, $0 \leq f(x) - s_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$ si $f(x) < n$. Si $f(x) < \infty$, lorsque $n \longrightarrow \infty$, nous avons $s_n(x) \longrightarrow f(x)$. Si $f(x) = \infty$, alors $s_n(x) = n \longrightarrow \infty = f(x)$. Ne reste qu'à montrer que $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$. Si $f(x) \geq n+1$, $s_n(x) = n \leq s_{n+1}(x) = n+1$. Si $n \leq f(x) \leq n+1$ alors $s_n(x) = n = \frac{2^{n+1}n}{2^{n+1}} \leq s_{n+1}(x)$. Enfin, $f(x) \leq n$, il existe i, $1 \leq i \leq 2^n n$ tel que

$$s_n(x) = \frac{i-1}{2^n} = \frac{2(i-1)}{2^{n+1}}.$$

Puisque, dans ce cas, $\frac{i-1}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{i}{2^n}$. Nous avons que $\frac{2(i-1)}{2^{n+1}} \leq f(x) \leq \frac{2i}{2^{n+1}}$. Alors,

$$s_{n+1}(x) \geq \frac{2(i-1)}{2^{n+1}} = s_n(x).$$

$\square$

1.4 Intégration

Définition 1.4.1. Soit $s : X \longrightarrow [0, +\infty)$ une fonction simple (toujours mesurable)

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}.$$

Remarque 1.4.1. $A_i = s^{-1}(\alpha_i)$.

Alors on définit l'integrale de Lebesgue de s sur $E \subseteq X$, E mesurable, est donnée par

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E).$$

Exemple 1.4.1. $s(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 3 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases} = \frac{1}{2}\chi_{\mathbb{Q}} + 3\chi_{\mathbb{Q}^c}$. Si μ est la mesure de Lebesgue,

$$\int_{[0,1]} s d\mu = \frac{1}{2}\mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) + 3\mu(\mathbb{Q}^c \cap [0,1]) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3,$$

$$\int_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2}\mu(\mathbb{Q}) + 3\mu(\mathbb{Q}^c) = \infty.$$

Définition 1.4.2 (Integrale de Lebesgue)**.** Soit $f \in \mathcal{M}(X, [0, +\infty])$ et $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_E f d\mu = \sup\left\{\int_E s d\mu \ / \ s \text{ simple et } 0 \leq s \leq f\right\}$$

Exercice 1.4.1. Si f est simple, le suprémum est atteint par f.

Convention : $m^n =$ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, $m^0 =$ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$.

Exemple 1.4.2. $X = \mathbb{N}$, $\mu = m^0$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Soit $f(n) = 1/2^n$ et $s_N = \begin{cases} f(n) & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$. Alors s_N est simple, et $s_N \leq f$. Nous avons

$$\int_X s_N d\mu = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\mu(\{n\}) + 0 \cdot \mu((N, +\infty)) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}$$

$$\int_X f d\mu \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}$$

$$\int_X f d\mu \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

En fait, on peut montrer que $\forall \epsilon > 0$ il existe K tel que

$$N > K \Longrightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \geq \int_X f d\mu - \epsilon \Longrightarrow \int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ } (\textbf{Exercice})$$

Convention: $f, g \in \mathcal{M}(X, [0, +\infty])$ et $E, A, B \in \mathcal{M}$.

Proposition 1.4.1.

(i) Si $0 \leq f \leq g$ alors $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

(ii) Si $A \subseteq B$ et $f \geq 0$ alors $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.

(iii) Si $f \geq 0$ et $c \geq 0$ constante, alors $\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu$.

(iv) Si $f(x) = 0 \ \forall x \in E$, alors $\int_E f d\mu = 0$.

(v) Si $\mu(E) = 0$ alors $\int_E f d\mu = 0$.

(vi) Si $f \geq 0$ alors $\int_E f d\mu = \int_X \chi_E \cdot f d\mu$.

Démonstration :

(i) Si $s \leq f$ alors $s \geq g$. Donc $\int_E f d\mu$ est un suprémum sur un plus petit ensemble que $\int_E g d\mu$. Alors $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

(ii) Soit $s \leq f$ sur B. Alors

$$\int_A s d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A \cap A_i) \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(B \cap A_i) = \int_B s d\mu$$

(iii) $s \leq f \Longleftrightarrow cs \leq cf$.

$$\begin{aligned} \int_E c f d\mu &= \sup_{cs \leq cf} \int_E cs d\mu = \sup_{s \leq f} \left(c \int_E s d\mu \right) = c \sup_{s \leq f} \int_E s d\mu, \text{ car } c \geq 0 \\ &= c \int_E f d\mu \end{aligned}$$

(iv) $f(x) = 0 \ \forall x \in E \Longrightarrow f(x)$ est une fonction simple sur E.

$$\int_E f d\mu = 0 \cdot \mu(E) = 0.$$

(v) $\mu(E) = 0$, $s \leq f$ sur E. Alors

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i) = 0 \text{ car } \mu(E \cap A_i) = 0.$$

(vi) $\int_X \chi_E \cdot f d\mu = \sup_{s\leq \chi_E\cdot f} \int_X s d\mu$ puisque $\chi_E = 0$, $x \notin E$, on peut se restreindre aux s telles que $s = 0$ sur E^c. Alors

$$\int_X \chi_E \cdot f d\mu = \sup_{s\leq f} \int_E s d\mu = \int_E f d\mu.$$

$\square$

Remarque 1.4.2. Donnée $f \geq 0$, $\varphi(E) = \int_E f d\mu$ est une mesure.

Théorème 1.4.1 (Convergence Monotone)**.** Soit $f_n \in \mathcal{M}(X, [0, +\infty])$ telles que

(a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \cdots \ \forall x \in X$,

(b) $f_n(x) \longrightarrow f(x) \ \forall x \in X$.

Alors $\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu$.

Remarque 1.4.3. $f(x) \in \mathcal{M}(X, [0, +\infty])$ puisqu'il est la limite de fonctions mesurables.

Démonstration : $\int f_n \leq \int f_{n+1}$ puisque $f_n \leq f_{n+1}$. Alors il existe $\alpha \in [0, +\infty]$ tel que $\int_X f_n d\mu \longrightarrow \alpha$. Donc $f \in \mathcal{M}(X, [0, +\infty]) \Longrightarrow \int_X f d\mu$ est définie et $f_n \leq f \Longrightarrow \int f_n \leq \int f$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors $\alpha \leq \int_X f d\mu$. Soit $0 \leq s \leq f$, s simple, $0 < c < 1$ fixé. Posons

$$E_n = \{x \ / \ f_n(x) \geq cs(x)\} = \{x \ / \ |f_n(x) - cs(x)| \geq 0\} \in \mathcal{M}.$$

Notez que $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \cdots$ et $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ puisque si $f(x) = 0$ alors $s(x) = 0$, et donc $x \in E$. Si $f(x) > 0$, alors $f(x) > cs(x)$ (puisque $c < 1$). Cela implique qu'il existe n tel que $f_n(x) \geq cs(x)$ (puisque $f_n(x) \longrightarrow f(x)$). De plus

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu$$

Prenez $n \to \infty$,

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq c \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s d\mu.$$

Puisque $E_n \subseteq E_{n+1}$ et $s \geq 0$, la suite $\int_{E_n} s d\mu$ est monotone. Donc $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s d\mu = \int_X s d\mu$. Nous avons $\alpha \geq c \int_X s d\mu$, $\forall c \in (0, 1)$ et $\forall 0 \leq s \leq f$. Alors $\alpha \geq \int_X s d\mu \ \forall 0 \leq s \leq f$. Donc

$$\alpha \geq \sup_{0\leq s\leq f} \int_X s d\mu = \int_X f d\mu$$

Puisqu'on avait déjà $\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$, avons terminé.

$\square$

Corollaire 1.4.1. Pouvons prendre les s_i du Théorème 1.3.3 pour définir l'integrale de $f \geq 0$, c'est à dire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Proposition 1.4.2. Si $s, t \in \mathcal{M}(X, [0, +\infty])$ sont simples, alors

$$\int_X (s+t)d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$$

Démonstration : $s = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$, $t = \sum_{k=1}^m b_k \chi_{F_k}$. Avons que $E_j = \bigcup_{k=1}^m (E_j \cap F_k)$ puisque $\bigcup_{k=1}^m F_k = X$. Aussi $F_k = \bigcup_{j=1}^n (E_j \cap F_k)$. Notez que $F_i \cap F_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Même chose pour les E_i. Alors

$$\begin{aligned}
\int s + \int f &= \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^m b_k \mu(F_k) \\
&= \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^m \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^m b_k \sum_{j=1}^n \mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_j + b_k) \mu(F_k \cap E_j) \\
&= \int (s+t),
\end{aligned}$$

puisque l'image de la fonction $\mathrm{Im}(s+t) = \mathrm{Im}(s) + \mathrm{Im}(t)$ et $\bigcup_{j,k} (F_k \cap E_j) = X$, et cette union est disjoint.

□

Corollaire 1.4.2. $f, g \in \mathcal{M}(X, [0, +\infty]) \Longrightarrow \int f + g = \int f + \int g$.

Démonstration : Prenons $s_n \nearrow f$, $t_n \nearrow g$, alors $(s_n + t_n) \nearrow (f+g)$ et $\int (s_n + t_n) = \int s_n + \int t_n$. Le Théorème de convergence monotone implique que

$$\begin{aligned}
\int (f+g) &= \int \lim_{n\to\infty} (s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} \int (s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\int s_n + \int t_n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int s_n + \lim_{n\to\infty} \int t_n = \int \lim_{n\to\infty} s_n + \int \lim_{n\to\infty} t_n = \int f + \int g.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.4.3. $f_n \in \mathcal{M}(X, [0, +\infty])$, $\forall n$ et $f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$. Alors $\int f(x) = \sum_{n=1}^\infty \int f_n(x)$.

Démonstration : $g_N = \sum_{n=1}^{N} f_n \in \mathcal{M}(X, [0, +\infty])$, $g_{N+1}(x) \geq g_N(x)$, $\forall x \in X$ puisque

$$g_{N+1}(x) - g_N(x) = f_{N+1}(x) \geq 0.$$

Notez que $g_N \longrightarrow f$ ponctuellement. Alors

$$\int f = \int \lim_{N\to\infty} g_N = \lim_{N\to\infty} \int g_N = \lim_{N\to\infty} \int \sum_{n=1}^{N} f_n$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \int f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

$\square$

Corollaire 1.4.4. Si $a_{ij} \geq 0$ $\forall i, j \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$.

Démonstration : $X = \mathbb{N}$, $\mu = m^0$ (comptage), $f_j(i) = a_{ij}$. Par le corollaire précédent,

$$\int_{\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} f_j(i) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f_j(i),$$

mais $\int_{\mathbb{N}} g(n) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)$. L'egalité précédent implique que $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f_j(i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_j(i)$ puisque $f_j(i) = a_{ij}$.

$\square$

Théorème 1.4.2 (Lemme de Fatou)**.** Soit $f_n \in \mathcal{M}(X, [0, +\infty])$, alors

$$\int_X \lim_{n\to\infty} \inf(f_n) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu.$$

Remarque 1.4.4. $\lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$ est défini.

Démonstration : Posons $g_k(x) = \inf_{i\geq k}(f_i(x))$. Nous avons $g_k(x) \leq f_k(x)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Alors $\int g_k \leq \int f_k$, rappelez que $g_k \in \mathcal{M}(X, [0, +\infty])$ puisque c'est le inf de fonctions mesurables. Donc

$$\lim_{k\to\infty} \inf \int g_k \leq \lim_{k\to\infty} \inf \int f_k.$$

Mais $g_{k+1} \geq g_k \geq 0$ $\forall k$. Par conséquent la limite $\lim_{k\to\infty} g_k(x)$ existe et donc

$$\lim_{k\to\infty} \inf(g_k) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\inf_{i\geq k} f_i(x) \right) = \lim_{k\to\infty} \inf f_k(x).$$

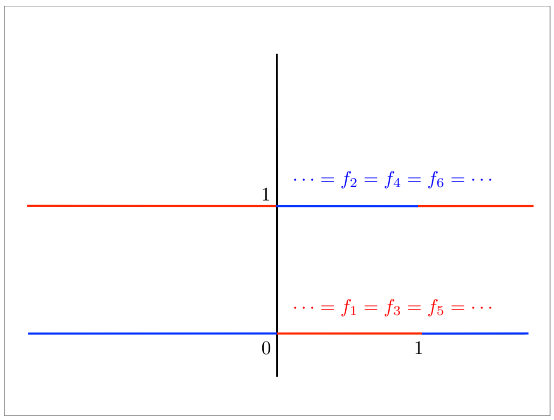
Avons donc que

$$\int \lim_{k\to\infty} \inf f_k = \int \lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty} \int g_k \text{ par convergence monotone}$$
$$\leq \lim_{k\to\infty} \inf \int f_k.$$

□

Remarque 1.4.5. Prenons $X = \mathbb{R}$, $\mu = m$, $f_n = \chi_{[0,1]}$ si n est pair, $f_n = 1 - \chi_{[0,1]}$ si n est impair. Notez que

$$\int_{\mathbb{R}} f_{2k} dm = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} f_{2k+1} dm = +\infty.$$



De plus,

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int f_n = 1 = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{i\geq n} \int f_i \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{1, +\infty\} \right),$$
$$\lim_{n\to\infty} \inf f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \inf_{i\geq n} (f_n(x)) \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \inf_{i\geq n} \{0,1\} \right\} = 0,$$
$$\implies \int \liminf f_n = 0 < 1 = \liminf \int f_n.$$

Soit $f \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}})$, $f = f^+ - f^-$, 0ù $f^+ = \max\{f, 0\}$ et $f^- = -\min\{f, 0\}$.

Définition 1.4.3. Soit $f \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}})$. Nous définissons

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

si cette différence n'est pas $\infty - \infty$.

Convention : Si on écrit $\int f$ on suppose implicitement que celle-ci est définie.

Définition 1.4.4. Soit $Y \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ou $Y = \mathbb{C}$. Nous définissons

$$L^1(X, \mu, Y) = \left\{ f \in \mathcal{M}_\mu(X, Y) \ / \ \int_X |f| d\mu < \infty \right\}$$

Proposition 1.4.3. Si $f \in L^1$ alors $\int_X f d\mu$ est définie.

Démonstration : $|f| = f^+ f^-$ implique que $|f| \geq f^\pm$. Alors

$$\int_X |f| d\mu \geq \int_X f^+ d\mu \quad \text{et} \quad \int_X |f| d\mu \geq \int_X f^- d\mu.$$

Car $\int_X |f| d\mu < \infty$ nous avons $\int_X f^+ d\mu < \infty$ et $\int_X f^- d\mu < \infty$. Alors $\int_X f d\mu < \infty$.

□

Définition 1.4.5. Si $f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C})$, posons $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$. On déninit

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu$$

si ces intégrales et cette somme sont définie.

Proposition 1.4.4. Si $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ alors $\int_X f d\mu$ est définie.

Démonstration : Semblable à celle de la Proposition 1.4.3 mais on utilise $|f| \geq |u| \geq u^\pm$ et $|f| \geq |v| \geq v^\pm$. (Rappelez que $|f| = \sqrt{f \cdot \overline{f}} = \sqrt{u^2 + v^2}$).

□

Proposition 1.4.5. Supposons que $f, g \in L^1(X, \mu, Y)$ où $Y = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\alpha, \beta \in Y$. Alors $\alpha f + \beta g \in L^1(X, \mu, Y)$ et

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

Démonstration : $\alpha f + \beta g$ mesurable et $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha f| + |\beta g| = |\alpha||f| + |\beta||g|$ implique

$$\int_X |\alpha f + \beta g| \leq \int_X (|\alpha||f| + |\beta||g|) d\mu = |\alpha| \int_X |f| d\mu + |\beta| \int_X |g| d\mu.$$

Alors $\alpha f + \beta g \in L^1(X, \mu, Y)$. Maintenant, nous allons démontrer que $f, g \in L^1(X, \mu, Y)$ implique que $\int f + g = \int f + \int g$ et $\int \alpha f = \alpha \int f$.

Supposons $f, g \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$. Soit $h = f + g$. Nous avons

$$\begin{aligned} h^+ - h^- &= f^+ - f^- + g^+ - g^- \\ h^+ + f^- + g^- &= f^+ + g^+ + h^+ \\ \int h^+ + f^- + g^- &= \int f^+ + g^+ + h^-. \end{aligned}$$

Puisqu'il n'y a que des fonctions positives, nous avons

$$\begin{aligned} \int h^+ + \int f^- + \int g^- &= \int f^+ + \int g^+ + \int h^- \\ \int h^+ - \int h^- &= \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- \\ \int h &= \int f + \int g. \end{aligned}$$

Si $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$ et $\alpha \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \int \alpha f d\mu = \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu = \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu \\ = \alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu = \alpha \int f d\mu. \end{aligned}$$

Si $\alpha < 0$ alors $\alpha = -|\alpha|$ et

$$\begin{aligned} \int \alpha f d\mu = \int -|\alpha| f d\mu &= |\alpha| \int -f d\mu \\ &= |\alpha| \left[\int (-f)^+ d\mu - \int (-f)^- d\mu \right] \\ &= |\alpha| \left[\int f^- d\mu - \int f^+ d\mu \right] \\ &= -|\alpha| \left[\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right] \\ &= \alpha \int d\mu. \end{aligned}$$

Si $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \int_X \alpha f d\mu = \int_X \alpha(u + iv) d\mu &= \int_X (\alpha u + i\alpha v) d\mu \\ &= \int_X \alpha u d\mu + \int_X \alpha v d\mu = \alpha \int_X u d\mu + \alpha i \int_X v d\mu \\ &= \alpha \left[\int_X u d\mu + i \int_X v d\mu \right] \\ &= \alpha \int_X f d\mu. \end{aligned}$$

Si $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$, alors

$$\begin{aligned}
\int_X if d\mu = \int_X i(u+iv)d\mu &= \int_X (iu - v)d\mu \\
&= \int_X -v d\mu + i\int_X u d\mu = -\int_X v d\mu + i \int_X u d\mu \\
&= i\left(\int_X u d\mu + i\int_X v d\mu\right) \\
&= i\int_X f d\mu.
\end{aligned}$$

Si $f, g \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ et $f = u + iv$, $g = s + it$, alors

$$\begin{aligned}
\int f + g = \int (u+iv) + (s+it) &= \int (s+u) + i(v+t) \\
&= \int u + s + i \int v + t \\
&= \int u + \int s + i\left(\int v + \int t\right) \\
&= \left[\int u + i \int v\right] + \left[\int s + i\int t\right] \\
&= \int f + \int g.
\end{aligned}$$

Enfin, si $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$, $\alpha = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\int \alpha f = \int (a+ib) f &= \int af + ibf \\
&= \int af + \int ibf = a\int f + ib \int f \\
&= (a+ib)\int f = \alpha \int f.
\end{aligned}$$

$\square$

Convention : $L^1 = L^1(X, \mu, Y)$ où $Y = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 1.4.6. Si $f \in L^1$, $E \subseteq X$ est mesurable, alors

$$\left|\int_E f d\mu\right| \leq \int_E |f| d\mu$$

Démonstration : $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$. Nous savons que $-|f| \leq f \leq |f|$ $\forall x \in X$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq f + |f| \leq 2|f| \\ 0 &\leq \int (f + |f|) d\mu \leq \int 2|f| d\mu \\ 0 &\leq \int f + \int |f| \leq 2 \int |f| \\ -\int |f| \leq \int f &\leq \int |f| \implies \left| \int f \right| \leq \int |f|. \end{aligned}$$

Si $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ posons $z = \int_E f d\mu$. Sans pertre $g \neq 0$. Posons $\alpha = \frac{\bar{z}}{|z|}$. Alors $|\alpha| = 1$ et $\alpha z = \frac{\bar{z} z}{|z|} = |z| \in \mathbb{R}^+$. Posons $u = \mathrm{Re}(\alpha f)$ et $v = \mathrm{Im}(\alpha f)$. Alors $u \leq |\alpha f| = |\alpha||f| = |f|$ avec egalité ssi αf est une fonction réele. Donc

$$\begin{aligned} \left| \int_E f d\mu \right| &= |z| = \alpha z = \alpha \int_E f d\mu = \int_E \alpha f d\mu \\ &= \int_E (u + iv) d\mu = \int_E u d\mu + i \int_E v d\mu, \text{ où } \int_E v d\mu = 0 \\ &\leq \int_E |\alpha f| d\mu = \int_E |\alpha||f| d\mu \\ &= \int_E |f| d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 1.4.6. Si $f, g \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$ alors $f \leq g \implies \int_E f \leq \int_E g$. En fait

$$f \leq g \implies 0 \leq g - f \implies 0 \leq \int_E (g - f) = \int_E g - \int_E f \implies \int_E \leq \int_E g.$$

Théorème 1.4.3 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)**.** Soit $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C})$ telles que il existe $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x \in X$. S'il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que $|f_n(x) \leq g(x)|$ $\forall x \in X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $f \in L^1$ et nous avons que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Démonstration : Nous avons

$$\begin{aligned} |f_n(x)| \leq |g(x)| \; \forall x \in X &\implies |f(x)| \leq |g(x)| \; \forall x \in X \\ &\implies \int_X |f| d\mu \leq \int_X |g| d\mu < \infty \\ &\implies f \in L^1. \end{aligned}$$

De plus, $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + g = 2g \Longrightarrow 0 \leq 2g - |f_n - f|$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_X 2g d\mu &= \int_X \lim_{n\to\infty} \inf(2g - |f_n - f|) d\mu \\
&\leq \underline{\lim}_n \left(\int_X 2g - |f_n - f| d\mu \right), \text{ par le Lemme de Fatou} \\
&= \underline{\lim}_n \left(\int_X 2g d\mu - \int_X |f_n - f| d\mu \right) \\
&= \int_X 2g d\mu + \underline{\lim}_n \left(- \int_X |f_n - f| d\mu \right) \\
&= \int_X 2g d\mu - \overline{\lim}_n \int_X |f_n - f| d\mu.
\end{aligned}$$

Alors $\int_X 2g d\mu \leq \int_X 2g d\mu - \overline{\lim}_n \int_X |f_n - f| d\mu$. Puisque $g \in L^1$, $\int_X 2g < \infty$, et on peut le soustraire

$$-\overline{\lim}_n \int_X |f_n - f| d\mu \geq 0 \Longrightarrow \overline{\lim}_n \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0.$$

Mais

$$0 \leq \underline{\lim}_n \int_X |f_n - f| d\mu \leq \overline{\lim}_n \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0.$$

Comme $\overline{\lim} = \underline{\lim}$, la suite converge vers leur valuer commune. Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

Enfin, $0 \leq \left| \int f_n - \int f \right| = \left| \int (f_n - f) \right| \leq \int |f_n - f|$. Donc

$$0 \leq \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0.$$

Alors $\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu$. □

Remarque 1.4.7. Soit $f \in C^0[a,b]$ continue. Alors $\int_a^b |f| dx = 0 \Longrightarrow f \equiv 0$. Mais c'est pas vrai pour fonctions mesurables :

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} dm = \int_{\mathbb{Q}} 1 dm = 0 \text{ puisque } m(\mathbb{Q}) = 0.$$

Nous allons d́finir une **distance** pour $f, g \in L^1(\mu)$:

$$d(f,g) = \int_X |f - g| d\mu$$

On veut $d(f,g) = 0 \Longrightarrow f = g$. Faux ! Considérons $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, $g = 0$. Alors $\int |f - g| = 0$.

Définition 1.4.6. On dit qu'une propriété est vrai **presque partout** (par rapport à μ), ou p.p.(μ) sur X, si elle est vrai $\forall x \in X \backslash E$ où $\mu(E) = 0$.

Exemple 1.4.3. $\chi_{\mathbb{Q}} = 0$ p.p.(μ).

Nous allons écrire $f \sim g$ si $f = g$ p.p.(μ). Si μ est une mesure complète, alors $\sim$ est une relation d'équivalence.

(1) $f \sim f$ parce que $f(x) = f(x)\ \forall x \in X$.

(2) $f \sim g$ ssi $g \sim f$ parce que $f(x) = g(x)$ p.p.$(\mu) \iff g(x) = f(x)$ p.p.(μ).

(3) Si $f \sim g$ et $g \sim h$ alors $f(x) = g(x)\ \forall x \in X \backslash E$ et $g(x) = h(x)\ \forall x \in X \backslash F$ où $\mu(E) = \mu(F) = 0$. Nous avons $f(x) = h(x)$ sauf sur G et $G \subseteq E \bigcup F$ puisque μ est complète et $\mu(E \bigcup F) = \mu(E) + \mu(F) = 0$. Donc $\mu(G) = 0$ et $f \sim h$.

Remarque 1.4.8. Donné une mésure μ nous pouvons toujours l'étendre aux sous-ensembles des ensembles de mesure 0, c'est-à-dire la compléter.

Proposition 1.4.7. Si $f \sim g\ (\mu)$ alors $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$, $\forall E \in \mathcal{M}$.

Démonstration : $N = \{x \ / \ f(x) \neq g(x)\}$, $\mu(N) = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_E f d\mu &= \int_X \chi_E \cdot f d\mu = \int_X (\chi_{E\backslash N} + \chi_{E\cap N}) \cot f d\mu \\
&= \int_X \chi_{E\backslash N} \cdot f d\mu + \int_X \chi_{E\cap N} \cdot f d\mu \\
&= \int_{E\backslash N} f d\mu + \int_{E\cap N} f d\mu, \text{ où } \mu(E\cap N) = 0 \text{ et donc } \textstyle\int_{E\cap N} f d\mu, \\
&= \int_{E\backslash N} g d\mu = \int_E g d\mu.
\end{aligned}$$

$\square$

Définition 1.4.7. Soit μ une mesure complète. On dit que f est **définie** p.p.(μ) si $f : E \longrightarrow Y$ où $E \in \mathcal{M}$ et $\mu(E^c) = 0$. Un tel f est **mesurable** si pour tout ouvert $V \subseteq Y$, $E \cap f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$.

Exemple 1.4.4. $H(x) = \frac{d}{dx}(|x|) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$ Pas définie en $x = 0$, mais $\int_0^x H(t)dt = |x|$.

Remarque 1.4.9. Pouvons donc définir $L^1(X, \mu, \overline{\mathbb{R}})$. Si $f, g \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}})$, $\int_X |f| d\mu < \infty$, alors

$$\mu(\{x \ / \ f(x) = \pm\infty\}) = 0.$$

Si $f, g \in L^1(X, \mu, \overline{\mathbb{R}})$ alors $f + g$ est définie presque partout :

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Théorème 1.4.4. Si $f \in L^1(\mu)$ et $\int_X |f| d\mu = 0$ alors $f = 0$ p.p.(μ).

Démonstration : Soit $A_n = \{x \ / \ |f(x)| > 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$0 = \int_X |f| d\mu \geq \int_{A_n} |f| d\mu \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(A_n) \geq 0.$$

Alors $\mu(A_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Posons $A = \{x \in E \ / \ |f(x)| > 0\}$. Donc $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ et

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0.$$

□

Corollaire 1.4.5. Si $f, g \in L^1(\mu)$ et $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$, $\forall E \in \mathcal{M}$, alors $f = g$ p.p.(μ).

Démonstration : Supposons $f, g \in L^1(X, \mu, \overline{\mathbb{R}})$. Posons $E = \{x \ / \ f(x) \geq g(x)\}$, alors

$$0 \leq \int_E |f(x) - g(x)| d\mu = \int_E f(x) - g(x) d\mu = \int_E f(x) d\mu - \int_E g(x) d\mu = 0.$$

Prenons $F = \{x \ / \ f(x) < g(x)\}$, alors

$$\int_F |f(x) - g(x)| d\mu = 0.$$

Comme $X = E \bigcup F$, nous avons

$$\int_X |f(x) - g(x)| d\mu = \int_E |f(x) - g(x)| d\mu + \int_F |f(x) - g(x)| d\mu = 0$$

et donc $|f(x) - g(x)| = 0$ p.p. C'est-à-dire $f(x) = g(x)$ p.p.
Si $f, g \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$, appliquez le théorème aux parties réels et complexes. □

CHAPITRE 2

ANALYSE FONCTIONELLE

2.1 Espaces de Banach

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$ (où $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tel que $\dim(V) = n$. Rappelez que $\dim(V)$ est le nombre d'éléments dans une base. Donc $V \cong \mathbb{R}^n$ ou $V \cong \mathbb{C}^n$ (mais pas de façon canonique).

Théorème 2.1.1. Il existe toujours une base pour un espace vectoriel. Cette base peut avoir un nombre infini d'éléments ($\dim(V) = \infty$).

Il existe $\mathcal{B} = \{u_\alpha\}$, $u_\alpha \in V$, telle que les u_α sont linéairement independent et $\forall v \in V$, nous pouvons écrire

$$v = c_1 u_{\alpha_1} + \cdots + c_n u_{\alpha_n}$$

Probléme : $\mathcal{B}$ est ´norme (dans tous les cas qui nous concerneront, non-dénombrable).

Solution : Soit $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ une base de Schauder, alors $\forall v \in V$, $\exists ! a_n$ tel que $v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$.

Probléme : Suite $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n v_n$ doit converger.

Notions de convergence :

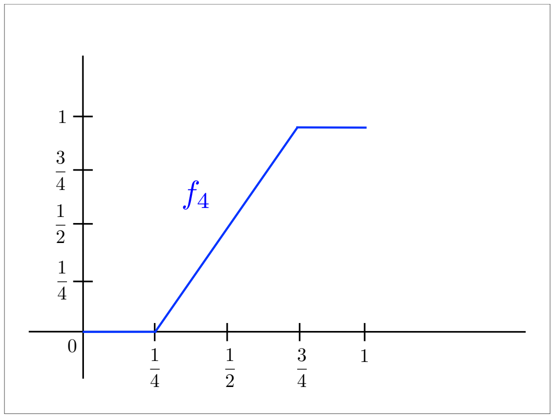
(1) $\varphi_n \xrightarrow{C^0} \varphi$ ssi $\sup_{x \in X} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \longrightarrow 0$.

(2) $\varphi_n \xrightarrow{\text{ponc}} \varphi$ ssi $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$, $\forall x \in X$.

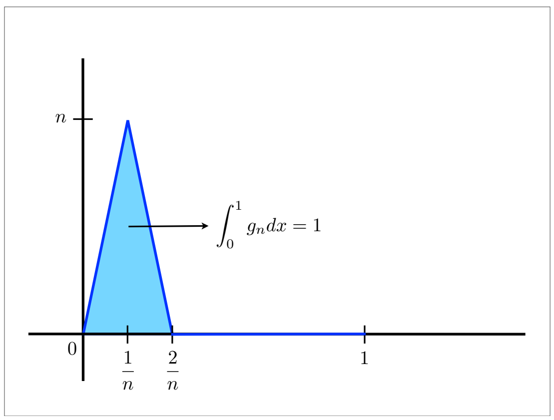
(3) $\varphi_n \xrightarrow{L^1} \varphi$ ssi $\int_X |\varphi_n - \varphi| d\mu \longrightarrow 0$.

(4) $\varphi_n \xrightarrow{\mu} \varphi$ (en mesure) si $\forall \epsilon > 0$, $\delta > 0$, $\exists N$ tel que $n \geq N \Longrightarrow \mu(|\varphi_n - \varphi| > \delta) < \epsilon$.

Exemple 2.1.1. Soit $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{4}\right) & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} + \frac{1}{n}. \end{cases}$



Exemple 2.1.2. Soit $g_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ -n^2x + 2n & \text{si } \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \le x \le 1. \end{cases}$



Remarque 2.1.1. Une suite a_n dans une espace m´triqu diverge si $\forall N$, $\exists m \ge N$ tel que $d(a_m, a_N) \ge c > 0$ et c est indépendent de N. Nous avons

$$f_n(x) \xrightarrow{\text{ponc}} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

$$g_n(x) \xrightarrow{\text{ponc}} 0$$

Convergence C^0: f_n diverge, sinon on aurait $f_n(x) \xrightarrow{\text{ponc}} f(x)$. Si $\sup_{0 \le x \le 1} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$ alors $|f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0 \; \forall x \in [0,1]$. Donc $f_n(x) \longrightarrow f(x) \; \forall x \in X$. Mais la limite uniforme de fonctions continues est continue. Aussi, g_n diverge et $\sup_{0 \le x \le 1} |g_n - g_{n+1}| > 1$. De plus, f_n et g_n convergent ponctuellement mais divergent au sens C^0. Au sens L^1, nous étudions $\int_0^1 |f_n - f| dx$. Comme $\int_0^1 |f_N - f| dx \le \frac{2}{n} \cdot 1 \longrightarrow 0$, nous avons $f_n \xrightarrow{L^1} f$. Par contre, g_n diverge dans L^1, parce que

$$\int_0^1 |g_{2n} - g_n| dx > \int_0^{1/2n} |g_{2n} - g_n| dx = \int_0^{1/2n} (4n^2x - n^2x) dx = 3n^2 \int_0^{1/2n} x dx = 3n^2 \frac{x^2}{2} \bigg|_0^{1/2n} = \frac{3}{8}.$$

Somaire	ponc	C^0	L^1
f_n	converge	diverge	converge
g_n	converge	diverge	diverge

Enfin, convergence en mesure : Soit $h_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h_1(x) = 1$$
$$h_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0,1/2], \\ 0 & \text{sur } (1/2,1]. \end{cases} \quad h_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } [0,1/2), \\ 1 & \text{sur } [1/2,1]. \end{cases}$$
$$h_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0,1/4], \\ 0 & \text{sur } (1/4,1]. \end{cases} \quad h_5(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } [0,1/4) \cup (1/2,1], \\ 1 & \text{sur } [1/4,1/2]. \end{cases}$$

Nous avons $\mu(\{x \ / \ |h_N(x) - 0| > \delta\}) \longrightarrow 0$, c'est-à-dire $h_n \longrightarrow 0$. Aussi, $\int_0^1 |h_n(x) - 0| dx \longrightarrow 0$ et donc $h_n \xrightarrow{L^1} 0$. D'autre part, h_n diverge ponctuellement.

Définition 2.1.1. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$. Un **norme** sur V est une fonction

$$|| \ || : V \longrightarrow [0, +\infty)$$

telle que :

(1) $||u|| = 0$ ssi $u = 0$.

(2) Si $c \in \mathbb{F}$, alors $||cu|| = |c| ||u||$.

(3) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

Exemple 2.1.3.

(1) $(\mathbb{R}, | \ |)$.

(2) $(\mathbb{Q}^n, || \ ||_p)$ où $||v||_p = (v_1^p + \cdots + v_n^p)^{1/p}$.

Remarque 2.1.2. Si $(V, || \ ||)$ est un espace vectoriel normé, on peut définir une métrique (et ainsi un topologie sur V par $d(u,v) = ||u - v||$).

(1) $d(u,v) = ||u - v|| \geq 0$ et $d(u,v) = 0$ ssi $u = v$.

(2) $d(v,u) = ||v - u|| = |-1| ||u - v|| = ||u - v|| = d(u,v)$.

(3) $d(u,v) = ||u - v|| = ||u - w + w - v|| \leq ||u - w|| + ||w - v|| = d(u,w) + d(w,v)$.

Rappel : Une suite a_n dans un espace métrique (X,d) est une **suite de Cauchy** ssi $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$ tel que $n, m \geq N \Longrightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon$. Un espace métrique (X,d) est **complet** ssi toute suite de Cauchy est convergente.

Définition 2.1.2. Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé complet.

Exemple 2.1.4.

(1) $(\mathbb{R}, |\ |)$.

(2) $(\mathbb{R}^n, ||\ ||_p)$ où si $v = (v_1, \ldots, v_n)$.

$$||v||_p = (|v_1|^p + \cdots + |v_n^p|)^{1/p},\ p \geq 1.$$

(3) $L^p(X, \mu, \mathbb{F}) = \left\{f \in \mathcal{M}_\mu(X, \mathbb{F}) \ / \ \int_X |f|^p d\mu < \infty\right\} / \sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence $=$ p.p.(μ). Si $1 \leq p < \infty$, $||f||_p = \left(\int_X ||f||^p d\mu\right)^{1/p}$.

(4) $C^0[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{F} \ / \ f$ continue$\}$, $||f||_u = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Nous savons que $C^0[a, b]$ est un espace vectoriel. Nous vérifions que $||\ ||_u$ est une norme. Notez que $0 \leq ||f||_u$, $||f|| < \infty$ puisque $[a, b]$ est compacte.

  (a) $||0||_u = \sup_{x \in [a,b]} |0| = 0$. Si $||f||_u = 0$ alors $\sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = 0$. Donc $|f(x)| = 0\ \forall x \in [a, b]$. Par conséquent $f(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$.

  (b) $c \in \mathbb{R}$, $||cf||_u = \sup_{x \in [a,b]} |cf(x)| = \sup_{x \in [a,b]} |c||f(x)| = |c| \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = |c|||f||_u$.

  (c) $||f + g||_u = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in [a,b]}(|f(x)| + |g(x)|)$. Aussi,

$$|f(x)| \leq ||f||_u,\ |g(x)| \leq ||g||_u \implies |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_u + ||g||_u.$$

  Alors $\sup_{x \in [a,b]}(|f(x)| + |g(x)|) \leq ||f||_u + ||g||_u$.

Si (f_n) est une suite de Cauchy, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$ tel que

$$n, m \geq N \implies d(f_n, f_m) = ||f_n - f_m||_u < \epsilon \iff \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Donc $\forall x \in [a, b]$, la suite $(f_n(x))$ dans $\mathbb{F}$ est une suite de Cauchy,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon\ \forall x \in X.$$

Mais $\mathbb{F}$ est complet. Alors $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{F}$ la fonction donnée par $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Devons montrer qu'elle est continue. Nous avons

$$||f_n - f||_u = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0.$$

Alors $\forall \epsilon > 0\ \exists N$ tel que $n \geq N \Longrightarrow \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Donc $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a, b]$. Alors $f_n \longrightarrow f$ uniformément et donc f est continue.

Exemple 2.1.5. $(\mathbb{Q}, |\ |)$ est un espace vectoriel normé non-complet, pas de Banach.

Exemple 2.1.6. $V = \{(x_n)_{n=1}^\infty \ / \ x_n \in \mathbb{R},\ x_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ sauf un ensemble fini$\}$. Soit $||x|| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

Alors $(V, || \ ||)$ est un espace normé, mais pas complet. Considérons la suite $a^n = (a_n^k)_{k=1}^{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & k \leq n, \\ 0 & k > n \end{cases}$:

$$\begin{aligned} a^1 &= (1/2, 0, \dots) \\ a^2 &= (1/2, 1/4, 0, \dots) \\ a^3 &= (1/2, 1/4, 1/8, 0, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nous avons que a^k est une suite de Cauchy :

$$||a^k - a^l|| \leq \max\left\{\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^l}\right\} \longrightarrow 0$$

Mais $\lim_{n\to\infty} a^n \notin V$.

Définition 2.1.3. Soit $X, \mu, \mathcal{M}$ un espace de mesure, $1 \leq p < \infty$. Nous définissons

$$L^p(X, \mu, \mathcal{M}, Y) = \left\{ f \in \mathcal{M}_\mu(X, Y) \ / \ \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\} / \sim$$

où $f \sim g$ ssi $f = g$ p.p.(μ). Nous allons prendre $Y = \mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sauf si on dit autrement.

Définition 2.1.4. Soit $f \in \mathcal{M}_\mu(X, Y)$,

$$||f||_p = \sqrt[p]{\int_X |f|^p d\mu}$$

Remarque 2.1.3. $f \in L^p$ ssi $||f||_p < \infty$.

Exemple 2.1.7. $X =$ ensemble ayant n éléments, $\mu =$ mesure de comptage, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, $Y = \mathbb{F}$, $f \in \mathcal{M}_\mu(X, \mathbb{F}) =$ toutes fonction $X \longrightarrow \mathbb{F}$. Ici, $\sim$ p.p.(μ) est $=$. Si f est une fonction de X dans $\mathbb{F}$, alors f peut être écrit : $(f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{F}^n$. Aussi $\mathcal{M}_\mu(X, \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^n$. Si $g \in \mathcal{M}_\mu(X, \mathbb{F})$, alors $\int_X g d\mu = g_1 + \cdots + g_n = \sum_{i=1}^n g_i$. Donc

$$||f||_p = \sqrt[p]{\int_X |f|^p d\mu} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |f_i|^p}, \ ||f||_p < \infty \text{ for all } f \in \mathcal{M}_\mu(X, \mathbb{F}).$$

Exercice 2.1.1. Montrer que l'exemple précédent est un espace de Banach.

Lemme 2.1.1. Si $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $0 < \lambda < 1$, alors $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$, avec égalité ssi $a = b$.

Démonstration : Soit $f(t) = t^\lambda - \lambda t$, $t \geq 0$.

$$f'(t) = \lambda t^{\lambda - 1} - \lambda = \lambda(t^{\lambda-1} - 1) = \lambda\left(\frac{1}{t^{1-\lambda}} - 1\right).$$

Alors $f(t)$ atteint le maximum global en $t = 1$. Donc $f(t) \leq f(1) = 1 - \lambda$, avec $=$ ssi $t = 1$. Révenons à $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b$. Trivial si $b = 0$. Si $b > 0$ posons $t = a/b$. Nous avons

$$\begin{aligned} f(t) = \left(\frac{a}{b}\right)^\lambda - \lambda\left(\frac{a}{b}\right) &\leq f(1) = 1 - \lambda \\ a^\lambda b^{-\lambda} - \lambda a b^{-1} &\leq 1 - \lambda \\ a^\lambda b^{1-\lambda} - \lambda a &\leq (1-\lambda)b \\ a^\lambda b^{1-\lambda} &\leq \lambda a + (1-\lambda)b. \end{aligned}$$

Notez que $=$ ssi $t = 1 \implies a = b$.

$\square$

Théorème 2.1.2 (Inegalité de Hölder)**.** Soit $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (donc $1 < q < \infty$). Si $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathbb{F})$, alors

$$||f \cdot g||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

Démonstration : Si $||f||_p = 0$ ou $||g||_q = 0$ alors $f \cdot p = 0$ p.p. (trivial). Assez de démontrer l'inegalité si $||f||_p = ||g||_q = 1$, puisque si $||f||_p = \alpha > 0$, $||g||_q = \beta > 0$, alors

$$\left|\left|\frac{f}{\alpha}\right|\right|_p = \frac{1}{|\alpha|}||f||_p, \quad \left|\left|\frac{g}{\beta}\right|\right|_q = \frac{1}{|\beta|}||g||_q.$$

Si Hölder est vrai pour fonctions de norme 1, aurons

$$\begin{aligned} \left|\left|\frac{f}{\alpha} \cdot \frac{g}{\beta}\right|\right|_1 &\leq \left|\left|\frac{f}{\alpha}\right|\right|_p \cdot \left|\left|\frac{g}{\beta}\right|\right|_q \\ \frac{1}{|\alpha\beta|}||f \cdot g||_1 &\leq \frac{1}{|\alpha|} \cdot \frac{1}{|\beta|}||g||_q. \end{aligned}$$

Donc $||f \cdot g||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$. Pouvons prendre $||f||_p = ||g||_q = 1$. Appliquons le lemme précédent avec $a = |f(x)|^p \geq 0$ et $b = |g(x)|^q \geq 0$. Prenons $\lambda = \frac{1}{p}$. Alors $1 - \lambda = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. Nous avons

$$\begin{aligned} a^\lambda b^{1-\lambda} &\leq \lambda a + (1-\lambda)b \\ a^{1/p} b^{1/q} &\leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \\ |f(x)| \cdot |g(x)| &\leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q \\ ||f \cdot g||_1 = \int_X |f(x) \cdot g(x)| &\leq \frac{1}{p}\int_X |f(x)|^p + \frac{1}{q}\int_X |g(x)|^q = \frac{1}{p}\left(||f||_p\right)^p + \frac{1}{q}\left(||g||_q\right)^q \\ &= \frac{1}{p}1^p + \frac{1}{q}1^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = ||f||_p \cdot ||g||_q. \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 2.1.4.

(1) $\mu \equiv 0$ exclue pour les espaces L^p. Nous exclurons également les espaces L^p tels que $L^p = \{0\}$ ou $L^p = \emptyset$.

(2) Un sous-espace de Banach d'un espace de Banach est un sous-espace vectoriel qui est complet avec la norme restreinte.

Corollaire 2.1.1. $||f \cdot g||_1 = ||f||_p \cdot ||g||_q \left(\text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Démonstration : Avons appliqué le lemme précédent à $a = |f(x)|^p$ et $b = |g(x)|^q$. Prenons $\lambda = p^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x)| &\leq p^{-1}|f(x)|^p + q^{-1}|g(x)|^q \\ \alpha|f(x)|^p &= \beta|g(x)|^q \text{ p.p.}(\mu),\ \exists\, \alpha, \beta > 0, \\ \text{égalité} &\implies |f(x) \cdot g(x)| = p^{-1}|f(x)|^p + q^{-1}|g(x)|^q \\ &\implies |f(x)|^p = |g(x)|^q, \end{aligned}$$

puisque nous avons intégré, ceci $|f(x)|^p = |g(x)|^q$ p.p.. Ceci démontre cas $||f||_p = ||g||_q = 1$.

$\square$

Exercice 2.1.2. Prouver le cas général.

Théorème 2.1.3 (Inégalité de Minkowski)**.** Si $1 \leq p < \infty$, $f, g \in L^p$, alors

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

Démonstration : Vrai si $p = 1$ ou si $f + g = 0$ p.p.. Sinon,

$$\begin{aligned} |f + g|^p &= |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \\ &\leq (|f| + |g|) \cdot |f + g|^{p-1} \\ \implies \int_X |f + g|^p d\mu &\leq \int_X |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \\ &= |||f| \cdot |f + g|^{p-1}||_1 + |||g| \cdot |f + g|^{p-1}||_1 \\ &\leq ||f||_p \cdot |||f + g|^{p-1}||_q + ||g||_p \cdot |||f + g|^{p-1}||_q \\ &= (||F||_p + ||g||_p) \left(\int_X \left(|f + g|^{p-1}\right)^q d\mu\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Mais $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1 \Longrightarrow \frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p} \Longrightarrow q(p-1)=p$. Alors,

$$\begin{aligned}
(||f+g||_p)^p &\leq (||f||_p+||g||_p)\cdot\left(\int_X |f+g|^p\right)^{1/q}\\
&= (||f||_p+||g||_p)\cdot(||f+g||_p)^{p\cdot\frac{1}{q}}\\
\left(||f+g||_p^p\right)^{1-\frac{1}{q}} &\leq ||f||_p+||g||_p\\
\left(||f+g||_p^p\right)^{1/p} &\leq ||f||_p+||g||_p\\
||f+g||_p &\leq ||f||_p+||g||_p.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.1.2. $L^p(X,\mu,\mathbb{F})$ est un espace vectoriel normé.

Démonstration : $\forall f,g\in L^p$, $||f+g||_p \leq ||f||_p+||g||_p$ et si $c\in\mathbb{F}$ alors

$$\begin{aligned}
||cf||_p &= \left(\int |cf|^p\right)^{1/p} = \left(\int |c|^p|f|^p\right)^{1/p}\\
&= \left(|c|^p\int |f|^p\right)^{1/p} = (|c|^p)^{1/p}\left(\int |f|^p\right)^{1/p}\\
&= |c|\cdot||f||_p.
\end{aligned}$$

Enfin, $||0||_p = \left(\int |0|^p d\mu\right)^{1/p} = 0$ et si $||f||_p = 0$, alors $\int |f|^p = 0 \Longrightarrow |f|^p = 0$ p.p. $\Longrightarrow f = 0$ p.p.

□

Exemple 2.1.8. Supposez que X set discret et μ est la mesure de comptage. Nous noterons

$$l^p(X,\mathbb{F}) = L^p(X,\mu,\mathbb{F}) \quad \text{et} \quad ||v||_p = \sqrt[p]{\sum |v_i|^p}.$$

Entre autres, $X=\{1,\ldots,n\}$,

$$l^p(X,\mathbb{F}) = (\mathbb{F}^n, ||\ ||_p).$$

Lemme 2.1.2. Un espace vectoriel normé X est complet ssi toute série telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i|| < \infty$$

est convergente.

Démonstration : Si X set complete et $\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i|| < \infty$, posons $s_N = \sum_{n=1}^{N} x_i$. Alors $M > N \implies ||s_M - s_N|| = \left|\left|\sum_{N+1}^{M} x_i\right|\right| \leq \sum_{N+1}^{N} ||x_i|| \longrightarrow 0$. Donc S_N est une suite de Cauchy et donc convergent. Supposons que $\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i|| < \infty \implies \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ convergente. Soit a_n un suite de Cauchy (donc $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists$ N tel que $n, m > N \implies ||a_n - a_m|| < \epsilon$.) Prenons $n_1 < n_2 < \cdots$ tels que $||a_n - a_m|| < 2^{-j}$, $\forall\ m, n > n_j$. Posons $x_1 = a_{n_1}, \ldots, x_j = a_{n_j} - a_{n_{j-1}}$ pour $j > 1$. Alors

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = a_{n_1} + (a_{n_2} - a_{n_1}) + (a_{n_3} - a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_k} - a_{n_{k-1}}) = a_{n_k}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i|| \leq ||x_1|| + \sum_{i=2}^{\infty} ||x_i|| &\leq ||x_1|| + \sum_{i=2}^{\infty} 2^{-i} \\ \leq ||x_1|| + 1 < \infty. \\ \implies \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} x_i = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \text{ existe.}\end{aligned}$$

Par l'unicité des limites de suites de Cauchy, nous avons

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

et donc X est complet.

$\square$

Théorème 2.1.4. L^p est un espace de Banach ($1 \leq p < \infty$).

Démonstration : Supposons que $(f_k) \in L^p$ et $\sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_p = \beta < \infty$. Posons

$$\begin{aligned}G_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|, \\ G(x) &= \lim_{n\to\infty} G_n(x).\end{aligned}$$

Nous avons

$$||G_n||_p = \left(\int |G_n|^p\right)^{1/p} = \left(\int \left|\sum_{k=1}^{n} |f_k|\right|^p\right)^{1/p} = \left|\left|\sum_{k=1}^{n} |f_k|\right|\right|_p \leq \sum_{k=1}^{n} ||f_k||_p, \text{ par Minkowski.}$$

Alors $G_n(x) \leq G_{n+1}(x)$, $\forall x$, $\forall n$. Aussi, $G_n(x) \geq 0$, $\forall n$. Par le Théorème de convergence monotone appliqué à $G^p(x)$, nous avons

$$\int (G(x))^p = \int \left(\lim_{n\to\infty} G_n^p\right) = \lim_{n\to\infty} \int G_n^p = \lim_{n\to\infty} (||G_n||_p)^p \leq \beta^p.$$

Alors $G(x) \in L^p$ et donc $G(x) < \infty$ p.p.(μ). Puisque $\mathbb{F}$ est complet, par le lemme précédent, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge p.p. Posons $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. Nous avons $|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = G(x)$. Donc

$$\int |F(x)|^p \leq \int |G(x)|^p < \infty \; / \; / \; / \text{ et } / \; / \; / \; F \in L^p.$$

Avons $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \in L^p$ et $\sum_{k=1}^{N} f_k(x) \longrightarrow F(x)$ p.p.. Reste à montrer $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \xrightarrow{L^p} F(x)$ si $n \longrightarrow \infty$. Devons montrer que $||F - \sum_{k=1}^{n} f_k||_p \longrightarrow 0$. Notez que

$$\left| F - \sum_{k=1}^{n} f_k \right| \leq |F| + \left| \sum_{k=1}^{n} f_k \right| \leq 2G$$
$$\left| F - \sum_{k=1}^{n} f_k \right|^p \leq (2G)^p \in L^1, \text{ puisque } G \in L^p \Longrightarrow \textstyle\int |G|^p < \infty.$$

Convergence dominée et fait qu'on a convergence ponctuelle p.p. $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\left| F - \sum_{k=1}^{n} f_k \right|\right|_p^p &= \lim_{n\to\infty} \int \left| F - \sum_{k=1}^{n} f_k \right|^p \\ &= \int \lim_{n\to\infty} \left| F - \sum_{k=1}^{n} f_k \right|^p, \text{ par le Théorème de convergence dominée,} \\ &= \text{ p.p. } \int 0 = 0, \text{ par convergence ponctuelle.} \end{aligned}$$

Alors $\sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_p = \beta < \infty \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge dans L^p. Donc L^p est complet.

□

Exemple 2.1.9.

(1) $l^p(\mathbb{N})$: $(1/n)_{n=1}^{\infty} \in l^p$ si $p > 1$, et $(1/n)_{n=1}^{\infty} \notin l^1$. Notez que

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, \dots, 0, \dots) &\in l^1 \\ (1, 1/2, 0, \dots, 0, \dots) &\in l^1 \\ (1, 1/2, 1/3, \dots, 0, \dots) &\in l^1 \\ &\downarrow \\ &\infty \text{ dans } L^1. \end{aligned}$$

En général, $l^p(\mathbb{N}) \subseteq l^q(\mathbb{N})$ si $p < q$. Soit $b \in l^p(\mathbb{N})$, $b = (b_n)_{n=1}^{\infty}$, si $\sum |b_n|^p < \infty$ alors $b_n \longrightarrow 0$. Donc il existe N tel que $n \geq N$, $|b_n| < 1$. Notez que

$$||b||_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q = \sum_{n=1}^{N} |b_n|^q + \sum_{n=N+1}^{\infty} |b_n|^q.$$

Soit $K = \sum_{n=1}^{N} |b_n|^q$. Si $n \geq N+1$ alors $|b_n| < 1 \Longrightarrow |b_n|^q < |b_n|^p$. Ceci implique

$$||b_n||_q^q \leq K + \sum_{n=N+1}^{\infty} |b_n|^p \leq K + ||b||_p^p < \infty.$$

Par conséquent $b \in l^q$.

(2) $L^p([0,1])$. Soit $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Nous avons

$$||f||_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 < \infty \Longrightarrow f \in L^1.$$

D'autre part,

$$||f||_2 = \left(\int_0^1 (f(x))^2 dx \right)^{1/2} = \infty.$$

Alors $f \in L^1 \backslash L^2$. En général, $\mu(X) < \infty$, et $p < q \Longrightarrow L^p \supseteq L^q$.

En général, $q \geq p \Longrightarrow l^q \subseteq l^p$. Si $\mu(X) < \infty \Longrightarrow L^q \supseteq L^p$ si $p \leq q$.

$$||f||_p^p = \int_X |f|^p d\mu = \int_{|f| \geq 1} |f|^p d\mu + \int_{|f|<1} |f|^p d\mu.$$

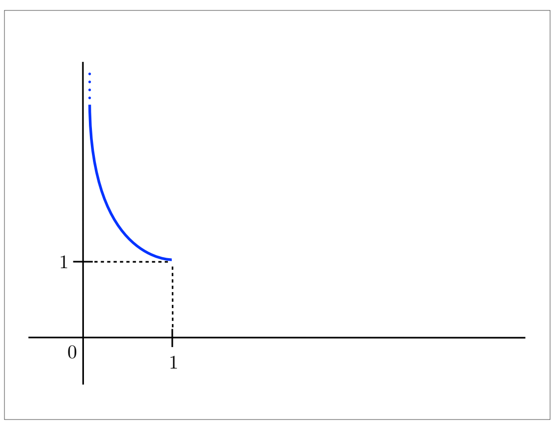
Si $|f| \geq 1$ alors $|f|^p \leq |f|^q$. Donc

$$||f||_p^p \leq \int_{|f| \geq 1} |f|^q + \int_{|f|<1} |f|^p \leq \int_X |f|^q d\mu + \int_X 1 d\mu \leq ||f||_q^q + \mu(X).$$

Si $f \in L^q$, ceci est $< \infty$, alors $f \in L^p$. Enfin $L^p(\mathbb{R})$:

$$\int |f|^p d\mu < \infty \Longrightarrow |f| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } x \longrightarrow \pm\infty.$$

Exemple 2.1.10. Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{[0,1]}(x)$.



Nous avons $||f||_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 < \infty \Longrightarrow f \in L^1$. Aussi,

$$||f||_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 \frac{1}{x} dx \right)^{1/2} = \infty.$$

Donc $f \in L^1(\mathbb{R})\backslash L^2(\mathbb{R})$ et en général $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < 2$. D'autre part si $g(x) = \frac{1}{x}\chi_{[0,+\infty)}$ alors

$$||g||_1 = \int_0^\infty \frac{1}{x} dx = \infty,$$
$$||g||_2 = \left(\frac{1}{x^2} dx\right)^{1/2} = 1.$$

Donc $g \in L^2(\mathbb{R})\backslash L^1(\mathbb{R})$.

Remarque 2.1.5. $C^0(X)$ et les fonctions simples sont tous deux denses dans $L^p(X)$. Aussi, $C^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. Cela implique que les limites dans L^p peuvent donner à des "dégénérations"importantes.

Rappelez que dans $V = \mathbb{R}^n$, toute boule fermé

$$\overline{B(p,\epsilon)} = \{v \ / \ ||v - p|| \leq \epsilon\}$$

est compacte.

Proposition 2.1.1. Soit (X, μ) un espace de mesure tel que il existe des $E_n \subseteq X$ avec $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $0 < \mu(E_n) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\overline{B(0,1)} = \{v \in L^p(X, \mu, \mathbb{F}) : ||v||_p \leq 1\}$$

n'est pas compact.

Remarque 2.1.6. Si $X = [0,1]$, alors $E_1 = [0, 1/2)$, $E_2 = [1/2, 3/4)$, $E_3 = [3/4, 7/8)$, etc. Si $X = \mathbb{Z}$, alors $E_i = \{i\}$.

Démonstration : Soit $f_i(x) = \frac{1}{(\mu(E_i))^{1/p}}\chi_{E_i}$. Alors

$$||f_i||_p = \left(\int_X \frac{1}{\mu(E_i)} \chi_{E_i}^p d\mu\right)^{1/p} = 1 \implies f_i \in \overline{B(0,1)}.$$

Si $i \neq j$,

$$||f_i - f_j||_p = \left(\int_X |f_i - f_j|^p\right)^{1/p} = \left(\int_X |f_i + f_j|^p d\mu\right)^{1/p} \geq \left(\int_X |f_i|^p\right)^{1/p} = ||f_i||_p = 1.$$

Donc $||f_i - f_j|| \geq 1 \ \forall \, i, j$. C'est-à-dire que (f_i) n'est pas une suite de Cauchy et alors n'a pas de sous-suite convergente. Ceci implique que $\overline{B(0,1)}$ n'est pas compacte dans l'espace métrique L^p. $\square$

Remarque 2.1.7. Les f_i sont linéairement indépendent, car

$$\sum_{n=1}^N a_n f_n = 0 \implies a_n = 0 \ \forall n.$$

Aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n = 0 \text{ p.p.}(\mu) \implies a_n = 0,\ \forall n.$$

Comment définir L^∞ ? Pour Hölder : $||f \cdot g||_1 \le ||f||_p \cdot ||g||_q$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Donc $p = 1 \Longrightarrow q = \infty$. Soit $f \in L^1$. Nous avons

$$\int_X |f \cdot g| d\mu \le \sup_X |g| \int_X |f| d\mu = ||f||_1 \sup_X |g|, \text{ où } g \text{ est continue.}$$

Peut être $||g||_\infty = \sup_X |g|$?

Définition 2.1.5. (X, μ) est σ-fini si

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{ où } \mu(E_i) < \infty.$$

Exemple 2.1.11.

(1) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}$, etc.

(2) $(\mathbb{R}, \mu)$, avec μ la mesure de comptage, n'est pas σ-fini.

Définition 2.1.6. Soit (X, μ) un espace σ-fini, et $f \in \mathcal{M}_\mu(X, \mathbb{F})$. Nous définissons

$$||f||_\infty = \inf\{a \ge 0 \ /\ \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\} = \sup_{x \in X} \text{ess}|f(x)|$$

et $L^\infty = \{f \in \mathcal{M}_\mu(X, \mathbb{F}) \ /\ ||f||_\infty < \infty\}$.

2.2 Applications entre espaces de Banach et dualité

Définition 2.2.1. Soit U et V espaces de Banach sur $\mathbb{F}$. Une application $T : U \longrightarrow V$ est **linéaire** ssi $\forall u_1, u_2 \in U$ et $\forall c \in \mathbb{F}$:

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T(u_1) + T(u_2), \\ T(cu_1) &= cT(u_2). \end{aligned}$$

Soit U et V espaces métriques, $T : U \longrightarrow V$ linéaire. T est **continue** ssi $\forall x_n \in U$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans U nous avons $Tx_n \longrightarrow Tx$ dans V.

Exemple 2.2.1. Soit $l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Suites bornée

$$||(x_n)||_{l^\infty} = \sup_{n \geq 1} |x_n| < \infty.$$

Soit $T : l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \longrightarrow l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ donnée par

$$T(a_1, a_2, a_3, \dots) = T\left((a_n)_{n=1}^\infty\right) = \left(n^2 a_n\right)_{n=1}^\infty = (a_1, 4a_2, 9a_3, \dots).$$

Soit $b^k = (b_n^k)_{n=1}^\infty \in l^\infty$ la suite donnée par $b_n^k = \begin{cases} 1/n & \text{si } n = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} b^1 &= (1, 0, 0, \dots) \\ b^2 &= \left(0, \frac{1}{2}, 0, \dots\right) \\ b^3 &= \left(0, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nous avons $||b^k||_{l^\infty} = \sup_{n \geq 1} |b_n^k| = 1/k \longrightarrow 0$. Alors $b^k \longrightarrow 0$ dans l^∞. D'autre part,

$$\begin{aligned} (T(b^k))_n &= \begin{cases} n & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ ||T(b^k)||_{l^\infty} &= \sup_{n \geq 1} |(T(b^k))_n| = k \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Conclusion, $T(b^k)$ diverge dans l^∞ même si $b_k \longrightarrow 0$ dans l^∞. Donc T n'est pas continue.

Définition 2.2.2. Soit U et V espaces de Banach. Une application linéaire $T : U \longrightarrow V$ est **bornée** ssi il existe $C > 0$ tel que

$$||T_x||_V \leq C||x||_U, \ \forall x \in U.$$

Ou équivalent : il existe $C > 0$ tel que

$$||x|| \leq 1 \Longrightarrow ||Tx|| \leq C.$$

Remarque 2.2.1. Ne disons pas que $||Tx|| \leq K \ \forall x \in U$. Ceci impliquerait $||T(\lambda x)|| \leq K \ \forall \lambda \in \mathbb{F}$. Alors

$|\lambda|||Tx|| \leq K \ \forall\lambda \in \mathbb{F}$. Donc $||Tx|| \leq K/|\lambda| \searrow 0$ lorsque $|\lambda| \longrightarrow \infty$. Par conséquent $||Tx|| = 0$, $\forall u \in U$ et donc $Tx = 0$.

Proposition 2.2.1. Soit $T : U \longrightarrow V$ une application linŕaire entre espaces de Banach. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(1) T est continue.

(2) T est continue en $x = 0_U$.

(3) T est bornée.

Démonstration :

- (1) $\Longrightarrow$ (2) est trivial.
- (2) $\Longrightarrow$ (3) : Supposons (2). Soit $x_n \longrightarrow 0$ dans U. Alors $Tx_n \longrightarrow 0$ dans V. Supposons que T n'est pas bornée. Il existe une suite $||x_n|| = 1$ telle que $||Tx_n|| \longrightarrow \infty$. Soit $a_n x_n/||Tx_n|| \in U$. Nous avons $||a_n|| = ||x_n||/||Tx_n|| = 1/||Tx_n|| \longrightarrow 0$ et $T(a_n) = T(x_n)/||Tx_n||$ où $||T(a_n)|| = 1$. Nous avons $a_n \longrightarrow 0$ mais $Ta_n \not\longrightarrow 0$. Donc T est bornée.
- (3) $\Longrightarrow$ (1) : Si $x_n \longrightarrow x$ alors $||Tx_n - Tx||_V = ||T(x_n - x)||_V \leq C||x_n - x||_U \longrightarrow 0$ et donc $Tx_n \longrightarrow Tx$, c'est-à-dire T est continue.

$\square$

Définition 2.2.3. $L(U, V) = \{T : U \longrightarrow V \ / \ T$ et linéaire et bornée$\}$.

Remarque 2.2.2. Les fonctions C^∞ sont denses dans $L^2((0,1))$. On peut définir $\frac{df}{dx}$, avec $f \in L^2((0,1))$, en prenant $\varphi_n \in C^\infty$, $\varphi_n \longrightarrow f$ dans L^2, et

$$\frac{df}{dx} = \lim_{n\to\infty} \frac{d\varphi_n}{dx}$$

Un tel opérateur será linéaire, mais non bornée.

Définition 2.2.4. La norme d'operateur de $T \in L(U, V)$ est donnée par

$$||T|| = \sup_{||u||=1} ||Tu|| = \sup_{u\neq 0} \frac{||Tu||}{||u||}.$$

Remarque 2.2.3.

(1) $\forall u \in U$, $||Tu|| \leq ||T||||u||$.

(2) Si $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \mathrm{Mat}_{n\times n}$ est diagonalisable, alors $||A|| = \sup_{1\leq\lambda_i\leq n} |\lambda_i|$.

(3) Avec la norme d'oprateur, $L(U,V)$ est un espace de Banach. Notez que $L(U,V)$ est un espace vectoriel avec

$$(T+S)(u) = Tu + Su,$$
$$(cT)(u) = cTu.$$

Nous vérifions que $||\ ||$ est une norme :

$$||T|| = 0 \iff \sup_{u\neq 0} \frac{||Tu||}{||u||} = 0 \iff Tu = 0,\ \forall u \in U \iff T \text{ est l'operateur } 0.$$
$$||cT|| = \sup_{u\neq 0} \frac{||cTu||}{||u||} = \sup_{u\neq 0} |c| \cdot \frac{||Tu||}{||u||} = |c| \cdot \sup_{u\neq 0} \frac{||Tu||}{||u||} = |c|||T||.$$
$$||T+S|| = \sup_{u\neq 0} \frac{||Tu+Su||}{||u||} \le \sup_{u\neq 0} \frac{(||Tu|| + ||Su||)}{||u||} \le \sup_{u\neq 0} \frac{||Tu||}{||u||} + \sup_{u\neq 0} \frac{||Su||}{||u||} = ||T|| + ||S||.$$

Enfin si T_n est une suite de Cauchy, alors :

$$||T_n - T_m|| = \sup_{||u||=1} ||T_n u - T_m u|| = \sup_{u\neq 0} \frac{||T_n u - T_m u||}{||u||} \ge \frac{||T_n u - T_m u||}{||u||},\ \forall u \in U.$$

Alors $\forall u \in U$, $(T_n u)$ est une suite de Cauchy et donc $\lim_{n\to\infty} T_n u$ existe $\forall u \in U$. Nous définissons $Tu = \lim_{n\to\infty} T_n u$. Notez que T est linéaire puisque les T_n le sont. Aussi,

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup_{||u||=1} ||Tu|| = \sup_{||u||=1} \lim_{n\to\infty} ||T_n u|| \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{||u||=1} ||T_n u|| = \lim_{n\to\infty} ||T_n||. \end{aligned}$$

Donc $T \in L(U,V)$.

Soit U, V et W des espaces de Banach, $T \in L(U,V)$, $S \in L(V,W)$. Alors $S \circ T : U \longrightarrow W$ est linéaire. Aussi,

$$||ST|| = \sup_{u\neq 0} \frac{||STu||}{||u||} = \sup_{u\neq 0} \frac{||S(Tu)||}{||u||} \le \sup_{u\neq 0} \frac{||S|| \cdot ||Tu||}{||u||} = ||S|| \cdot \sup_{u\neq 0} \frac{||Tu||}{||u||} \le ||S|| \cdot ||T||.$$

Remarque 2.2.4. Même pour des matrices, avons $\le$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Nous avons $A, A^{-1} \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ et

$$\begin{aligned} ||A|| &= \sup_{u\in\mathbb{R}^2, ||u||=1} ||Au|| = 2, \\ ||A^{-1}|| &= 2, \\ A \cdot A^{-1} &= I, \\ ||I|| &= \sup_{||u||=1} ||Iu||, \\ 1 &= ||I|| = ||A \cdot A^{-1}|| \le ||A|| \cdot ||A^{-1}|| = 2 \cdot 2 = 4. \end{aligned}$$

On définit $L(U,U) = O_p(U)$. Notez que $O_p(U)$ est un **algèbre de Banach**; nous avons

$$\begin{aligned}
&A, B \in O_p(U) \Longrightarrow A \cdot B \in O_p(U),\\
&I \in O_p(U), \text{ et}\\
&||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||.
\end{aligned}$$

Définition 2.2.5. $T \in L(U,V)$ est **inversible**, ou un **isomorphisme** ssi il existe T^{-1} tel que $T^{-1} \in L(V,U)$.

Exemple 2.2.2. Soit $T : l^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow l^\infty(\mathbb{N})$ l'operateur

$$T\left((a_n)_{n=1}^\infty\right) = \left(\frac{a_n}{n}\right)_{n=1}^\infty = \left(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots\right)$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
||a||_\infty \leq 1 &\Longrightarrow \sup_n |a_n| \leq 1 \Longrightarrow \sup_n \left|\frac{a_n}{n}\right| \leq 1\\
&\Longrightarrow ||Ta||_{l^\infty} \leq 1\\
&\Longrightarrow \sup_{||a||_\infty \leq 1} ||Ta||_\infty \leq 1\\
&\Longrightarrow T \in L(l^\infty, l^\infty).
\end{aligned}$$

Mais $T(a) = 0 \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow T$ est injectif. Nous pouvons définir

$$T^{-1}\left((b_n)_{n=1}^\infty\right) = (b_1, 2b_2, 3b_3, \dots)$$

Mais $T^{-1} \notin L(l^\infty, l^\infty)$. Par exemple, posons

$$b_k = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Nous avons $||b_k||_\infty = 1$ et $||T^{-1}b_k|| = k \nearrow \infty$. Donc T^{-1} n'est pas bornée.

Définition 2.2.6. $T \in L(U,V)$ est une **isométrie** si $||Tu|| = ||u||$.

Exemple 2.2.3.

(1) $A \in SO(n)$ est une isométrie de $(\mathbb{R}^n, ||\ ||_2)$.

(2) Soit $T : l^\infty \longrightarrow l^\infty$ l'operateur donnée par

$$T(a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$$

Notez que T n'est pas forcément surjectif. Mais toujours injectif :

$$Tu = 0 \Longrightarrow ||Tu|| = ||u|| = 0 \Longrightarrow u = 0.$$

Définition 2.2.7. Soit U un espace de Banach sur $\mathbb{F}$. Une **fonctionnelle** linŕaire est une élément de $L(U,\mathbb{F}) = U^*$.

Exemple 2.2.4. Si $U = \mathbb{R}^n$, notons $u \in U$ par $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. Soit $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ la fonctionnelle donnée par

$$f(u) = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = (a_1, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Il est bien connu que $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$. Soit P un plan dans $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine. Il existe $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ telle que

$$P = \{u \ / \ f(u) = 0\} = \mathrm{Ker}(f).$$

Définition 2.2.8. Soit U un espace vectoriel réel. Une **fonctionnelle sous-linéaire** est une application $p : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} p(x+y) &\leq p(x) + p(y), \text{ et} \\ p(\lambda x) &= \lambda p(x), \ \forall \lambda > 0. \end{aligned}$$

Exemple 2.2.5.

(1) $p(x) = c||x||$, $c > 0$.

(2) $U = \mathbb{R}^3$, $p(u_1, u_2, u_3) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Cette application s'appelle **semi-norme**.

Théorème 2.2.1 (Hahn-Banach)**.** Soit U un espace de Banach sur $\mathbb{R}$, $p : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire, W un sous-espace vectoriel de U, et $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée sur W telle que $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in W$. Alors il existe $F \in L(U, \mathbb{R})$ telle que $F(x) \leq p(x)$, $\forall x \in U$ et $F|_W = f$.

Remarque 2.2.5. Tant que $p(x)$ est bornée sur la boule unitaire, F le sera aussi :

$$\begin{aligned} F(x) &\leq p(x), \\ F(-x) &\leq p(-x) = p(x) \\ -F(x) &\leq p(x) \\ F(x) &\geq -p(x). \end{aligned}$$

Alors $|F(x)| \leq p(x)$ et

$$||F|| = \sup_{||x||=1} |F(x)| \leq \sup_{||x||\leq 1} p(x) < \infty.$$

Démonstration : Soit $x \in U - W$. Si $y_1, y_2 \in W$ alors

$$\begin{aligned} f(y_1) + f(y_2) = f(y_1 + y_2) &\leq p(y_1 + y_2) \\ &= p(y_1 - x + x + y_2) \\ &\leq p(y_1 - x) + p(x + y_2) \\ f(y_1) - p(y - x) &\leq p(x + y_2) - f(y_2). \end{aligned}$$

Alors
$$\sup_{y\in W}\{f(y)-p(y-x)\} \leq \inf_{y\in W}\{p(x+y)-f(y)\}.$$
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec
$$\sup_{y\in W}\{f(y)-p(y-x)\} \leq \alpha \leq \inf_{y\in W}\{p(x+y)-f(y)\}.$$
Définissons $g : W \oplus \mathbb{R}x$ comme
$$g(y+\lambda x) = f(y) + \lambda\alpha,\ \forall y \in W.$$
Alors g est linéaire et $g|_W = f$, où $W = \{\lambda = 0\}$. Devons montrer que $g(y+\lambda x) \leq p(y+\lambda x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $y \in W$.

- Supposons $\lambda = 0$: Alors $g(y) = f(y) \leq p(y)$.
- Si $\lambda > 0$ alors
$$\begin{aligned} g(y+\lambda x) = f(y) + \lambda\alpha = \lambda\left(\frac{1}{\lambda}f(y)+\alpha\right) &= \lambda\left(f\left(\frac{y}{\lambda}\right)+\alpha\right) \\ &\leq \lambda\left[f\left(\frac{y}{\lambda}\right) + p\left(x+\frac{y}{\lambda}\right) - f\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right] \\ &\leq \lambda \cdot \frac{1}{\lambda}\cdot p(\lambda x + y) \\ &= p(y+\lambda y). \end{aligned}$$
- Si $\lambda < 0$, posons $\mu = -\lambda > 0$. Alors
$$\begin{aligned} g(y+\lambda x) &= \mu\left(f\left(\frac{y}{\mu}\right)-\alpha\right) \leq \mu\left(f\left(\frac{y}{\mu}\right) - f\left(\frac{y}{\mu}\right) + p\left(\frac{y}{\mu}-x\right)\right) \\ g(y+\lambda) &\leq \mu p\left(\frac{y}{\mu}-x\right) \leq \mu\cdot\frac{1}{\mu}\cdot p(y-\mu x) \\ g(y+\lambda x) &\leq p(y+\lambda x). \end{aligned}$$

Donc $\forall y \in W \oplus \mathbb{R}x$, $g(y) \leq p(y)$.

$\square$

Définition 2.2.9. $\preceq$ est un **ordre partiel** sur E ssi :

(1) $x \preceq y$ et $y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z$.

(2) $x \preceq y$ et $y \preceq x \Longrightarrow x = y$.

(3) $x \preceq x$, $\forall x \in E$.

Exemple 2.2.6. Dans $E = \mathbb{R}$, $\preceq$ est $\leq$. Et dans $E = \mathcal{P}(X)$, $\preceq$ est $\subseteq$.

Définition 2.2.10. Soit $(E, \preceq)$. Un élément $y \in E$ est une **borne supérieure pour** E ssi $x \preceq y$, $\forall x \in E$.

Exemple 2.2.7. Dans $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, prenons $y = X$.

Définition 2.2.11. Un ordre partiel $\preceq$ sur E est dit **linéaire** ssi $\forall x, y \in E$, $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.

Exemple 2.2.8. $(\mathbb{R}, \leq)$ est linéaire, mais $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ne l'est pas si $\#(X) > 1$.

Axiome 2.2.1 (Lemme de Zorn)**.** Si $\preceq$ est un ordre partiel sur E et chaque sous-ensemble ordonné linéairement de E a une borne supérieure, alors E a un élément maximal z, c'est-à-dire un z tel que

$$z \preceq x \Longrightarrow x = z.$$

Soit $G \in L(V, \mathbb{R})$, $W \subseteq V \subseteq U$. Soit $f = G|_W$ et $G(x) \leq p(x)$, $\forall x \in V$. Alors G définit un sous-espace de $V \times \mathbb{R} \subseteq U \times \mathbb{R}$:

$$E_G = \{(x, a) \ / \ a = G(x)\}.$$

Avons donc un ordre partiel sur l'ensemble de tels sous-espaces donné par $\subseteq$, aver borne supérieure $U \times \mathbb{R}$. Par le Lemme de Zorn, il existe un élément maximal dans cette collection : $F \in L(U, \mathbb{R})$, $F|_W = f$ et $F(x) \leq p(x)$, $\forall x \in V$.

Proposition 2.2.2. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, $f \in L(V, \mathbb{C})$, et $u = \mathrm{Re}(f)$. Alors $u \in L(V, \mathbb{R})$ et

$$f(x) = u(x) - iu(ix), \ \forall \ x \in X.$$

Si $u \in L(V, \mathbb{R})$ alors $f(x) = u(x) - iu(ix) \in L(V, \mathbb{C})$. Si V est normé, alors $||u|| = ||f||$.

Démonstration : Si $f \in L(V, \mathbb{C})$ alors

$$\begin{aligned} u(x+y) &= \mathrm{Re}(f)(y+x) = \mathrm{Re}(f(x)) + \mathrm{Re}(f(y)) = u(u) + u(y), \\ u(cx) &= \mathrm{Re}(f(cx)) = \mathrm{Re}(cf(x)) = c\mathrm{Re}(f(x)) \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ceci implique que $u \in L(V, \mathbb{R})$. D'autre part

$$\mathrm{Im}(f(x)) = -\mathrm{Re}(if(x)) = -\mathrm{Re}(f(ix)) = -u(ix).$$

Donc $f(x) = u(x) - iu(x)$. Si $u \in L(V, \mathbb{R})$ alors $f(x) = u(x) - iu(ix)$ satisfera :

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(cx) &= cf(x), \ \text{si } c \in \mathbb{R}, \\ f(ix) &= u(ix) - iu(i^2x) = u(ix) - iu(-x) \\ &= u(ix) + iu(x) = i(u(x) - iu(ix)) \\ &= if(x). \end{aligned}$$

Donc $f \in L(V, \mathbb{C})$. Enfin, $|u(x)| = |\mathrm{Re}(f(x))| \leq |f(x)|$ est alors $||u|| \leq ||f||$.

Notons par $|| \ ||$ la norme d'opérateur sur $L(V,\mathbb{R})$ et $L(V,\mathbb{C})$. Si $f(x) \neq 0$, posons $\alpha = \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} \in \mathbb{C}$. Nous avons

$$\begin{aligned} |f(x)| = \alpha f(x) = f(\alpha x) = \mathrm{Re}(f(\alpha x)) = u(\alpha x) = |u(\alpha x)| \\ \leq ||u|| \cdot ||\alpha x|| \\ = ||u|| \cdot |\alpha| \cdot ||x|| = ||u|| \cdot ||x||. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$||f|| = \sup_{||x|| \leq 1} |f(x)| \leq \sup_{||x|| \leq 1} ||u|| \cdot ||x|| = ||u||.$$

Alors $||u|| = ||f||$.

□

Définition 2.2.12. Soit U un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une application $p : U \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est dit une **semi-norme** ssi $|p(x+y)| \leq p(x) + p(y)$ et $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

Théorème 2.2.2 (Hahn-Banach sur $\mathbb{C}$)**.** Soit U un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $p(x)$ une semi-norme sur U. Soit $W \subseteq U$ un sous-espace vectoriel et $f \in L(W, \mathbb{C})$ telle que $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall\, x \in W$. Alors il existe $F \in L(U, \mathbb{C})$ telle que $F|_W = f$ et $|F(x)| \leq p(x)$, $\forall\, x \in U$.

Démonstration : Posons $u = \mathrm{Re}(f)$. Par le Théorème de Hahn-Banach sur $\mathbb{R}$, il existe une extension $\widetilde{u} \in L(U, \mathbb{R})$ de u telle que

$$\widetilde{u}(x) \leq p(x), \ \forall\, x \in U.$$

Posons $F(x) = \widetilde{u}(x) - i\widetilde{u}(ix)$, et soit $\alpha = \frac{\overline{F(x)}}{|F(x)|}$ si $F(x) \neq 0$. Par la proposition précédent, nous avons :

$$\begin{aligned} |F(x)| = \alpha(x)F(x) = F(\alpha x) = \widetilde{u}(\alpha x) \\ \leq p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x) = p(x). \end{aligned}$$

Si $F(x) = 0$ alors $|F(x)| = \widetilde{u}(x) = 0 \leq p(x)$. □

Théorème 2.2.3. Soit U un espace vectoriel normé sur $\mathbb{F}$.

(a) Si $W \subseteq U$ est un sous-espace fermé de U et $x \in U \backslash W$, alors il existe $f \in U^*$ telle que $f(x) \neq 0$ et $f|_W = 0$. En effet, si $\delta = \inf_{y \in W} ||x - y||$, pouvons prendre $||f|| = 1$ et $f(x) = \delta$.

(b) $x \in U$, $x \neq 0 \Longrightarrow \exists\, f \in U^*$ telle que $||f|| = 1$ et $f(x) = ||x||$.

(c) Si $x \neq y$, alors il existe $f \in U^*$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

(d) Soit $x \in U$, posons $\hat{x} : U^* \longrightarrow \mathbb{F}$, $\hat{x}(f) = f(x)$. Alors $\hat{}$ définit ainsi une application $\hat{} : U \longrightarrow U^{**}$ donnée par $x \mapsto \hat{x}$, qui est une isométrie linéaire.

Démonstration :

(a) Définissons $f : W \oplus \mathbb{F}x \longrightarrow \mathbb{F}$ par $f(y+\lambda x) = \lambda\delta$. Nous avons $f(x) = \delta$, $f|_W = 0$ et si $\lambda \neq 0$ alors

$$\begin{aligned} |f(y+\lambda x)| &= |\lambda\delta| = |\lambda|\delta \\ &\leq |\lambda|||\lambda^{-1}y + x|| \\ &= ||\lambda\lambda^{-1}y + \lambda x|| \\ &= ||y+\lambda x|| \\ &= p(y+\lambda x), \text{ où } p = ||\ ||. \end{aligned}$$

On peut appliquer le Théorème de Hahn-Banach pour obtenir F. Notez que W fermé $\Longrightarrow \delta > 0$.

(b) $x \in U$, $x \neq 0$. Nous utilisons (a) avec $W = \{0\}$. Alors

$$\delta = \inf_{y\in W} ||x-y|| = \inf ||x-0|| = ||x||.$$

Donc $f(x) = ||x||$ et $||f|| = 1$.

(c) Appliquons (b) avec $z = x - y$. Alors il existe $f \in U^*$ telle que $f(z) = ||z|| \neq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} 0 \neq f(x-y) &= f(x) - f(y) \\ f(x) &\neq f(y). \end{aligned}$$

(d) Si $x \in U$, $f, g \in U^*$ et $c \in \mathbb{F}$, nous avons

$$\begin{aligned} \hat{x}(f+g) &= (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \hat{x}(f) + \hat{x}(g), \\ \hat{x}(xf) &= (cf)(x) = c(f(x)) = c\hat{x}(f). \end{aligned}$$

Alors $\hat{x} \in L(U^*, \mathbb{F}) = U^{**}$, $\forall x \in U$. Aussi $|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq ||f|| \cdot ||x||$. La partie (b) implique que il existe $f \in U^*$ telle que $||f|| = 1$ et $f(x) = ||x||$. Donc

$$||\hat{x}|| = \sup_{g\neq 0} \frac{|\hat{x}(g)|}{||g||} \geq \frac{|\hat{x}(f)|}{||f||} = ||x||$$

et $\hat{}$ est une isométrie.

$\square$

Remarque 2.2.6. En général, $U \subseteq U^{**}$. Pour $\mathbb{R}^n$, $\hat{} =$ transposé. Verrons que $(L^p)^* = L^q$, $1 < p < \infty$. Chaque $g \in L^q$ définit une fonctionnelle linéaire $\varphi_g : L^p \longrightarrow \mathbb{F}$ par $\varphi_g(f) = \int f \cdot g$. Si $1 < p < \infty$ alors $(L^p)^{**} = L^p$.

Mais si $c_0 =$ ensemble des suites convergentes vers 0, alors $(c_0)^* = l_1$. Si $(a_n) \in c_0$, on peur définir

$$\varphi_{(b_n)}(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \in \mathbb{R}$$

pour $(b_n) \in l_1$.

Mais $(l_1)^* = l^\infty$. Si $(c_n) \in l_1$, on peut définir

$$\varphi_{(d_n)}(c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n c_n \in \mathbb{R},\ (d_n) \in l^\infty.$$

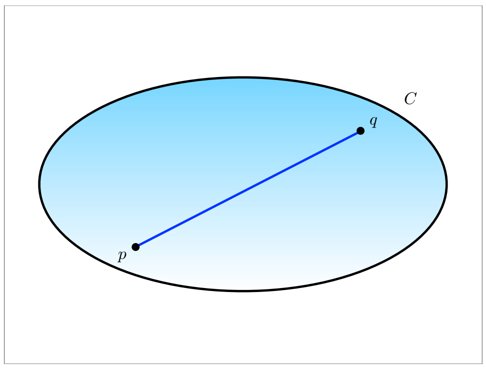
Donc $l_1 \subseteq (c_0)^*$ et $l^\infty \subseteq (l_1)^\infty$. Aussi, $(c_0)^{**}$ contient des éléments qui ne sont pas dans c_0.

Définition 2.2.13. Un espace est **réflexif** ssi $U^{**} = U$.

Théorème 2.2.4. Soit U un espace de Banach, $C \neq \emptyset$ convexe et ouvert. Soit L un sous-espace affine de U tel que $L \cap C = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan affine fermé H tel que $L \subseteq H$ et $H \cap C = \emptyset$.

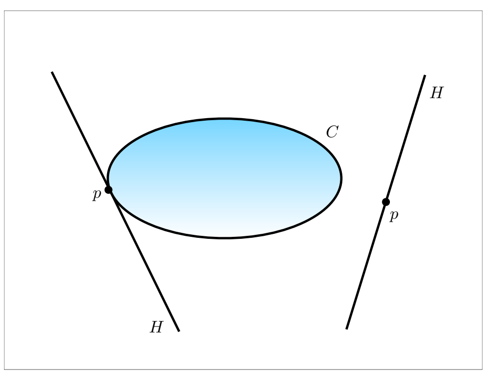
Rappelez que :

- C **convexe** ssi $\forall p, q \in C$, $0 \leq t \leq 1$, $tp + (1-t)q \in C$.



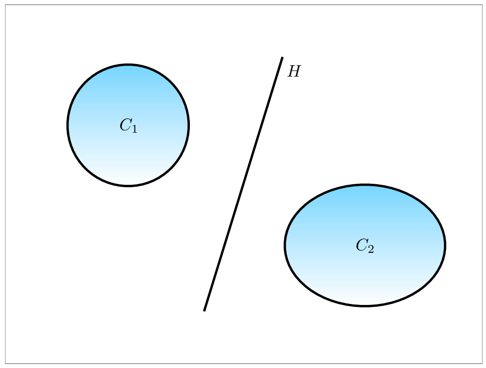
- B est **affine** si $\{p - q \ / \ p, q \in B\}$ est un sous-espace vectoriel de U, ou si $B = p + W$ où W est un sous-espace vectoriel de U.
- H est un **hyperplan affine** si $H = p + W$, où W est un sous-espace de U et $U = W \oplus \mathbb{F}_x$, $x \in U$.

Exemple 2.2.9. $L = \{p\}$.



Exemple 2.2.10. $f \in U^*$, $\{f(w) = 0\}$ définit un hyperplan.

Théorème 2.2.5. Soit C_1 et C_2 ensembles compactes et convexes, avec $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan affine H qui les sépare.



Remarque 2.2.7. L'ensemble suivant est compact : $E \subseteq l^\infty(\mathbb{N})$,

$$E = \left\{ (a_n) \in l^\infty \ / \ |a_n| \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Exemple 2.2.11 (Application de Hahn-Banach aux EDP)**.** Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ouvert, simplement connexe. Problème de Dirichlet :

$$* \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u|_{\partial\nabla} = f, \ f \in C^0(\partial D). \end{cases}$$

Considérons l'espace de Banach $U = (C^0(\partial D), || \ ||_U)$, et soit $W \subseteq U$ le sous-espace

$$W = \{ f \in U \ / \ * \text{ a une solution continue sur } \overline{D} \}.$$

Notons que $W \neq \emptyset$ car $0 \in W$. Soit $(x_0, y_0) \in D$ et $\Delta : W \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application $\Delta(f) = u(x_0, y_0)$. Par le Principe du Maximum, nous avons

$$|\Delta(f)| = |u(x_0, y_0)| \leq \sup_{\partial D} |f| = ||f||$$

Alors $\Delta(f)$ est bornée par $p(f) = ||f||$. Le Théorème de Hahn-Banach implique que il existe $\tilde{\Delta} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{\Delta}|_W = \Delta$ et $|\tilde{\Delta}(g)| \leq ||g||_U$, $\forall g \in U$. Pouvons interpreter $\Delta(g)$ comme étant solution à $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u|_{\partial D} = g$ en (x_0, y_0).

Convention $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $g \in L^q(X, \mu, \mathbb{F})$, $q \in [1, +\infty]$. (Donc, si $q = \infty$, on suppose que (X, μ) est σ-fini). Définissons $\varphi_g(f) = \int_X f \cdot g d\mu$ du pour $f \in \mathcal{M}_\mu(X, \mathbb{F})$ si cette intégrale est définie.

Proposition 2.2.3. $\varphi_g \in (L^p)^*$, ou $\varphi_g \in L(L^p, \mathbb{F})$.

Démonstration : Nous avons

$$\varphi_g(cf) = c\int f\cdot g = c\varphi_g(f),$$
$$\varphi_g(f+g) = \int (f+g)\cdot g = \int (f\cdot g + h\cdot g) = \int f\cdot g + \int h\cdot g = \varphi_g(f) + \varphi_g(h).$$

Alors φ_g est linéaire si elle est définie. Par l'inegalité de Hölder, nous avons

$$|\varphi_g(f)| = \left|\int f\cdot g\right| \leq \int |f\cdot g| = ||f\cdot g||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

Alors

$$||\varphi_g|| = \sup_{f\in L^p,\ f\neq 0} \frac{|\varphi_g(f)|}{||f||_p} \leq ||g||_q < \infty$$

et donc $\varphi_g \in L(L^p, \mathbb{F})$.

□

Remarque 2.2.8. Ceci est vrai $\forall p \in [1, +\infty]$.

Proposition 2.2.4. $||\varphi_g|| = ||g||_q$, $\forall p \in [1, +\infty]$. Donc l'application $\varphi : L^q \longrightarrow (L^p)^*$ donnée par $g \mapsto \varphi_g$ est une isométrie, et L^q est un sous-espace de Banach de façon canonique.

Démonstration : N'avons qu'à montrer $||\varphi_g|| \geq ||g||_q$. Si $g \equiv 0$ alors $\varphi \equiv 0$. Donc $||g||_q = ||\varphi_g|| = 0$. Supposons $g \neq 0$, $1 < p < \infty$. Posons

$$f = \frac{g^{q-1}\overline{\text{sign}(g)}}{||g||_q^{q-1}},\ \text{où } \text{sign}(g) = \tfrac{g}{||g||}.$$

Alors

$$||f||_p^p = \int \left|\frac{g^{q-1}\overline{\text{sign}(g)}}{||g||_q^{q-1}}\right|^p = \frac{1}{||g||_q^{pq-p}} \int |g|^{pq-p}.$$

Comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nous avons $q = pq - p$. Donc

$$||f||_p^p = \frac{1}{||g||_q^q} \int |g|^q = \frac{||g||_q^q}{||g||_q^q} = 1.$$

Alors

$$||\varphi_g|| \geq \frac{|\varphi_g(f)|}{||f||_p} = |\varphi_g(f)| = \left|\int f\cdot g\right|$$
$$||\varphi_g|| \geq \left|\int \frac{g^q\overline{\text{sign}(g)}}{||g||_q^{q-1}}\right| = \frac{1}{||g||_q^{q-1}} \left|\int |g|^q\right|$$
$$||\varphi_g|| \geq \frac{1}{||g||_q^{q-1}} ||g||_q^q = ||g||_q.$$

- Si $q=1$ alors $\varphi : L^q \longrightarrow (L^p)^*$ est donnée par $\varphi_g(f) = \int g \cdot f$. Posons $f = \overline{\text{sign}(g)}$. Nous avons $||\varphi_g|| \le ||g||_q$. Aussi $f \in L^\infty$:
$$||f|| = \begin{cases} 1 & \text{si } g \neq 0, \\ 0 & \text{si } g = 0. \end{cases}$$
Alors $||f||_\infty = 1$ et
$$|\varphi_g(f)| = \left|\int f \cdot g\right| = \left|\overline{\text{sign}(g)} \cdot g\right| = \left|\int \frac{\overline{g}}{||g||} \cdot g\right| = \left|\int ||g||\right| = ||g||_1.$$

- Si $q = \infty$ ($g \in L^\infty$) : voulons que $||\varphi_g|| \ge ||g||_\infty$. $\forall \epsilon > 0$, il existe $A = \{x \;/\; |g(x)| > ||g||_\infty - \epsilon\}$, avec $\mu(A) > 0$. Comme μ est σ-fini, nous avons $\bigcup_{i=1}^\infty (E_i \cap A) = A$ où $\mu(E_i) < \infty$. Alors il existe j tel que $\mu(E_j \cap A) > 0$. Posons $B = E_j \cap A$ et $f = (\mu(B))^{-1}\chi_B\overline{\text{sign}(g)}$. Nous avons :
$$\begin{aligned} ||f||_1 &= \int_X \chi_B \cdot \frac{|\overline{\text{sign}(g)}|}{\mu(B)} d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_X \chi_B d\mu = 1, \\ ||\varphi_g|| &= \sup_{h \in L^1,\ h \neq 0} \left|\int h \cdot g\right| \ge \left|\int f \cdot g\right| = \left|\frac{1}{\mu(B)} \int \chi_B \cdot g \cdot \overline{\text{sign}(g)} d\mu\right| \\ &= \left|\frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| d\mu\right| = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| d\mu. \end{aligned}$$
L'inclusion $B \subseteq A$ implique que
$$||\varphi_g|| \ge \frac{1}{\mu(B)} \int_B (||g||_\infty - \epsilon) d\mu = \frac{1}{\mu(B)} (||g||_\infty - \epsilon) \cdot \int_B d\mu = ||g||_\infty - \epsilon,\ \forall \epsilon > 0.$$
Donc $||\varphi_g|| \ge ||g||_\infty$.

□

Définition 2.2.14. μ est **sémifinie** si $\forall A \in \mathcal{M}$, $\exists B \subseteq A$ tel que $0 < \mu(B) < \infty$.

Conclusion : $L^q \subseteq (L^p)^*$ isométriquement par φ. Verrons que $L^q \cong (L^p)^*$ avec $1 < p < \infty$, et donc L^p sera réflexif. D'autre part, nous avons $(L^1)^* = L^\infty$ si μ est σ-finie. Aussi, $(L^\infty)^* \supsetneqq L^1$, presque toujours. Soit $L^\infty([0,1], \mu, \mathbb{R})$ avec $\mu =$ mesure de Lebesgue. Soit $\psi : C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application $\psi(f) = f(0)$. Nous avons
$$|\psi(f)| = |f(0)| \le \sup_{[0,1]} |f(x)| = ||f||_\infty, \text{ parce que } f \text{ est continue.}$$
Alors $\forall f \in C([0,1]) \subseteq L^\infty$. Par le Théorème de Hahn-Banach sur L^∞ avec $p = ||\ ||_\infty$, il existe $\widetilde{\psi} \in (L^\infty)^*$ telle que $\widetilde{\psi}|_{C([0,1])} = \psi$. Supposons que $\widetilde{\psi} \in L^1$, c'est-à-dire que il existe $g \in L^1$ telle que
$$\widetilde{\psi}(f) = \int_0^1 f \cdot g d\mu.$$
Soit $f_n(x) = \max\{(1 - nx, 0)\} \in C([0,1])$. Alors $\widetilde{\psi}(f_n) = f(0) = 1$, $\forall n$. Alors $f_n(x) \longrightarrow 0$, $\forall x \in (0,1]$ et donc
$$|f_n(x) \cdot g(x)| \le |g(x)| \in L^1.$$

Ceci implique

$$1 = \widetilde{\psi}(f_n) = \int_0^1 f_n \cdot g d\mu \longrightarrow 0, \text{ (contradiction)}.$$

Alors $\widetilde{\psi} \in (L^\infty)^* \backslash L^1$, et L^1 n'est pas réflexif. Donc $(L^1)^{**} = (L^\infty)^* \neq L^1$.

Lemme 2.2.1. *E est un sous-ensemble dense dans X si $\forall\ W \neq \emptyset$ ouvert on a $W \cap E \neq \emptyset$.*

Démonstration : Soit $x \in E^c$. Devons montrer que il existe une suite $(x_n) \subseteq E$ telle que $x_n \longrightarrow x$. Nous choisissons $x_n \in B(x, 1/n) \cap E$. Alors $x_n \longrightarrow x$.

$\square$

Théorème 2.2.6 (Théorème de Baire)**.** *Let X be a complete metric space. Si $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ est un suite d'ensembles denses et ouverts, alors $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$ est dense dans X.*

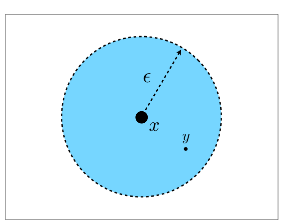
Démonstration : Soit W ouverts dans X. Il suffira de montrer $W \cap (\bigcap_{n=1}^\infty U_n) \neq \emptyset$. Comme $U_1 \cap W \neq \emptyset$ est ouvert, il existe $B(x_0, r_0) \subseteq U_1 \cap W$. Sans perte, $0 < r_0 < 1$. Pour $n > 0$, posons $x_n \in X$ et $r_n \in (0, 2^{-n})$ comme suit :

$$\begin{aligned} U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) &\neq \emptyset \text{ ouvert}, \\ \overline{B(x_n, r_n)} &\subseteq U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}). \end{aligned}$$

Si $n, m \geq N$, alors $x_n, x_m \in \overline{B(x_N, r_N)}$ puisque $r_N \longrightarrow 0$. Alors (x_n) est une suite de Cauchy et donc il existe $x = \lim_{N \to \infty} x_N$. Comme $x_n \in \overline{B(x_N, r_N)}\ \forall\, n \geq N$, nous avons $x \in \overline{B(x_N, r_N)} \subseteq U_N \cap B(x_0, r_0) \subseteq W \cap U_N$, $\forall N$. Alors $x \in \bigcap_{N=1}^\infty (U_N \cap W) = (\bigcap_{N=1}^\infty U_N) \cap W$. Donc $(\bigcap_{n=1}^\infty U_n) \cap W \neq \emptyset$, $\forall\ W \neq \emptyset$. Ceci implique que $\cap_{n=1}^\infty U_n$ est dense.

$\square$

Soit X un espace métrique complet. Un sous-ensemble $A \subseteq X$ est **rare** (ou **nulle part dense**) ssi $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \emptyset$. Le Théorème de Baire implique que si X est un espace métrique complet, alors X n'est pas l'union dénombrable d'ensembles rares. Supposons que $X \neq \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ ou chaque E_n est rare. Alors $\mathrm{Int}(\overline{E_n}) = \emptyset$. Donc $\nexists\ x \in E_n$ et $\epsilon > 0$ tels que $B(x, \epsilon) \subseteq \overline{E_n}$. Donc $\forall\ x \in \overline{E_n}$, $\exists y \in (\overline{E_n})^c$ tel que $d(x, y) < \epsilon$.



Alors les $(\overline{E_n})^c$ sont denses et ouverts. Donc $\bigcap_{n=1}^\infty (\overline{E_n})^c \neq \emptyset$. Par conséquent $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty \overline{E_n} \neq X$.

Définition 2.2.15. Soit X et Y espaces topologiques. Une fonction $f : X \longrightarrow Y$ et **ouverte** ssi

$$E \text{ ouvert } \implies f(E) \text{ ouvert.}$$

Exemple 2.2.12. Tout surjection linéaire $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est ouverte. La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = x^2$ n'est pas ouverte, puisque $f((-1, 1)) = [0, 1)$.

Théorème 2.2.7 (Théorème de l'application ouverte)**.** Soit U et V des espace de Banach. Si $T \in L(U, V)$ est une surjection, alors T est ouverte.

Remarque 2.2.9. Ceci montre que l'application $T : l^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow l^\infty(\mathbb{N})$ donnée par

$$T\left((a_n)_{n=1}^\infty\right) = \left(\frac{a_n}{n}\right)_{n=1}^\infty$$

n'est pas une surjection. Notez que $T(B(0, 1))$ n'est pas ouvert : s'el existait $\epsilon > 0$ tel que $B(0, \epsilon) \subseteq T(B(0, 1))$, alors $0 < \epsilon < 1/n \ \forall \ n$. Donc T n'est pas ouverte.

Démonstration : Puisque tout ouvert A de U est l'union $A = \bigcup_\alpha B(x_\alpha, r_\alpha)$ et

$$T(A) = \bigcup_\alpha T(B(x_\alpha, r_\alpha)),$$

il suffit de montrer que chaque $T(B(x_\alpha, r_\alpha))$ est ouvert. D'autre part,

$$B(x_\alpha, r_\alpha) = x_\alpha + B(0, r_\alpha) = x_\alpha + r_\alpha B(0, 1)$$

et donc

$$T(B(x_\alpha, r_\alpha)) = Tx_\alpha + r_\alpha T(B(0, 1)),$$

il suffit de montrer que $\forall \ y \in T(B_U(0, 1))$ il existe ρ tel que $B_V(y, \rho) \subseteq T(B_U(0, 1))$. Comme $U = \bigcup_{n=1}^\infty B(0, n)$ et T est surjectif, nous avons

$$V = T(U) = \bigcup_{n=1}^\infty T(B_U(0, n)).$$

Comme V est complet, par le Théorème de Baire, les $T(B_U(0, n))$ ne sont pas tous rares. Ils sont tous homéomorphes à $T(B_U(0, 1))$. Donc $T(B_U(0, 1))$ n'est pas rare. Alors $\mathrm{Int}(\overline{T(B_U(0, 1))}) \neq \emptyset$. Ceci implique que $\exists \ y_0 \in V$ et $r > 0$ tels que $B_V(y_0, 4r) \subseteq \overline{T(B(0, 1))}$. Soit $y_1 = Tx_1 \in T(B(0, 1))$, avec $x_1 \in B_U(0, 1)$ tel que $||y - y_0|| < 2r$. Alors $B(y, 2r) \subseteq B(y_0, 4r) \subseteq \overline{T(B_U(0, 1))}$. Nous avons que si $y \in V$ avec $||y|| < 2r$, alors

$$y = -Tx_1 + y + Tx_1 = T(-x_1) + y + y_1 \in T(-x_1) + \overline{T(B_U(0, 1))}, \text{ parce que } y + y_1 \in B(y_1, 2r).$$

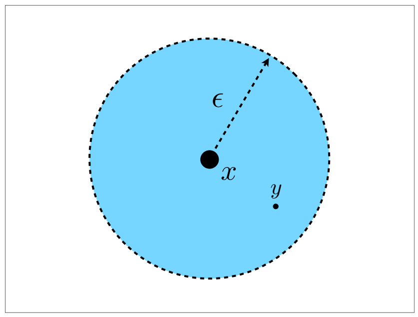
Alors

$$y \in T(-x_1) + \overline{T(B_U(0, 1))} = \overline{T(-x_! + B_U(0, 1))} \subseteq \overline{T(B_U(0, 2))}, \text{ puisque } ||x_1||_U \leq 1.$$

Si $z = y/2$ alors $||z|| < r$. Donc $z \in \overline{T(B_U(0,1))}$ ou $B_V(0,r) \subseteq \overline{T(B_U(0,1))}$. De la même façon : $||y|| < r2^{-n} \implies y \in \overline{T(B_U(0,2^{-n+2}))}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
||y|| < 2r &\implies y \in \overline{T(B(0,2))} \\
\left|\left|\frac{y}{c}\right|\right| < 2r &\implies \frac{y}{c} \in \overline{T(B(0,2))} \\
||y|| < 2rc &\implies y \in c\overline{T(B(0,2))} = \overline{T(B(0,2c))} \\
||y|| < 2^{-n}r &\implies y \in \overline{T(B(0,2^{-n}))}.
\end{aligned}$$

Si $n = 1$ et $||y|| < \frac{r}{2}$, alors $y \in \overline{T(B(0,2^{-1}))}$. Avons donc $x_1 \in B_U\left(0, \frac{1}{2}\right)$ tel que $||y - Tx_1|| < \frac{r}{4}$.



$$\begin{aligned}
||y - Tx_1|| < 2^{-2}r &\implies (y - Tx_1) \in \overline{T(B(0,2^{-2}))} \\
&\implies \exists\ x_2 \in B\left(0, \frac{1}{2^2}\right) \text{ tel que } ||(y - Tx_1) - Tx_2|| < \frac{r}{2^3}.
\end{aligned}$$

En genéral, $\forall\ n$, avons $x_1, \ldots, x_n \in U$ tels que $||x_i|| \leq 2^{-i}$ (ou $x_i \in B(0,2^{-i})$) et

$$\begin{aligned}
\left|\left| y - \sum_{i=1}^{n} Tx_i \right|\right| &< \frac{r}{2^{n+1}} \\
\left|\left| y - T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \right|\right| &< \frac{r}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Posons $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$, x est définie parce que

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i|| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Nous avons $y = Tx$. Donc $\forall\ y \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$ il existe $x \in B(0,1)$ tel que $Tx = y$, c'est-à-dire

$$B_V\left(0, \frac{r}{2}\right) \subseteq T(B_U(0,1)).$$

$\square$

Corollaire 2.2.1. Soit U et V des espaces de Banach, $T \in L(U,V)$ bijective. Alors $T^{-1} \in L(V,U)$.

Démonstration : $T^{-1} : V \longrightarrow U$ est une bejection linéaire. soit $E \subseteq U$ ouvert. Nous avons que $(T^{-1})^{-1}(E) = T(E)$ est ouvert par le Théorème de l'application ouverte. Alors T^{-1} est continue est donc $T^{-1} \in L(V, U)$.

$\square$

Remarque 2.2.10. En général, c'est pas vrai que $||T^{-1}|| = \frac{1}{||T||}$:

$$\begin{aligned} ||T^{-1}|| &= \sup_{v \neq 0} \frac{||T^{-1}v||}{||v||} = \sup_{Tu \neq 0} \frac{||T^{-1}(T_u)||}{||Tu||} = \sup_{Tu \neq 0} \frac{||u||}{||Tu||} \\ &= \sup_{u \neq 0} \frac{||u||}{||Tu||} = \sup_{u \neq 0} \frac{1}{\frac{||Tu||}{||u||}} = \frac{1}{\inf_{u \neq 0} \frac{||Tu||}{||u||}} \\ &\neq \frac{1}{||T||}. \end{aligned}$$

Soit $T : U \longrightarrow V$ une application. Son **graphe** est définie comme

$$\Gamma(T) = \{(x, y) \in U \times V \ / \ y = Tx\} \subseteq U \times V.$$

Nous disons que T est fermé ssi $\Gamma(T) \subseteq U \times V$ est fermé. Si U et V sont espaces métriques, alors ceci implique que si $(x_i, y_i) \longrightarrow (x, y)$ alors $(x, y) \in \Gamma(T)$, où chaque $(x_i, y_i) \in \Gamma(T)$. Donc $y_i = Tx_i$, $x_i \longrightarrow x$ et $Tx_i \longrightarrow y$ impliquent que $y = Tx$.

Exemple 2.2.13. Soit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Alors $(x_i, f(x_i)) = \left(\frac{1}{i}, 1\right) \longrightarrow (0, 1) \notin \Gamma(f)$.

Si $T : U \longrightarrow V$ est continue, et $x_i \longrightarrow x$, alors $Tx_i \longrightarrow Tx$ (donc $y_i \longrightarrow y = Tx$). Par conséquent, T est fermé.

Théorème 2.2.8 (Théorème du graphe fermé)**.** Soit U et V des espaces de Banach, $T : U \longrightarrow V$ une application fermé. Alors $T \in L(U, V)$.

Démonstration : Soit π_1 et π_2 les projections

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \Gamma(T) \longrightarrow U \text{ donnée par } (x, Tx) \mapsto x, \\ \pi_2 &: \Gamma(T) \longrightarrow V \text{ donnée par } (x, Tx) \mapsto Tx. \end{aligned}$$

Les π_i sont bornées; et puisque U et V sont complets, $U \times V$ le sera aussi. Comme $\Gamma(T) \subseteq U \times V$ est fermé, nous avons $\Gamma(T)$ est complet. Alors π_1 est une bijection bornée entre $\Gamma(T)$ et U. Par le Théorème de l'application ouverte, nous avons que π_1^{-1} est bornée. Donc $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ est bornée.

$\square$

Théorème 2.2.9. Soit U et V des espaces vectoriels normés, et $\mathcal{A} \subseteq L(U,V)$.

(i) Supposons que E n'est pas l'union dénombrable d'ensembles nulle part denses. Si $\sup_{T\in\mathcal{A}} ||Tx|| < \infty$, $\forall\, x \in E$, alors $\sup_{T\in\mathcal{A}} ||T|| < \infty$.

(ii) Si U est un espace de Banach et $\forall\, x \in U$, $\sup_{T\in\mathcal{A}} ||Tx|| < \infty$, alors $\sup_{T\in\mathcal{A}} ||T|| < \infty$.

Démonstration : (i) et le Théorème de Baire impliquent (ii). N'avons qu'à montrer (i). Soit

$$E_n = \{x \in U \ / \ \sup_{T\in\mathcal{A}} ||Tx|| \leq n\} = \bigcap_{T\in\mathcal{A}} \{x \in U \ / \ ||Tx|| \leq n\}$$

Alors chaque E_n est fermé et $E_n \subseteq E$ et $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$. Par l'hypothése, il existe n tel que E_n n'est pas nulle part dénse. C'est-à-dire qu'il existe n tel que $\mathrm{Int}(E_n) = \mathrm{Int}(\overline{E_n}) \neq \emptyset$. Ceci implique qu'il existent x_0 et r_0 tels que $B(x_0, r_0) \subseteq E_n$. Comme E_n est fermé, $\overline{B(x_o, r_0)} \subseteq E_n$. Nous avons $\overline{B(x_0, r_0)} \subseteq E_{2n}$ puisque si $||x|| \leq r_0$ alors $x - x_0 \in \overline{B(x_0, r_0)}$. Donc

$$\sup_{T\in\mathcal{A}} ||T(x+x_0)|| \leq n$$

$$||Tx|| = ||T(x+x_0) - Tx_0|| \leq ||T(x+x_0)|| + ||Tx_0|| \leq 2n.$$

Conclusion : $||x|| \leq r_0 \Longrightarrow ||Tx|| \leq 2n$, $\forall\, T \in \mathcal{A} \Longrightarrow ||T|| \leq \frac{2n}{r}$.

$\square$

Application : Supposons que $T_n \in L(U,V)$, $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existe $\forall\, x \in U$. Alors il existe $T \in L(U,V)$ telle que

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x, \ \forall\, x \in U.$$

T est linéaire et $\forall\, x \in U$,

$$||Tx|| = \left|\left|\lim_{n\to\infty} T_n x\right|\right| < \infty$$

Par le Théorème de Banach-Steinhaus, $||T|| < \infty$ et donc $T \in L(U,V)$.

Remarque 2.2.11. $(L^p)^* = L^q$ si $1 \leq p < \infty$. Avons vu qu'avec $g \mapsto \varphi_g$, $g \in L^q$, et $\varphi_g(f) = \int_X f \cdot g d\mu$, nous avons $L^q \subseteq (L^p)^*$. Pour l'egalité, voulons $\forall\, \Lambda \in (L^p)^*$ $\exists\, g \in L^q$ telle que $\Lambda(f) = \int_X f \cdot g d\mu$, $\forall\, f \in L^p$. Il suffit de montrer pour $g =$ fonctions simples telles que $\mu(\{s \neq 0\}) < \infty$. Notez que Λ définit une mesure à valuers dans $\mathbb{F}$ par $\nu(E_j) = \Delta(\chi_{E_j})$ si $p < \infty$. En fait, $\chi_\emptyset \equiv 0$, $\nu(\emptyset) = \Delta(\chi_\emptyset) = 0$. Alors nous avons qu'à montrer que si les E_j sont disjoints alors

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j),$$

ceci est faux, en général pour $p = \infty$. Soit $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Nous avons

$$\left|\left|\chi_E - \sum_{j=1}^{n} \chi_{E_j}\right|\right|_{L^\infty} = \left|\left|\sum_{j=n+1}^{\infty} \chi_{E_j}\right|\right| = 1 \text{ si } \exists\, j \geq n+1 \text{ tel que } \mu(E_j) \neq 0.$$

En général, $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \chi_{E_j} \neq \chi_E$ dans L^{∞}. N'avons pas forcement

$$\nu(E) = \Delta(\chi_E) = \Delta\left(\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \Delta(\chi_{E_j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j).$$

Si $1 \leq p < \infty$ et $\mu(E) = 0$, alors $\nu(E) = \Delta(\chi_E) = \Delta(0)$ dans L^p presque partout. Alors $\nu \ll \mu$. Par le Théorème de Radon-Nikodym, il existe $g \in L^q$ telle que

$$\nu(E) = \int_E g d\mu = \int_X g \cdot \chi_E d\mu = \Delta(\chi_E).$$

Si s est une fonction simple $s = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}$, nous avons

$$\Delta(s) = \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \Delta(\chi_{E_i}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_X g \cdot \chi_{E_i} d\mu = \int_X g \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}\right) d\mu = \int_X g \cdot s d\mu.$$

Alors, les fonctions simples sont denses dans L^p. Donc

$$\Delta(f) = \Delta\left(\lim_{n\to\infty} s_n\right) = \lim_{n\to\infty} \Delta(s_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X g \cdot s_n d\mu = \int_X g \cdot f d\mu$$

où la dernière égalité est une coséquence de le Théorème de convergence dominée. Enfin, $g \in L^q$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Conway, J. *A Course in Functional Analysis*. Springer-Verlag, Inc. New York. (1990).

[2] Folland, G. *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley and Sons, Inc. New York. (1999).

[3] Friedman, A. *Foundations of Modern Analysis*. Dover Publications, Inc. Mineola, N.Y. (1982).

[4] Royden, H. *Real Analysis*. Pearson Education, Inc. Singapore. (1988).

[5] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, Inc. New York. (1953).